PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MICHEL MÉTIVIER

# Transformées de Fourier des mesures cylindriques

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n° 9, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A9_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# TRANSFORMEES DE FOURIER DES MESURES CYLINDRIQUES

par

Michel METIVIER

Cet exposé est consacré à une présentation d'un chapitre du cours de 3e cycle de L. Schwartz 1964-1965 : Mesures de Radon sur des espaces topologiques arbitraires.

---

## 1. Définition de la transformée de Fourier.

E est un espace vectoriel localement convexe réel, E' son dual. Si $\mu$ est une mesure de Radon sur E, bornée, on peut définir la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de $\mu$ comme étant l'application de E' dans $\mathbb{C}$ suivante :

$$(1.1) \qquad \hat{\mu}(\xi) = \int e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \mu(dx).$$

Remarquons que si nous désignons par $\mu_\xi$ la mesure image de $\mu$ par $\xi$ la transofrmée de Fourier de $\mu_\xi$ est $\hat{\mu}_\xi(t)$ définie par

$$(1.2) \qquad \hat{\mu}_\xi(t) = \int e^{-2\pi i \langle x, t \rangle} \mu(dx).$$

D'où la relation

$$(1.3) \qquad \hat{\mu}(t\xi) = \hat{\mu}_\xi(t).$$

Nous voyons également que si nous désignons par $\mu_{\xi,\eta}$ la distribution conjointe des deux variables aléatoires $\xi$ et $\eta$ éléments de E', pour tout couple (u,v) de scalaires réels on a :

$$\hat{\mu}_{(\xi,\eta)}(u,v) = \int e^{-2\pi i \langle x, u\xi + v\eta \rangle} \mu(dx) \qquad \text{soit :}$$

(1.4) $\quad \hat{\mu}_{(\xi,\eta)}(u,v) = \hat{\mu}\langle u\xi+v\eta\rangle.$

Inversement, supposons que nous considérions une application linéaire de E' dans un espace de variables aléatoires : $\xi \longrightarrow L(\xi)$ (situation qui est équivalente à se donner une mesure cylindrique sur E pour la dualité (E,E')). Désignons par $\mu_\xi$ la loi de probabilité de $L(\xi)$, et par $\mu_{\xi\eta}$ la loi de probabilité de $(L(\xi),L(\eta))$. On a :

$$\hat{\mu}_\xi(t) = E(e^{-2i\pi L(t\xi)}) = E(e^{-2i\pi tL(\xi)}) = \hat{\mu}_{t\xi}(1).$$

Cette éqalité prouve que la famille $(\hat{\mu}_\xi)_{\xi\in E'}$, est entièrement déterminée par la seule application $\hat{\mu}$ de E' dans $\mathbb{C}$ définie par :

(1.5) $\quad \hat{\mu}(\xi) = \mu_\xi(1).$

Définition 1.

Si L est une fonctionnelle aléatoire linéaire sur E', ou si $\mu$ est la mesure cylindrique sur E associée, on appelle transformée de Fourier de L (ou de $\mu$) la fonction complexe $\hat{\mu}$ sur E' définie par (1.5).

Il résulte de (1.1) et (1.3) ci-dessus que

Proposition 1.

*Si la mesure cylindrique $\mu$ est prolongeable en une mesure de Radon notée également $\mu$, $\hat{\mu}(\xi)$ définie par (1.5) est la transformée de Fourier de $\mu$.*

Nous voyons également immédiatement que la formule (1.4) est valable pour la transformée de Fourier $\mu$ d'une mesure cylindrique $\hat{\mu}$, car :

$$\hat{\mu}_{(\xi,\eta)}(u,v) = E(e^{-2i\pi(uL(\xi)+vL(\eta)}) =$$

$$E(e^{-2i\pi L(u\xi+v\eta)}) = \hat{\mu}_{u\xi+v\eta}(1)$$

Remarque. Notons que $\mu_\xi(R)$ ne dépendant pas de $\xi$, en raison des relations de compatibilité, et désignons par $\|\mu\|$ cette quantité. On a $\hat{\mu}(0) = \|\mu\|$

2. Transformée de Fourier et propriétés de concentration.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.

*Soit* $\mathfrak{S}$ *un ensemble filtrant à droite pour* $\mathfrak{C}$ *de parties convexes équilibrées et bornées, stable par homothétie, les propriétés suivantes sont équivalentes pour une mesure cylindrique* $\mu$ *sur* E

*A* - $\mu$ *est stalairement* $\mathfrak{S}$*-concentré.* *

*B* - $\hat{\mu}$ *est continue à l'origine sur* $E'_{\mathfrak{S}}$

*C* - $\hat{\mu}$ *est uniformément continue sur* $E'_{\mathfrak{S}}$

Démonstration.

