GÉRARD GRANGIER

4 Recherche d'orbites périodiques d'un champ hamiltonien associé à une structure symplectique non standard

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1984, fascicule 3B
« Séminaire de géométrie », , p. 65-78
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1984___3B_A6_0>

4

RECHERCHE D'ORBITES PERIODIQUES D'UN CHAMP HAMILTONIEN ASSOCIE A UNE STRUCTURE SYMPLECTIQUE NON STANDARD

par Gérard GRANGIER

Résumé.

Le problème de l'existence, sur une variété compacte M, des orbites périodiques d'un champ associé à un hamiltonien H, somme d'une énergie cinétique, d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur, au moyen d'une structure symplectique, non canonique, sur le fibré cotangent T^*M est ramené à un problème variationnel global sur M à l'aide de la transformation de Legendre et d'un relèvement approprié. Cette démarche précise celle imaginée par Novikov et Shmelster pour la loi de Kirchoff dans [5] . Elle peut aussi avoir pour application l'étude du mouvement d'un système de particules dans un champ gravitationnel et dans un champ electromagnétique [11] .

— Soit M une variété compacte connexe, de dimension n, de classe $\mathscr{C}^k (k \geqslant 6)$ possédant la propriété suivante :

. Pour tout lacet $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$ continu de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux il existe un ouvert $\mathscr{U}$, domaine de carte tel que

$$\Pi^1(\mathscr{U}) = \Pi^2(\mathscr{U}) = \{o\} \text{ et } \gamma(\mathbb{S}^1) \subset \mathscr{U} .$$

Ces conditions sont en particuliers vérifiées dans le cas où $M = \mathbb{S}^n$.

. Le fibré cotangent $\pi : T^*M \to M$ est supposé muni d'une structure symplectique définie au moyen de la 2 forme :

$$\Omega = -d\Lambda + \pi^*\Omega_0 \qquad (1)$$

où Λ est la forme de Liouville et Ω_0 une 2 forme fermée sur M.

. De plus sur T^*M est défini un hamiltonien H par :

$$H(X) = \frac{1}{2} g_x^{\#}(X,X) + V(x) + A(x)X \quad \text{pour} \quad X \in T_x^*M \qquad (2)$$

où $g^{\#}$ est une métrique riemannienne de classe $\mathscr{C}^k$

V une fonction numérique sur M dit potentiel scalaire,

A une section du fibré $T^{**}M \to M$ dit potentiel vecteur (pour chaque $x \in M$, $A(x)$ est donc une forme linéaire sur T_x^*M)

Ω_0, A et V sont supposés au moins de classe $\mathscr{C}^4$.

. Si $(\mathscr{U}_\alpha,\varphi)$ est une carte de M, on note $q = (q^1 \ldots q^n)$ les coordonnées locales correspondantes de M, (q,p) avec $p = (p_1, p_2 \ldots p_n)$ les coordonnées locales de T^*M sur $\pi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$ naturellement déduite de q, $(q,\dot q)$ avec $\dot q = (\dot q^1,\ldots,\dot q^n)$ les coordonnées locales de TM sur $\varpi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$ naturellement déduite de q., $\varpi : TM \to M$ désignant le fibré tangent de M.

. Si $\mathscr{U}_\alpha$ est un ouvert de M vérifiant $\Pi^1(\mathscr{U}_\alpha) = \Pi^2(\mathscr{U}_\alpha) = \{o\}$ il existe donc une 1-forme ω_α sur $\pi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$ telle que

$$\Omega_{|\pi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)} = d\omega_\alpha \qquad (3)$$

. On a les écritures locales

$$\omega_\alpha = p_i dq^i + f_i^{(\alpha)}(q) dq^i \qquad (1')$$

$$H = \frac{1}{2} g^{ij}(q) p_i p_j + A^i(q) p_i + V(q) \qquad (2').$$

Les conventions usuelles de sommation tensorielle seront systématiquement utilisées dans les calculs locaux.

