

MÉTIVIER

Probabilités conditionnelles régulières

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1964-1965
« Séminaire d'initiation aux probabilités », , exp. n° 2, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A2_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBABILITES CONDITIONNELLES REGULIERES

I - Espérance conditionnelle - Notations.

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(X, \mathcal{B})$ deux espaces probabilisables, $\mathcal{Y}$ une application mesurable de Ω sur X , P une probabilité sur $\mathcal{F}$ et ν la probabilité image de P par $\mathcal{Y}$.

Nous noterons $\mathcal{L}_+^\circ(\Omega, \mathcal{F})$ le cône positif des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, par $L_+^\circ(P)$ le cône quotient de $\mathcal{L}_+^\circ(\Omega, \mathcal{F})$ constitué par les classes de fonctions P -équivalentes.

On définit de même $\mathcal{L}_+^\circ(X, \mathcal{B})$ et $L_+^\circ(\nu)$.

Nous rappelons que l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{Y}$ (ou à $\mathcal{B}$) d'une fonction $f \in \mathcal{L}_+^\circ(\Omega, \mathcal{F})$ est l'élément de $L_+^\circ(\nu)$, noté $E^{\mathcal{Y}} f$ ou $E^{\mathcal{B}} f$, tel que :

$$\text{Pour tout } B \in \mathcal{B} \quad \int_{\mathcal{Y}^{-1}(B)} f \, dP = \int_B E^{\mathcal{B}} f \, d\nu$$

L'application $f \mapsto E^{\mathcal{B}} f$ possède les propriétés suivantes, analogues à celles d'une intégrale sur $\mathcal{L}_+^\circ(\Omega, \mathcal{F})$:

1° - Il s'agit d'une application linéaire croissante du cône $\mathcal{L}_+^\circ(\Omega, \mathcal{F})$ dans le cône $L_+^\circ(\nu)$

2° - Pour toute suite croissante (f_n) extraite de $\mathcal{L}_+^\circ(\Omega, \mathcal{F})$, convergeant simplement vers f , la suite $(E^{\mathcal{B}} f_n)$ converge presque sûrement vers $E^{\mathcal{B}} f$.

2 - Problèmes

Choisissons dans chaque classe $E^{\mathcal{B}} f$ un élément que nous noterons encore $E^{\mathcal{B}} f$ par commodité. Les propriétés 1° et 2° ci-dessus donnent :

(1') a) Pour $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$:

$$E^{\mathcal{B}}(\alpha_1 f_1)(x) + E^{\mathcal{B}}(\alpha_2 f_2)(x) = E^{\mathcal{B}}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) \quad \gamma - p - s.$$

$$b) f_1 \leq f_2 \Rightarrow E^{\mathcal{B}} f_1(x) \leq E^{\mathcal{B}} f_2(x) \quad \gamma - p - s.$$

(2') Pour toute suite croissante (f_n) extraite de $\mathcal{L}_+^0(\Omega, \mathcal{F})$; convergeant presque sûrement vers f on a :

$$\lim_n E^{\mathcal{B}} f_n(x) = E^{\mathcal{B}} f(x) \quad \gamma - p - s.$$

Le problème qui se pose alors est le suivant ; peut-on choisir dans chaque classe $E^{\mathcal{B}} f$ un représentant tel que les relations (1') et (2') puissent être vraies pour tout x ?

S'il en est ainsi en posant $P(x, F) = E^{\mathcal{B}} 1_F$ on obtient pour chaque x une mesure $F \mapsto P(x, F)$, notée $P(x, \cdot)$ telle que l'espérance conditionnelle $E^{\mathcal{B}} f(x)$ soit une espérance au sens ordinaire ;

(2 - 1)

$$E^{\mathcal{B}} f(x) = \int f(y) P(x, dy)$$

On déduit d'ailleurs des propriétés 1° et 2° ci-dessus et des propriétés de l'intégrale que, si l'on a pu choisir dans chaque classe $E^{\mathcal{B}} 1_F$ un représentant $P(\cdot, F)$ tel que $P(x, \cdot)$ soit pour chaque x une probabilité sur $\mathcal{F}$, la fonction de x définie par le second membre de (2 - 1) est un élément de la classe $E^{\mathcal{B}} f$.