L'implication A $\Longrightarrow$ B est prouvée par le lemme 1 ci-dessous.

L'implication B $\Longrightarrow$ A est prouvée par le lemme 2 ci-dessous.

L'implication C $\Longrightarrow$ B est triviale.

L'implication B $\Longrightarrow$ C résulte immédiatement du lemme 4.

Nous prouvons donc successivement ces différents lemmes.

---

* $\mu$ est dite scalairement $\mathfrak{S}$-concentré si $\forall$ la forme linéaire $\xi$ sur E, et $\forall\ \varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathfrak{S}$ tel que, si $\xi(A)$ désigne l'image de A par $\xi$, $\mu_\xi(R \setminus \xi(A)) \leq \varepsilon$.

Lemme 1.

*Si* $\mu$ *est scalairement concentrée à* $\delta$ *près sur* A, *et si* N *désigne la jauge de* $A^\circ$, *on a :*

$$(2.1) \qquad |\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(\xi)| < 2\hat{\mu}(0)\,\pi N(\xi) + 2\delta$$

Démonstration.

L'hypothèse exprime que $\mu_\xi$ est concentrée à $\delta$ près sur $\xi(A) \subset [-N(\xi), N(\xi)]$. Comme $\hat{\mu}(\xi) = \hat{\mu}_\xi(1) = \int_R e^{-2i\pi u}\,\mu_\xi(du)$. On a :

$$|\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(\xi)| \leq \int_R |1 - e^{-2i\pi u}|\mu_\xi(du)$$

$$\leq \int_{[|u|\leq N(\xi)]} |2\pi u|\,\mu_\xi(du) + \int_{[|u|\geq N(\xi)]} |1-e^{-1i\pi u}|\,|\mu_\xi(du)$$

$$\leq \|\mu\|\,2\pi N(\xi) + 2\delta$$

Conséquence du lemme 1.

On a immédiatement : si $\mu$ est scalairement concentrée à $\delta$ près sur A, $\xi \in \delta \cdot A^\circ \implies |\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(\xi)| < 2(\mu(0)\pi + 1)\delta$.

D'où l'implication A $\implies$ B du théorème 1.

Lemme 2.

*Soit* $\nu$ *une mesure positive bornée sur* R *et* $\Psi(t)$ *sa transformée de Fourier. Si* $|\Psi(0) - \Psi(t)| \leq \delta^2$ *pour tout* $t \in [-\frac{1}{L}, +\frac{1}{L}]$, *alors* $\nu$ *est concentrée à* $(1 + \frac{2}{\pi})\delta$ *près sur* $]-\frac{L}{\delta}, +\frac{L}{\delta}[$.

Démonstration.

Comme $\frac{L}{\delta}\,e^{-\pi u^2 L^2/\delta^2}$ admet $e^{-\pi t^2\delta^2/L^2}$ comme transformée de Fourier, la formule suivante : $\int \hat{h}\,d\nu = \int h(u)\,\Psi(u)\,du$ valable pour toute fonction continue intégrable sur R donne :

$$\int_R e^{-\pi t^2\delta^2/L^2}\,\nu(dt) = \frac{L}{\delta}\int_R e^{-\pi u^2L^2/\delta^2}\,\Psi(u)\,du.$$

Comme $\Psi(0) = \int_R \nu(dt)$ et $1 = \frac{L}{\delta}\int_R e^{-\pi u^2L^2/\delta^2}\,du$ on a :

$$(2.2)\qquad \int_R (1 - e^{-\pi t^2\delta^2/L^2}) = \frac{L}{\delta}\int_R e^{-\pi u^2L^2/\delta^2}\,(\Psi(0) - \Psi(u))\,du$$

Minorons le 1er membre :

$$(2.3)\qquad (1 - e^{-\pi})\,\nu(\{|t| \geq \tfrac{L}{\delta}\}) \leq \int_{\{|t|\geq L/\delta\}} (1 - e^{-\pi t^2\delta^2/L^2})\,\nu(dt)$$

(2.2) et (2.3) entraînent alors :

$$(1 - e^{-\pi})\,\nu(\{|t| \geq \tfrac{L}{\delta}\}) \leq \frac{L}{\delta}\int_{\{|u|\leq 1/L\}} e^{-\pi u^2L^2/\delta^2}\,(\Psi(0) - \Psi(u))\,du +$$

$$+ \frac{L}{\delta}\int_{\{|u|\geq 1/L\}} e^{-\pi L^2u^2/\delta^2}\,|\Psi(0) - \Psi(u)|\,du$$

Soit

$$(1 - e^{-\pi})\,\nu(\{|t| \geq \tfrac{L}{\delta}\}) \leq \delta\, e^{-\pi/\delta^2} + \int_{\{|s|\geq 1/\delta\}} 2e^{-\pi s^2}\,ds$$

$$\leq \delta + 2\int_\delta^{+\infty} 2s\,\delta\, e^{-\pi s^2}\,ds = \delta(1 + \frac{2}{\pi}\,e^{-\pi/\delta^2})$$

$$\leq \delta(1 + \frac{2}{\pi})$$

Lemme 3.

