P. DAZORD

Erratum fascicule 3/B - année 1983 - Séminaire de Géométrie

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1984, fascicule 3B
« Séminaire de géométrie », , p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1984___3B_A7_0>

ERRATUM

Fascicule 3/B - année 1983 - Séminaire de Géométrie

****

Feuilletages et Mécanique hamiltonienne

par P. DAZORD

Dans les théorème 3.1 et 3.2 (Théorème des variables actions angles) on ne peut assurer que le symplectomorphisme construit est réduit à l'identité sur la feuille F (resp. T^k) du feuilletage coïsotrope $\mathscr{V}$ (resp. lagrangien $\mathscr{L}$) de (M,σ) resp. $(T^*T_k, d\lambda)$. En effet la structure affine de T^k déduite de $\mathscr{L}$ dans T^*T^k dépend du jet du 1° ordre du feuilletage. Concrètement le feuilletage étant sans holonomie la structure affine s'obtient par transport parallèle à partir de la connexion plate canonique de T^k déduite de la connexion de Bott de $\mathscr{L}$. Deux fuilletages lagrangiens de T^*T^k ayant T^k comme feuille définiront donc la même structure affine de T^k si et seulement si leurs jets du 1° ordre le long de T^k coïncident.

Les théorèmes 3.1 et 3.2 sont exacts si l'on supprime dans le théorème 3.1 "induisant l'identité sur F " et dans le théorème 3.2 "dont la restriction à T^k est l'identité ". Dans la démonstration du théorème 3.2 on supprimera la partie du texte "Par construction .... démonstration".

Enfin on donne ci-dessous une version améliorée de la démonstration du théorème 3.1.

DEMONSTRATION DU THEOREME 3.2. p. 19.

F étant compacte sans holonomie il existe un voisinage U saturé de F trivialement fibré sur un ouvert U_o de $\mathbb{R}^{2n-k}$ où $\dim F = k$, à fibres les feuilles de $\mathscr{F}$. U_o est canoniquement munie d'une structure de Poisson régulière et donc difféomorphe comme variété de Poisson au produit d'un ouvert de $\mathbb{R}^{2n-2k}$, W muni de la structure symplectique canonique par un voisinage ouvert A de O dans $\mathbb{R}^k$ muni de la structure triviale.

On note $(w^{\alpha},w^{\alpha*})$ les coordonnées de $\mathbb{R}^{2n-2k}$, f la projection de U sur U_o identifié à $A \times W$, (f_1,f_2) les composantes de f. $\frac{\partial}{\partial w^{\alpha}}$ (resp. $\frac{\partial}{\partial w^{\alpha*}}$) est le champ de hamiltonien $w^{\alpha*}$ (resp. w^{α}). Soit y_{α} (resp. $y_{\alpha*}$) le hamiltonien de $f^*w^{\alpha*}$ (resp. f^*w^{α}). Comme f est un morphisme de Poisson $[f^*w^{\alpha*}, f^*p^{i}] = o$ où p_i désigne les coordonnées canoniques dans $A \subset \mathbb{R}^k$. Ceci entraine que $[Y_{\alpha},X_i] = 0 = [Y_{\alpha*},Y_i]$ où X_i est le hamiltonien de f^*p_i. Il en résulte que les champs $Y_{\alpha},Y_{\alpha*}$ sont des automorphismes infinitésimaux de $\mathscr{F}$. Soit $\varphi^{\alpha}_{w^{\alpha}}$(resp. $\varphi^{\alpha*}_{w^{\alpha*}}$) le flot de Y^{α} (resp. $Y^{\alpha*}$). Pour tout $y \in f_2^{-1}(0)$ on pose $\rho(y,w) = \varphi^{n-k*}_{w^{n-k*}} \circ \dots \circ \varphi^{1*}_{w^{1*}} \circ \varphi^{n-k}_{w^k} \circ \dots \circ \varphi^{1}_{w}(y)$ ce qui a un sens F étant compacte si U est assez petit , $f_2^{-1}(o)$ est une sous-variété symplectique de (M,σ). Les champs $(Y_{\alpha},Y_{\alpha*})$ sont transverses à $f_2^{-1}(o)$, Comme $d\rho$ est de rang maximum sur $f_2^{-1}(o)$, on peut assurer en restreignant au besoin U que ρ est un difféomorphisme de $f_2^{-1}(o) \times W$ sur U . Comme f est un morphisme de Poisson, $f^{-1}Y = \frac{\partial}{\partial w_{\alpha}}$, $f^{-1}Y_{*} = \frac{\partial}{\partial w_{\alpha*}}$ ce qui entraîne que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
f_2^{-1}(o) \times W \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr] & & U \arrow[dl, "f_2"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