Le problème posé est donc le suivant : est-il possible de trouver une fonction P , définie sur $X \times \mathcal{F}$, telle que :

$$(P.C.R_1) \quad \text{Pour tout } F \in \mathcal{F} \quad P(\cdot, F) \in E^{\mathcal{B}} 1_F$$

$$(P.C.R_2) \quad \text{Pour tout } x \in X \quad P(x, \cdot) \text{ est une mesure sur } \mathcal{F}?$$

Comme $E^{\mathcal{B}} 1_{\Omega} = 1_X$ ν -p.s., on voit que $P(x, \cdot)$ a ν -presque sûrement pour norme 1. En remplaçant $P(x, \cdot)$ par la mesure nulle sur un ensemble de mesure ν -nulle, on voit qu'on peut s'imposer, sans se restreindre, de supposer que les mesures $P(x, \cdot)$ sont des probabilités ou sont nulles.

La fonction $P(\cdot, \cdot)$ lorsqu'elle existe est appelée une probabilité conditionnelle régulière.

On sait qu'une telle probabilité conditionnelle régulière n'existe pas toujours. cf. [1] et [3]

La suite de cet exposé est consacrée à donner deux cas importants d'existence.

3 - Définitions et lemmes relatifs aux Classes compactes et aux mesures.

3 - 1 - Classe compacte. (cf. [9])

Un ensemble $\mathcal{C}$ de parties d'un ensemble E est appelé classe compacte s'il possède la propriété :

Pour toute suite (C_n) extraite de $\mathcal{C}$ l'implication suivante est vraie :

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset \right) \implies \left((\exists N) \bigcap_{n=1}^N C_n = \emptyset \right).$$

3 - 2 - Définition.

Soit $\mathcal{A}$ un anneau booléen de parties de E , et soit $\mathcal{C}$ une classe compacte avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, et soit $\mathcal{A}'$ un anneau booléen avec $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Une fonction réelle positive α , définie sur $\mathcal{A}$ est dite régulière sur $\mathcal{A}'$ relativement à $\mathcal{C}$, si pour tout $A' \in \mathcal{A}'$ on a $\alpha(A') = \sup \{ \alpha(C) : C \in \mathcal{C}, C \subset A' \}$.

3 - 3 - Lemme 1.

Si α est une fonction additive réelle positive définie sur $\mathcal{A}$ et régulière sur $\mathcal{A}'$ relativement à la classe compacte $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, alors α est σ -additive sur $\mathcal{A}'$.

3 - 4 - Lemme 2. (cf. [11] p. 228 et 229)

Soient T un espace topologique séparé, $\mathcal{C}$ la tribu de ses Boréliens, $\mathcal{K}$ l'ensemble de ses compacts. Soit λ une application de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}^+$, possédant les propriétés :

a) λ est croissante

b) Pour tout couple $(K_1, K_2) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ on a :

$$\lambda(K_1 \cup K_2) \leq \lambda(K_1) + \lambda(K_2)$$

c) Pour tout couple $(K_1, K_2) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ tel que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ on a

$$\lambda(K_1 \cup K_2) = \lambda(K_1) + \lambda(K_2)$$

Alors il existe sur $\mathcal{C}$ une mesure μ telle que :

(3 - 4 - 1) Pour tout ouvert O :

$$\mu(O) = \sup \{ \lambda(K) : K \in \mathcal{K}, K \subset O \} = \sup \{ \mu(K) : K \in \mathcal{K}, K \subset O \}$$

(3 - 4 - 2) Pour tout Borélien $M \in \mathcal{C}$:

$$\mu(M) = \inf \{ \mu(O) : O \text{ ouvert, } O \supset M \}.$$

4 - Théorèmes de relèvement -

4 - 1 - Théorème 1 -

Supposons que la tribu $\mathcal{F}$ sur Ω admette un système dénombrable $\mathcal{G}$ de générateurs et qu'il existe une classe compacte $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ telle que pour tout $F \in \mathcal{F}$, $P(F) = \sup \{ P(C) : C \in \mathcal{C}, C \subset F \}$.

Soit $F \rightsquigarrow \tilde{h}_F$ une application croissante additive de $\mathcal{F}$ dans $L^1_+(X, \mathcal{B}, \nu)$, telle que $\lim_n P(F \setminus F \cap F_n) = 0 \Rightarrow \lim_n \tilde{h}_{F \cap F_n} = \tilde{h}_F$ (dans L^1).

Alors il existe une application $h : x \rightsquigarrow h(x, \cdot)$ de X dans le cône $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{F})$ des mesures positives sur $\mathcal{F}$ telle que pour tout x , $h(x, \cdot)$ soit régulière relativement à $\mathcal{C}$, et telle en outre que pour tout $F \in \mathcal{F}$ on ait $h(\cdot, F) \in \tilde{h}_F$.