*Soit* $\mu$ *une mesure cylindrique sur* E *et* $A \subset E$, A *convexe équilibré. Si* $|\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(\xi)| \leq \delta^2$ *pour tout* $\xi \in A^\circ$, *alors* $\mu$ *est scalairement concentrée à* $(1 + \frac{2}{\pi})\delta$ *près sur* $\frac{1}{\delta}$ .A.

Démonstration.

En vertu de l'identité

$$\hat{\mu}(u.\xi) = \hat{\mu}_\xi(u)$$

on a :

$$|\hat{\mu}_\xi(0) - \hat{\mu}_\xi(u)| \leq \delta^2 \quad \text{si} \quad u\xi \in A^\circ.$$

Or si N désigne la jauge de $A^\circ$ $u\xi \in A^\circ \iff |u| \leq \frac{1}{N(\xi)}$. D'après le lemme 2, $\mu_\xi$ est donc concentré à $(\frac{2}{\pi} + 1)\delta$ près sur $]-\frac{N(\xi)}{\delta}, \frac{N(\xi)}{\delta}[$.

Par définition, puisque A est dense dans $A^\circ$, pour tout $\xi$ :

$N(\xi) = \sup_{x \in A} |\langle x, \xi \rangle|$, d'où : $\frac{N(\xi)}{\delta} = \sup_{x \in A/\delta} |\langle x, \xi \rangle|$. Comme $\xi(A)$ est en outre un intervalle symétrique puisque A est équilibré on a :

$$\xi(\tfrac{1}{\delta} \cdot A) \supset ]-\tfrac{N(\xi)}{\delta}, \tfrac{N(\xi)}{\delta}[.$$

$\mu_\xi$ est donc concentré à $(1 + \frac{2}{\pi}/\delta$ près sur $\xi(\frac{1}{\delta} \cdot A)$.

Lemme 4.

*La transformée de Fourier d'une mesure cylindrique* $\mu$ *sur* E *vérifie l'inégalité :*

$\forall\, \xi_1, \xi_2 \in E'$ :

$$|\hat{\mu}(\xi_1) - \hat{\mu}(\xi_2)|^2 \leq 2\, \hat{\mu}(0)\, (\hat{\mu}(0) - \mathrm{Re}\, \hat{\mu}(\xi_1 - \xi_2))$$

Démonstration.

Supposons que h soit la transformée de Fourier d'une mesure $\nu$ sur $\mathbb{R}^n$,

$$|h(u) - h(v)|^2 = \left|\int (e^{iux} - e^{ivx})\, \nu(dx)\right|^2$$
$$= \left|\int e^{iux}\, (1 - e^{i(v-u)x})\, \nu(dx)\right|^2$$

en utilisant l'inégalité de Schwarz :

$$\leq \int |e^{iux}|^2\, \nu(dx) \cdot \int |1 - e^{i(v-u)x}|^2\, \nu(dx)$$
$$\leq \varphi(0) \cdot \int (2 - 2\,\mathrm{Re}\, e^{i(v-u)x})\, \nu(dx)$$
$$\leq 2\varphi(0) \cdot (\varphi(0) - 2\,\mathrm{Re}\, \varphi(v-u)).$$

Posons maintenant pour $t = (t_1, t_2)$ $h(t) = \hat{\mu}(t_1\, \xi_1 + t_2\, \xi_2)$. On a

$h(t) = \hat{\mu}_{(\xi_1,\xi_2)}(t_1,t_2)$. D'où en posant $u = (1,0)$ , $v = (0,1)$

$$h(u) - h(v) = \hat{\mu}(\xi_1) - \hat{\mu}(\xi_2) = 2\hat{\mu}_{(\xi_1,\xi_2)}(0)\,(\hat{\mu}_{(\xi_1,\xi_2)}(0) - \mathcal{R}e\ \hat{\mu}_{(\xi_1,\xi_2)}(u,v))$$

et comme

$$\hat{\mu}_{(\xi_1,\xi_2)}(0) = \|\mu_{\xi_1,\xi_2}\| = \|\mu\| = \hat{\mu}(0)$$

on a la formule voulue.