$\Phi_W = y \longrightarrow \rho(y,w)$ est donc un symplectoisomorphisme de $f_2^{-1}(o)$ sur $f_2^{-1}(w)$ qui envoie $\mathscr{F}\big|_{f_2^{-1}(o)}$ sur $\mathscr{F}\big|_{f_2^{-1}(w)}$ car Φ_w est composé d'automorphisme de $\mathscr{F}$. Donc $\rho^{-1}\mathscr{F} = (\mathscr{L} \times w)$ où $\mathscr{L} = \mathscr{F}\big|_{f_2^{-1}(o)}$ est un feuilletage lagrangien de $f_2^{-1}(o)$ ayant F comme feuille compacte sans holonomie. Soit $\tilde{\rho}_1$ le difféomorphisme de T^*T^k sur $f_2^{-1}(o)$ transformant en $\mathscr{L}$ un feuilletage constant et ρ_1 le diffeomorphisme produit par l'identité de W de $T^*T^k \times W$ sur $f_2^{-1}(o) \times W$. Soit $\rho_2 = \rho\circ\rho_1$. $\rho_2^*\sigma$ est une 2-forme symplectique qui induit sur $T^*T^k \times w$ la 2-forme canonique de $T^*T^k dp_i \wedge dq^i$. D'autre part si $dp_i = 0$ $u=1,\dots,k$, $\rho_2^*\sigma$ induit sur $F \times (p_i) \times W$ feuille de $\rho_2^{-1}\mathscr{V}$ une 2-forme symplectique réductible à $d\omega^{\alpha*} \wedge d\omega^{\alpha}$. Donc

$$\rho_2^*\sigma = dp_i \wedge dq^i + u^i_{\bar\alpha}\, dp_i \wedge d\omega^{\bar\alpha} + d\omega^{\alpha^*} \wedge d\omega^{\alpha}$$

où $\bar\alpha$ prend des valeurs entre 1 et 2(n-k).

On peut donc écrire

$$\rho_2^* \sigma = dp_i \wedge d(q^i + u^i_\alpha W^{\bar{\alpha}}) .$$

Soit $\rho_3 : T^*T^k \times W \longrightarrow T^*T^k \times W$ définie par

$\rho_3(q^i, p_i, w^{\bar{\alpha}}) = (q^i + u^i_\alpha w^{\bar{\alpha}}, p_i, w^{\bar{\alpha}}) = (Q^i, p_i, w^{\bar{\alpha}})$

$(\rho_2 \circ \rho_3)^* \sigma = dp_i \wedge dQ^i + dW^{\alpha^*} \wedge dW^\alpha$.

si on pose $\bar{\psi}^1 = \rho \circ \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$ ψ est un symplectoisomorphisme sur $(T^*T^k \times W,)$ muni de la structure symplectique produit de (U, σ) qui transforme $\mathscr{V}$ en $(T^k \times p \times W)_p$ et $\mathscr{F}$ en le feuilletage $(T^k \times p \times w)_{(p,w)}$.

C.Q.F.D.

****