Démonstration -

Désignons par $\mathcal{D}$ l'algèbre booléenne engendrée par $\mathcal{G}$ sur Ω . Comme $\mathcal{D}$ est dénombrable, posons $\mathcal{D} = \{ D_n : n \in \mathbb{N} \}$. Pour chaque n , soit $(C_n^i)_i$ une suite extraite de $\mathcal{C}$ telle que $P(D_n) = \sup_i P(C_n^i)$. Désignons par $\mathcal{D}$ l'algèbre booléenne engendrée par $\mathcal{G}$ et par $\{C_n^i\}_{n,i}$, et choisissons un représentant h de chaque classe h_D , $D \in \mathcal{D}$. Pour tout couple (D_1, D_2) tel que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ on a $h_{D_1}(x) + h_{D_2}(x) = h_{D_1 \cup D_2}(x) \quad \forall x \in X$. L'ensemble des couples (D_1, D_2) étant dénombrable, il existe un ensemble N de mesure $\nu(N) = 0$ tel que pour tout $x \in X \setminus N$ et tout couple $(D_1, D_2) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ avec $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ on ait :

$$h_{D_1}(x) + h_{D_2}(x) = h_{D_1 \cup D_2}(x).$$

Le fait que $P(D_n) = P(\bigcup_i C_n^i)$ entraîne, un vertu des hypothèses du lemme, que $\lim_i \tilde{h}_{C_n^i} = \tilde{h}_{D_n}$.

On a donc :

$$\lim_i h_{C_n^i}(x) = h_{D_n}(x) \quad \forall - p - p.$$

Il existe donc un ensemble ν -négligeable M tel que :

$$x \notin M \Rightarrow \lim_i h_{C_n^i}(x) = h_{D_n}(x) \text{ pour tout } n.$$

pour tout $x \in X \setminus (M \cup N)$ l'application $D \rightsquigarrow h_D(x)$ est donc une fonction réelle simplement additive sur $\mathcal{D}$, et régulière relativement à la classe compacte $\{C_n^i\}_{n,i}$ sur $\mathcal{D}'$. La restriction de $D \rightsquigarrow h_D(x)$ à $\mathcal{D}'$ est donc σ -additive d'après le lemme 1. Elle admet donc un prolongement en une mesure sur $\mathcal{F}$. Pour tout $x \in X \setminus M \cup N$ nous désignons par $h(x, \cdot)$ la mesure précédente. Enfin pour $x \in M \cup N$ nous pouvons prendre la mesure $h(x, \cdot) = P$.

Pour tout $D \in \mathcal{D}'$ la fonction $x \rightsquigarrow h(x, D)$ est un élément de $\tilde{h}_D$, $\mathcal{B}$ -mesurable. Si nous désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des $F \in \mathcal{F}$ tels que $x \rightsquigarrow h(x, F)$ soit un élément de $\tilde{h}_F$, $\mathcal{B}$ -mesurable, nous voyons immédiatement que $\mathcal{M}$ est une classe monotone (également un λ -système) contenant $\mathcal{D}'$, donc contenant $\mathcal{F}$. D'où $h(\cdot, F) \in \tilde{h}_F$ pour tout $F \in \mathcal{F}$.

Enfin, le fait que pour tout x la mesure $h(x, \cdot)$ soit régulière relativement à $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{D}'$ engendrant $\mathcal{F}$, entraîne, comme il est bien connu (voir [9]) que $h(x, \cdot)$ est régulière par rapport à $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{F}$.

4 - 2 - Théorème 2.

Soient Ω un espace topologique séparé, $\mathcal{F}$ la tribu de ses Boréliens et $\mathcal{K}$ l'ensemble de ses compacts. Soit $(T, \mathcal{G}, \nu)$ un espace probabilisé, tel que la tribu $\mathcal{G}$ admette un système dénombrable $\mathcal{G}$ de générateurs. Soit $\hat{\nu}$ la mesure complétée de ν sur la tribu $\mathcal{G}^\nu$.

Soit $F \rightsquigarrow \tilde{h}_F$ une application croissante σ -additive de $\mathcal{F}$ dans $L^1_+(T, \mathcal{C}, \nu) = L^1_+(T, \mathcal{C}', \hat{\nu})$, et régulière relativement à $\mathcal{K}$.