## 3. Propriétés de concentration et continuité des fonctionnelles linéaires aléatoires.

Théorème 2.

*Pour une fonctionnelle linéaire aléatoire* L *sur* E' *les propriétés suivantes A, B, C et D sont équivalentes. Si* $\mathfrak{S}$ *désigne un ensemble filtrant à droite pour* $\subset$ *de parties convexes équilibrées et bornées, stable par homothétie :*

*A* - L *est continue en probabilité sur* $E'_{\mathfrak{S}}$

*B* - L *est continue en loi sur* $E'_{\mathfrak{S}}$

*C* - *La fonction caractéristique de* L *est continue sur* $E'_{\mathfrak{S}}$

*D* - *La mesure cylindrique* $\mu$ *associée à* L *est scalairement* $\mathfrak{S}$*-concentrée.*

Démonstration.

1°) A $\Longleftrightarrow$ B.

A implique B trivialement. Réciproquement, en vertu de la linéarité de L, L est continue en probabilité sur $E'_{\mathfrak{S}}$ si et seulement si elle est continue en probabilité à l'origine, c'est-à-dire, si pour toute suite $(\xi_n)$ tendant vers 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$ , $L(\xi_n)$ converge vers 0 en probabilité. Or la

convergence en loi vers 0 d'une suite $(X_n)$ de variables aléatoires nulles implique la convergence en probabilité vers zéro (Considérer une fonction continue positive $\varphi$ sur $R$ nulle en 0 et égale à 1 à l'extérieur de $(-\varepsilon,+\varepsilon)$ on a $\mu\left[|X_n| \geq \varepsilon\right] \leq \int \varphi(X_n)\, d\mu = \int \left[\varphi(X_n)\, d\mu - \varphi(0)\right]$, quantité qui tend vers zéro lorsque $n \longrightarrow \infty$ par hypothèse).

2°) B $\Longleftrightarrow$ C résulte immédiatement du théorème de continuité de Paul Levy pour les mesures bornées sur $R$, la condition $\hat{\mu}_{\xi_n}(t) = \hat{\mu}(\xi_n t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout t étant équivalente à $\mu_{\xi_n} \xrightarrow[n \to \infty]{\text{en loi}} 0$.

3°) C $\Longleftrightarrow$ D est exprimé par le théorème 1.

4. Théorème de Bochner dans les espaces vectoriels.

Lemme 5.

*Toute fonction de type positif $\Psi$ sur $E'$ dont la restriction à tout sous-espace de dimension finie de $E'$ est continue est la transformée de Fourier d'une mesure cylindrique unique sur $E$.*

Démonstration.

La restriction de $\Psi$ à tout sous-espace de dimension finie F' est par hypothèse la transformée de Fourier d'une mesure $\mu_F$, sur $E/F'^{\circ}$. Soit $G' \supset F'$ et $\mu_G$, la mesure sur $E/G'^{\circ}$ admettant pour transformée de Fourier la restriction $\mu_G$, de $\Psi$ à G'. Comme $\Psi_{F'} = \Psi_{G'} \circ i$, i désignant l'injection canonique de F' dans G' dont la transposée est précisément la projection canonique de $E/G'^{\circ}$ sur $E/F'0$, $\mu_F$, est l'image de $\mu_G$, par la projection canonique. Le système $(\mu_F,)$ de mesures sur les $E/F'^{\circ}$ est donc un système projectif,

évidemment déterminé de façon unique par $\Psi$.

D'où le lemme.

Théorème 3.

*Si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties convexes équilibrées de E, compactes pour une topologie T sur E compatible avec la dualité $(E,E')$, et si $E'_{\mathfrak{S}}$ est nucléaire, toute fonction de type positif continue sur E' est la transformée de Fourier d'une mesure de Radon sur $E_T$.*

Démonstration.

D'après le lemme 5; si $\Psi$ est une fonction de type positif continue sur $E'_{\mathfrak{S}}$ elle est la transformée de Fourier d'une mesure cylindrique sur E, et cette mesure est scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée. D'après le théorème de Minlos (cf |1|) elle est $\mathfrak{S}$-concentrée (*). C'est donc une mesure de Radon pour toute topologie T sur E telle que les éléments de $\mathfrak{S}$ soient compacts pour T.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. SCHWARTZ - Mesures de Radon dans les espaces topologiques

[2] Gelfand Vilenkin - Generalized functions. Tome IV.

---

(*) i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in \mathfrak{S}$ telle que $\mu(E \setminus A) \leq \varepsilon$.