1. La transformation de Legendre.

Soit X_H (resp. $\mathring{X}_H$) le champ hamiltonien de H dans la structure symplectique Ω (resp. $-d\Lambda$), c'est-à-dire le champ défini pour tout champ Y sur T^*M par :

$$\Omega(X_H, Y) = dH.Y \qquad (4)$$

$$(\text{resp.} \quad -d\Lambda(\mathring{X}_H, Y) = dH.Y \qquad (5)\ )$$

Si π^T désigne l'application tangente à la projection π, on a

$$\pi^T X_H = \pi^T \mathring{X}_H \quad .$$

En effet localement on peut écrire :

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(- \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial f_j^{(\alpha)}}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f_i^{(\alpha)}}{\partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (3')$$

$$\overset{\circ}{X}_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (4') \qquad \text{d'où :}$$

$$\pi^T \overset{\circ}{X}_H(q,p) = \pi^T X_H(q,p) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} = (g^{ij}(q)p_j + A^i(q)) \frac{\partial}{\partial q^i} \quad (5')$$

Pour chaque q fixé dans M l'application $p \mapsto \pi^T X_H(q,p)$ de $T_p^* M$ dans $T_p M$ est une bijection affine , l'application $\pi^T X_H : T^* M \to TM$ est donc globalement inversible, fibre par fibre son inverse $\mathscr{L}$ est la transformation de Legendre. Localement on a :

$$\mathscr{L}(q,\dot{q}) = (q,p) \quad \text{avec} \quad p = g_{ij}(q)(\dot{q}^j - A^j(q)) \quad (5'')$$

où $(g_{ij})_{ij}$ désigne la matrice inverse de la matrice $(g^{ij})_{ij}$.

2. Problème variationnel sur les ouverts $\mathscr{U}_\alpha$.

On définit sur TM l'énergie $E = H \circ \mathscr{L}$ (6) et au-dessus de chacun des $\mathscr{U}_\alpha$ une action $\mathscr{A}_\alpha : \varpi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha) \to \mathbf{R}$ par $\mathscr{A}_\alpha(v) = \omega_\alpha(X_H(\mathscr{L}(v)))$ (7) et un lagrangien $L_\alpha : \varpi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha) \to \mathbf{R}$ par $L_\alpha(v) = \mathscr{A}_\alpha(v) - E(v)$ (8) pour $v \in \varpi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$.

On a les écritures locales :

$$E(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j + U(q) \quad (6')$$

$$\mathscr{A}_\alpha(q,\dot{q}) = g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j - A_i^{(\alpha)}(q)\dot{q}^i \quad (7')$$

$$L_\alpha(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j - A_i^{(\alpha)}(q)\dot{q}^i - U(q) \quad (8')$$

avec

$$A_i^{(\alpha)}(q) = g_{ij}(q)A^j(q) - f_i^{(\alpha)}(q) \quad (9')$$

$$U(q) = V(q) - \frac{1}{2} g_{ij}(q)A^i(q)A^j(q) \quad (10') .$$

Au moyen de L_α la transformation de Legendre s'écrit :

$$\mathscr{L}(q,\dot{q}) = (q,p) \quad \text{avec} \quad p = \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q,\dot{q}) - f_i^{(\alpha)}(q) \quad (11') .$$

Si $\dot{q}$ et p sont liés par cette transformation on obtient :

$$\mathscr{A}_\alpha(q,q) = \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q,\dot{q})\dot{q}^i = (p_i + f_i^{(\alpha)}(q))\dot{q}^i \qquad (12')$$

On munit M de la structure riemannienne g associé à $g^\#$ et on note ΛM l'espace des lacets $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$, absolument continus dont la dérivée $\dot{\gamma}$ (qui existe presque partout) vérifie $g(\dot{\gamma},\dot{\gamma}) \in L^2(\mathbb{S}^1)$. On sait que ΛM est une variété hilbertienne de classe $\mathscr{C}^{k-5}$ [cf [9]] ou [3]] .

On note $W_\alpha = \{\gamma \in \Lambda M/\gamma(\mathbb{S}^1) \subset \mathscr{U}_\alpha\}$ W_α est un ouvert de ΛM.

On désigne par V_α l'espace des lacets $\gamma : \mathbb{S}^1 \mapsto \pi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$ absolument continus dont le composé avec une quelconque carte définie sur $\pi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$ appartient à $H^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^{2n})$. V_α s'identifie donc a un ouvert de l'espace de Hilbert $H^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^{2n})$.

PROPOSITION 1.

$\delta_0 \in V_\alpha$ *est une orbite périodique de* X_H *si et seulement si* δ_0 *satisfait à l'équation d'Euler du problème variationnel associé à la fonctionnelle* $S_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}$ *définie par* $S_\alpha(\delta) = \int_0^1 \delta^*\omega_\alpha - H(\delta(t))dt$.