Alors il existe une application $h : t \rightsquigarrow h(t, \cdot)$ de T dans le cône positif $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{F})$ des mesures sur $\mathcal{F}$, telle que pour tout t , $h(t, \cdot)$ soit régulière relativement à la famille des compacts, et telle que pour tout $F \in \mathcal{F}$ $h(\cdot, F) \in \mathcal{L}^1(T, \mathcal{C}', \hat{\nu})$ avec $h(\cdot, F) \in \tilde{h}_F$.

Démonstration.

1° - Définition $h(t, \cdot)$ additive sur $\mathcal{F}$ pour tout x

Considérons l'anneau $\mathcal{A}$ d'unité T engendrée par $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions finies de T , formées d'éléments de $\mathcal{A}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est filtrant à droite pour la relation d'ordre définie par $(\mathcal{P}' \ll \mathcal{P}'') \iff$ tout élément de $\mathcal{P}'$ est réunion d'éléments de $\mathcal{P}''$. Comme $\mathcal{P}$ est dénombrable on peut extraire une suite $(\mathcal{P}_n)$ cofinale à $\mathcal{P}$. Comme tout élément de $\mathcal{A}$ appartient à une partition $\mathcal{P} \in \mathcal{P}$, il est réunion finie d'éléments d'une partition $\mathcal{P}_n$. D'où $\bigcup_n \mathcal{P}_n$ engendre la tribu $\mathcal{C}$.

Pour tout n et tout $F \in \mathcal{F}$, posons

$$D_n \tilde{h}_F = \sum_{A \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{\nu(A)} \int_A \tilde{h}_F d\nu \cdot 1_A$$

Avec la convention $\frac{1}{\nu(V)} \int_V \tilde{h}_F d\nu = 0$ si $\nu(V) = 0$

Il résulte d'un théorème classique de dérivation (voir [12] p 155 ou [2] p 345) que la suite $D_n \tilde{h}_F$ converge ν -presque partout vers un représentant quelconque de $\tilde{h}_F$.

Considérons alors un ultra-filtre $\mathcal{U}(n)$ sur $\mathbb{N}$ plus fin que le filtre de Fréchet ; pour tout t $\lim_{\mathcal{U}(n)} D_n \tilde{h}_F(t)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ avec :

$$\lim_{\mathcal{U}(n)} D_n \tilde{h}_F(t) = \lim_n D_n \tilde{h}_F(t) \text{ lorsque cette}$$

deuxième limite existe.

Posons alors :

$$(4 - 2 - 1) \quad h_F(t) = \lim_{16(n)} D_n \tilde{h}_F(t)$$

Pour ν -presque tout t on a :

$$h_F(t) = \lim_n D_n \tilde{h}_F(t)$$

d'où :

$$(4 - 2 - 2) \quad h_F \in \tilde{h}_F$$

L'égalité $h_{\Omega} \in \tilde{h}_{\Omega} \in L^1(T, \mathcal{C}, \nu)$ implique que $\nu\{t : h_{\Omega}(t) = +\infty\} = 0$.

Soit $N = \{t : h_{\Omega}(t) = +\infty\}$

Posons alors :

$$(4 - 2 - 3) \quad \begin{cases} k(t, F) = h_F(t) & \text{si } t \notin N \\ k(t, F) = 0 & \text{si } t \in N \end{cases}$$

L'additivité de chaque $k(t, \cdot)$ résulte immédiatement de la formule (4 - 2 - 1) et de l'additivité des applications $F \rightsquigarrow D_n \tilde{h}_F(t)$ facilement vérifiable.

2° - Définition de $h(t, F)$

Considérons la restriction $K \rightsquigarrow k(t, K)$ de $k(t, \cdot)$ à $\mathcal{K}$ pour tout t ; Nous désignerons par $h(t, \cdot)$ la mesure sur $\mathcal{F}$ engendrée par $k(t, \cdot)$ au sens du lemme 2. Nous avons seulement à montrer que pour tout $F \in \mathcal{F}$ on a $h(\cdot, F) \in \tilde{h}_F$.

