

MICHEL MÉTIVIER

Transformées de Fourier des mesures cylindriques

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n° 9, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A9_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRANSFORMÉES DE FOURIER DES MESURES CYLINDRIQUES

par

Michel METIVIER

Cet exposé est consacré à une présentation d'un chapitre du cours de 3e cycle de L. Schwartz 1964-1965 : Mesures de Radon sur des espaces topologiques arbitraires.

1. Définition de la transformée de Fourier.

E est un espace vectoriel localement convexe réel, E' son dual. Si μ est une mesure de Radon sur E , bornée, on peut définir la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de μ comme étant l'application de E' dans $\mathbb{C}$ suivante :

$$(1.1) \quad \hat{\mu}(\xi) = \int e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \mu(dx).$$

Remarquons que si nous désignons par μ_ξ la mesure image de μ par ξ la transformée de Fourier de μ_ξ est $\hat{\mu}_\xi(t)$ définie par

$$(1.2) \quad \hat{\mu}_\xi(t) = \int e^{-2\pi i \langle x, t \rangle} \mu(dx).$$

D'où la relation

$$(1.3) \quad \hat{\mu}(t\xi) = \hat{\mu}_\xi(t).$$

Nous voyons également que si nous désignons par $\mu_{\xi, \eta}$ la distribution conjointe des deux variables aléatoires ξ et η éléments de E' , pour tout couple (u, v) de scalaires réels on a :

$$\hat{\mu}_{(\xi, \eta)}(u, v) = \int e^{-2\pi i \langle x, u\xi + v\eta \rangle} \mu(dx) \quad \text{soit :}$$

$$(1.4) \quad \hat{\mu}_{(\xi, \eta)}(u, v) = \hat{\mu}(u\xi + v\eta).$$

Inversement, supposons que nous considérons une application linéaire de E' dans un espace de variables aléatoires : $\xi \longrightarrow L(\xi)$ (situation qui est équivalente à se donner une mesure cylindrique sur E pour la dualité (E, E')). Désignons par μ_ξ la loi de probabilité de $L(\xi)$, et par $\mu_{\xi\eta}$ la loi de probabilité de $(L(\xi), L(\eta))$. On a :

$$\hat{\mu}_\xi(t) = E(e^{-2i\pi L(t\xi)}) = E(e^{-2i\pi t L(\xi)}) = \hat{\mu}_{t\xi}(1).$$

Cette égalité prouve que la famille $(\hat{\mu}_\xi)_{\xi \in E}$, est entièrement déterminée par la seule application $\hat{\mu}$ de E' dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$(1.5) \quad \hat{\mu}(\xi) = \mu_\xi(1).$$

Définition 1.

Si L est une fonctionnelle aléatoire linéaire sur E' , ou si μ est la mesure cylindrique sur E associée, on appelle transformée de Fourier de L (ou de μ) la fonction complexe $\hat{\mu}$ sur E' définie par (1.5).

Il résulte de (1.1) et (1.3) ci-dessus que

Proposition 1.

Si la mesure cylindrique μ est prolongeable en une mesure de Radon notée également μ , $\hat{\mu}(\xi)$ définie par (1.5) est la transformée de Fourier de μ .

Nous voyons également immédiatement que la formule (1.4) est valable pour la transformée de Fourier μ d'une mesure cylindrique $\hat{\mu}$, car :

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{(\xi, \eta)}(u, v) &= E(e^{-2i\pi\{uL(\xi)+vL(\eta)\}}) = \\ &= E(e^{-2i\pi L(u\xi+v\eta)}) = \hat{\mu}_{u\xi+v\eta}(1)\end{aligned}$$

Remarque. Notons que $\mu_{\xi}(R)$ ne dépend pas de ξ , en raison des relations de compatibilité, et désignons par $\|\mu\|$ cette quantité. On a $\hat{\mu}(0) = \|\mu\|$

2. Transformée de Fourier et propriétés de concentration.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.

Soit $\mathcal{G}$ un ensemble filtrant à droite pour $\mathcal{C}$ de parties convexes équilibrées et bornées, stable par homothétie, les propriétés suivantes sont équivalentes pour une mesure cylindrique μ sur E

*A - μ est scalairement $\mathcal{G}$ -concentré. **

B - $\hat{\mu}$ est continue à l'origine sur $E'_{\mathcal{G}}$

C - $\hat{\mu}$ est uniformément continue sur $E'_{\mathcal{G}}$

Démonstration.

L'implication $A \implies B$ est prouvée par le lemme 1 ci-dessous.

L'implication $B \implies A$ est prouvée par le lemme 2 ci-dessous.

L'implication $C \implies B$ est triviale.

L'implication $B \implies C$ résulte immédiatement du lemme 4.

Nous prouvons donc successivement ces différents lemmes.

* μ est dite scalairement $\mathcal{G}$ -concentré si $\forall$ la forme linéaire ξ sur E , et $\forall \epsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{G}$ tel que, si $\xi(A)$ désigne l'image de A par ξ , $\mu_{\xi}(R \setminus \xi(A)) \leq \epsilon$.

Lemme 1.

Si μ est scalairement concentrée à δ près sur A , et si N désigne la jauge de A° , on a :

$$(2.1) \quad |\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(\xi)| < 2\hat{\mu}(0) \pi N(\xi) + 2\delta$$

Démonstration.

L'hypothèse exprime que μ_ξ est concentrée à δ près sur $\xi(A) \subset [-N(\xi), N(\xi)]$. Comme $\hat{\mu}(\xi) = \hat{\mu}_\xi(1) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi u} \mu_\xi(du)$. On a :

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |1 - e^{-2i\pi u}| \mu_\xi(du) \\ &\leq \int_{[|u| \leq N(\xi)]} |2\pi u| \mu_\xi(du) + \int_{[|u| \geq N(\xi)]} |1 - e^{-1i\pi u}| \mu_\xi(du) \\ &\leq \|\mu\| 2\pi N(\xi) + 2\delta \end{aligned}$$

Conséquence du lemme 1.

On a immédiatement : si μ est scalairement concentrée à δ près sur A , $\xi \in \delta \cdot A^\circ \implies |\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(\xi)| < 2(\mu(0)\pi + 1)\delta$.

D'où l'implication $A \implies B$ du théorème 1.

Lemme 2.

Soit ν une mesure positive bornée sur $\mathbb{R}$ et $\Psi(t)$ sa transformée de Fourier. Si $|\Psi(0) - \Psi(t)| \leq \delta^2$ pour tout $t \in [-\frac{1}{L}, +\frac{1}{L}]$, alors ν est concentrée à $(1 + \frac{2}{\pi})\delta$ près sur $]-\frac{L}{\delta}, +\frac{L}{\delta}[$.

Démonstration.

Comme $\frac{L}{\delta} e^{-\pi u^2 L^2 / \delta^2}$ admet $e^{-\pi t^2 \delta^2 / L^2}$ comme transformée de Fourier, la formule suivante : $\int \hat{h} d\nu = \int h(u) \Psi(u) du$ valable pour toute fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}$ donne :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2 \delta^2 / L^2} v(dt) = \frac{L}{\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2 L^2 / \delta^2} \Psi(u) du.$$

Comme $\Psi(0) = \int_{\mathbb{R}} v(dt)$ et $1 = \frac{L}{\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2 L^2 / \delta^2} du$ on a :

$$(2.2) \quad \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-\pi t^2 \delta^2 / L^2}) = \frac{L}{\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2 L^2 / \delta^2} (\Psi(0) - \Psi(u)) du$$

Minorons le 1er membre :

$$(2.3) \quad (1 - e^{-\pi}) v(|t| \leq \frac{L}{\delta}) \leq \int_{|t| \geq L/\delta} (1 - e^{-\pi t^2 \delta^2 / L^2}) v(dt)$$

(2.2) et (2.3) entraînent alors :

$$\begin{aligned} (1 - e^{-\pi}) v(|t| \geq \frac{L}{\delta}) &\leq \frac{L}{\delta} \int_{|u| \leq 1/L} e^{-\pi u^2 L^2 / \delta^2} (\Psi(0) - \Psi(u)) du + \\ &\quad + \frac{L}{\delta} \int_{|u| \geq 1/L} e^{-\pi u^2 L^2 / \delta^2} |\Psi(0) - \Psi(u)| du \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} (1 - e^{-\pi}) v(|t| \geq \frac{L}{\delta}) &\leq \delta e^{-\pi/\delta^2} + \int_{|s| \geq 1/\delta} 2e^{-\pi s^2} ds \\ &\leq \delta + 2 \int_{\delta}^{+\infty} 2s \delta e^{-\pi s^2} ds = \delta (1 + \frac{2}{\pi} e^{-\pi/\delta^2}) \\ &\leq \delta (1 + \frac{2}{\pi}) \end{aligned}$$

Lemme 3.