Pour tout ouvert O on a (voir le lemme 2) :

$$(4 - 2 - 4) \quad h(t, O) = \sup\{k(t, K) ; K \in \mathcal{K}, K \subset O\} \leq k(t, O)$$

En vertu de la régularité relativement à $\mathcal{K}$ de $F \rightsquigarrow \tilde{h}_F$, il existe une suite (K_n) croissante de compacts inclus dans O telle que :

$$\lim_n \int |h_O - h_{K_n}| d\nu = 0$$

D'où en vertu de (4 - 2 - 2) :

$$\lim_n \int |k(\cdot, 0) - k(\cdot, K_n)| \, d\nu = 0$$

D'où pour ν -presque tout t :

$$h(t, 0) \geq \lim_n k(t, K_n) = k(t, 0) \geq h(t, 0)$$

Soit :

$$h(t, 0) = k(t, 0) \text{ pour } \nu \text{ presque tout } t.$$

La relation : $h(\cdot, F) \in \tilde{h}_F$ est donc vraie pour tout F ouvert.

Il est évident, en raison de la σ -additivité de $F \rightsquigarrow \tilde{h}_F$ et de $F \rightsquigarrow h(t, F)$ pour tout t , que l'ensemble $\mathcal{M}$ des $F \in \mathcal{F}$ pour lequel la relation $h(\cdot, F) \in \tilde{h}_F$ est un λ système. Ce λ système contenant le π -système des ouverts qui engendre la tribu $\mathcal{F}$, $\mathcal{M} = \mathcal{F}$. D'où le théorème.

5 - Les théorèmes d'existence de probabilités conditionnelles régulières.

5 - 1 - Théorème 1.

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, $\mathcal{F}$ admettant un système dénombrable de générateurs. Soit P une probabilité sur $\mathcal{F}$, régulière relativement à une classe compacte $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.

Pour tout espace probabilisable $(X, \mathcal{B})$ et toute application mesurable $\mathcal{Y}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(X, \mathcal{B})$ il existe une probabilité conditionnelle régulière sur $\mathcal{F}$, relativement à T .

DEMONSTRATION.

Soit $\nu = T(P)$. L'application $F \rightsquigarrow E^{\mathcal{B}} 1_F$ vérifie les hypothèses du théorème 1 comme on s'en assure facilement. La fonction $h(\cdot, \cdot)$ du théorème 1, fournit donc une version de la probabilité régulière cherchée

5 - 2 - Théorème 2. (Jirina).

Soient Ω un espace topologique séparé, $\mathcal{F}$ la tribu de ses Boréliens $\mathcal{K}$ l'ensemble de ses compacts, et soit P une probabilité sur $\mathcal{F}$, régulière relativement à $\mathcal{K}$.

Soit $(T, \mathcal{C})$ un espace probabilisé, tel que la tribu $\mathcal{C}$ admette un système dénombrable de générateurs et soit ν une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(T, \mathcal{C})$. Alors il existe une version $\mathcal{C}^\nu$ mesurable régulière de la probabilité conditionnelle P^ν .

DEMONSTRATION.

Soit $\nu = T(P)$. L'application $F \mapsto E^{\mathcal{C}} 1_F$ vérifie les hypothèses du théorème 2, comme on s'en assure facilement à partir de la relation :

$$(\forall F) \quad (F \in \mathcal{F}) \quad P(F) = \int E^{\mathcal{C}} 1_F \, d\nu.$$

- BIBLIOGRAPHIE -

- 1 DIEUDONNE. J. sur le Théorème de Lebesgue Nikodym; Ann. de l'Université de Grenoble. t. XXIII 1947 - 1948 - p. 25-53.
- 2 DOOB. J. L. Stochastic processes - New-York. 1950.
- 3 HALMOS. P. R. Measure Theory. New-York. 1950.
- 4 " The decomposition of Measures - Duke Math. J. juin 1941.
p. 386-392.
- 5 " On a theorem of Dieudonné - Proc. Nat. Acad. Sc.
p. 38-42.
- 6 IONESCU-TULCEA - A et C. On the lifting property - Bull. Amer. Math. Soc. Janvier 64.
- 7 JIRINA. M. On regular conditional probabilities. Czech. Math. J.
t. 9 (84). N 3 . p 445-452 -
- 8 MAHARAM. D. Decomposition of measure algebras and spaces. Trans. Am. Math. Soc. Vol. 69 (1950) p. 142-160.
- 9 MARCZEWSKI. E. On compact measures. Fund Math. 40 (1953) p. 113-124.
- 10 METIVIER M. Sur la désintégration des mesures. C.R. Acad. Sc. Paris T. 254 (1962) p. 207-209
- 11 METIVIER M. Limites projectives de mesures - Annali. di. Mat. Pura ed. Ap. (IV). Vol. LXIII (1963) p. 225-352.
- 12 SAKS. S. Theory of the integral - NEW-YORK.
-