Soit μ une mesure cylindrique sur E et $A \subset E$, A convexe équilibré.

Si $|\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(\xi)| \leq \delta^2$ pour tout $\xi \in A^\circ$, alors μ est scalairement concentrée à $(1 + \frac{2}{\pi})\delta$ près sur $\frac{1}{\delta} \cdot A$.

Démonstration.

En vertu de l'identité

$$\hat{\mu}(u, \xi) = \hat{\mu}_\xi(u)$$

on a :

$$|\hat{\mu}_\xi(0) - \hat{\mu}_\xi(u)| \leq \delta^2 \quad \text{si } u\xi \in A^\circ.$$

Or si N désigne la jauge de A° $u \in A^\circ \iff |u| \leq \frac{1}{N(\xi)}$. D'après le lemme 2, μ_ξ est donc concentré à $(\frac{2}{\pi} + 1)\delta$ près sur $]-\frac{N(\xi)}{\delta}, \frac{N(\xi)}{\delta}[$.

Par définition, puisque A est dense dans A° , pour tout ξ :

$N(\xi) = \sup_{x \in A} |\langle x, \xi \rangle|$, d'où : $\frac{N(\xi)}{\delta} = \sup_{x \in A/\delta} |\langle x, \xi \rangle|$. Comme $\xi(A)$ est en outre un intervalle symétrique puisque A est équilibré on a :

$$\xi(\frac{1}{\delta} \cdot A) \supset]-\frac{N(\xi)}{\delta}, \frac{N(\xi)}{\delta}[.$$

μ_ξ est donc concentré à $(1 + \frac{2}{\pi})\delta$ près sur $\xi(\frac{1}{\delta} \cdot A)$.

Lemme 4.

La transformée de Fourier d'une mesure cylindrique μ sur E vérifie l'inégalité :

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in E' :$$

$$|\hat{\mu}(\xi_1) - \hat{\mu}(\xi_2)|^2 \leq 2 \hat{\mu}(0) (\hat{\mu}(0) - \operatorname{Re} \hat{\mu}(\xi_1 - \xi_2))$$

Démonstration.

Supposons que h soit la transformée de Fourier d'une mesure ν sur $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} |h(u) - h(v)|^2 &= \left| \int (e^{iux} - e^{ivx}) \nu(dx) \right|^2 \\ &= \left| \int e^{iux} (1 - e^{i(v-u)x}) \nu(dx) \right|^2 \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned} &\leq \int |e^{iux}|^2 \nu(dx) \cdot \int |1 - e^{i(v-u)x}|^2 \nu(dx) \\ &\leq \varphi(0) \cdot \int (2 - 2 \operatorname{Re} e^{i(v-u)x}) \nu(dx) \\ &\leq 2\varphi(0) \cdot (\varphi(0) - 2 \operatorname{Re} \varphi(v-u)). \end{aligned}$$

Posons maintenant pour $t = (t_1, t_2)$ $h(t) = \hat{\mu}(t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2)$. On a

$h(t) = \hat{\mu}_{(\xi_1, \xi_2)}(t_1, t_2)$. D'où en posant $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$

$$h(u) - h(v) = \hat{\mu}(\xi_1) - \hat{\mu}(\xi_2) = 2\hat{\mu}_{(\xi_1, \xi_2)}(0) (\hat{\mu}_{(\xi_1, \xi_2)}(0) - \Re \hat{\mu}_{(\xi_1, \xi_2)}\{u, v\})$$

et comme

$$\hat{\mu}_{(\xi_1, \xi_2)}(0) = \|\mu_{\xi_1, \xi_2}\| = \|\mu\| = \hat{\mu}(0)$$

on a la formule voulue.

3. Propriétés de concentration et continuité des fonctionnelles linéaires aléatoires.

Théorème 2.

Pour une fonctionnelle linéaire aléatoire L sur E' les propriétés suivantes A, B, C et D sont équivalentes. Si $\mathcal{G}$ désigne un ensemble filtrant à droite pour $\mathcal{C}$ de parties convexes équilibrées et bornées, stable par homothétie :

A - L est continue en probabilité sur $E'_{\mathcal{G}}$

B - L est continue en loi sur $E'_{\mathcal{G}}$

C - La fonction caractéristique de L est continue sur $E'_{\mathcal{G}}$

D - La mesure cylindrique μ associée à L est scalairement $\mathcal{G}$ -concentrée.

Démonstration.

1°) $A \Leftrightarrow B$.

A implique B trivialement. Réciproquement, en vertu de la linéarité de L , L est continue en probabilité sur $E'_{\mathcal{G}}$ si et seulement si elle est continue en probabilité à l'origine, c'est-à-dire, si pour toute suite (ξ_n) tendant vers 0 dans $E'_{\mathcal{G}}$, $L(\xi_n)$ converge vers 0 en probabilité. Or la

convergence en loi vers 0 d'une suite (X_n) de variables aléatoires nulles implique la convergence en probabilité vers zéro (Considérer une fonction continue positive φ sur $\mathbb{R}$ nulle en 0 et égale à 1 à l'extérieur de $(-\epsilon, +\epsilon)$ on a $\mu[|X_n| \geq \epsilon] \leq \int \varphi(X_n) d\mu = \int [\varphi(X_n) d\mu - \varphi(0)]$, quantité qui tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$ par hypothèse).

2°) $B \iff C$ résulte immédiatement du théorème de continuité de Paul Levy pour les mesures bornées sur $\mathbb{R}$, la condition $\hat{\mu}_{\xi_n}(t) = \hat{\mu}(\xi_n t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ pour tout t étant équivalente à $\mu_{\xi_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{en loi}} 0$.

3°) $C \iff D$ est exprimé par le théorème 1.

4. Théorème de Bochner dans les espaces vectoriels.

Lemme 5.

Toute fonction de type positif Ψ sur E' dont la restriction à tout sous-espace de dimension finie de E' est continue est la transformée de Fourier d'une mesure cylindrique unique sur E .

Démonstration.

La restriction de Ψ à tout sous-espace de dimension finie F' est par hypothèse la transformée de Fourier d'une mesure $\mu_{F'}$ sur E/F'^0 . Soit $G' \supset F'$ et $\mu_{G'}$ la mesure sur E/G'^0 admettant pour transformée de Fourier la restriction $\mu_{G'}$ de Ψ à G' . Comme $\Psi_{F'} = \Psi_{G'} \circ i$, i désignant l'injection canonique de F' dans G' dont la transposée est précisément la projection canonique de E/G'^0 sur E/F'^0 , $\mu_{F'}$ est l'image de $\mu_{G'}$ par la projection canonique. Le système $(\mu_{F'})$ de mesures sur les E/F'^0 est donc un système projectif,

évidemment déterminé de façon unique par Ψ .

D'où le lemme.

Théorème 3.

Si $\mathcal{G}$ est un ensemble de parties convexes équilibrées de E , compactes pour une topologie T sur E compatible avec la dualité (E, E') , et si $E'_{\mathcal{G}}$ est nucléaire, toute fonction de type positif continue sur E' est la transformée de Fourier d'une mesure de Radon sur E_T .

Démonstration.

D'après le lemme 5; si Ψ est une fonction de type positif continue sur $E'_{\mathcal{G}}$ elle est la transformée de Fourier d'une mesure cylindrique sur E , et cette mesure est scalairement $\mathcal{G}$ -concentrée. D'après le théorème de Minlos (cf [1]) elle est $\mathcal{G}$ -concentrée (*). C'est donc une mesure de Radon pour toute topologie T sur E telle que les éléments de $\mathcal{G}$ soient compacts pour T .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. SCHWARTZ - Mesures de Radon dans les espaces topologiques
- [2] Gelfand Vilenkin - Generalized functions. Tome IV.

(*) i.e. pour tout $\epsilon > 0$ il existe $A \in \mathcal{G}$ telle que $\mu(E \setminus A) \leq \epsilon$.