Si $\delta_0(t) = (q(t),p(t))$ dans les coordonnées locales.

$\delta_0 \in V_\alpha$ est une orbite de X_H, compte tenu de (3'), si et seulement si δ_0 est dérivable et vérifie pour tout t de $\mathbb{S}^1$:

$$(13')\quad \begin{cases} \dot{q}^i(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(q(t),p(t)) \\ \dot{p}_i(t) = \dfrac{\partial H}{\partial q^i}(q(t),p(t)) + \dfrac{\delta f_j^{(\alpha)}}{\partial q^i}(q(t))\dfrac{\partial H}{\partial p_j}\, q(t),p(t)) - \dfrac{\delta f_i^{(\alpha)}}{\partial q^j}(q(t))\dfrac{\partial H}{\partial p_j}(q(t),p(t)) \end{cases}$$

Cette dernière équation n'est autre que l'équation d'Euler du problème variationnel défini au moyen de S_α .

PROPOSITION 2.

$\gamma_0 \in W_\alpha$ *est la projection sur* M *d'une orbite périodique de* X_H *si et seulement si* γ_0 *satisfait presque partout à l'équation d'Euler du problème* *variationnel associé à la fonctionnelle* $\hat{L}_\alpha : W_\alpha \mapsto \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\hat{L}_\alpha(\gamma) = \int_0^1 L_\alpha(\dot{\gamma}(t))dt.$$

Remarques préliminaires.

1. On note $\Phi \; W_\alpha \mapsto H^1(S^1,\mathbb{R}^n)$ l'application définie par $\Phi(\gamma) = \varphi \circ \gamma$ où φ est la carte définie sur $\mathscr{U}_\alpha$. Φ est un difféomorphisme de W_α sur l'ouvert $\tilde{W}_\alpha = \{\tilde{\gamma} \in H^1(S^1,\mathbb{R}^n) \mid \tilde{\gamma}(S^1) \subset \varphi(\mathscr{U}_\alpha)\}$ (cf. [7]) p. 168). Démontrer la proposition 2 pour $\hat{L}_\alpha$ revient à démontrer cette même proposition pour la fonctionnelle $\hat{L}_\alpha \circ \Phi^{-1}$ sur $\tilde{W}_\alpha$. En conséquence dans la suite on identifiera W_α et $\tilde{W}_\alpha$ et $\hat{L}_\alpha$ et $\hat{L}_\alpha \circ \Phi^{-1}$.

2. Si γ est la projection sur M d'une orbite δ de X_H, γ est de classe $\mathscr{C}^2$ et $\delta = \mathscr{L}(\dot{\gamma})$. En effet si δ est une orbite de X_H; δ est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie $\dot{\delta}(t) = X_H(\delta(t))$ pour tout t . Comme $\gamma = \pi\delta$, on obtient pour tout t $\dot{\gamma}(t) = \pi^T\dot{\delta}(t) = \mathscr{L}^{-1}(\delta(t))$, γ est donc $\mathscr{C}^2$ et $\delta = \mathscr{L}(\dot{\gamma})$.

3. On a la formule $\hat{L}_\alpha(\gamma) = S_\alpha(\mathscr{L}(\dot{\gamma}))$ (9) dès que $\mathscr{L}(\dot{\gamma})$ appartient à V_α Si on a les écritures locales $\gamma(t) = q(t)$ et $\mathscr{L}(\dot{\gamma}(t)) = (q(t),p(t))$ c'est dire que p(t) et q(t) sont liés par la formule (5') (ou (5")), on obtient alors compte tenu des formules (8) , (12') et (1')

$$S_\alpha(\mathscr{L}(\dot{\gamma})) = \int_0^1 \mathscr{L}(\dot{\gamma})^*\omega_\alpha \;-\; H(\mathscr{L}(\dot{\gamma}))dt$$

$$= \int_0^1 (p_i(t) + f_i^{(\alpha)}(q(t))\dot{q}^i(t) - E(\dot{\gamma}(t))dt = \hat{L}_\alpha(\gamma)$$

Démonstration de la proposition 2.

On suppose que pour $\gamma_0 \in W_\alpha$ d'écriture locale q(t), la fonction $t \to \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}}(q(t),\dot{q}(t))$ appartienne à $H^1(S^1,\mathbb{R}^n)$ et que pour presque tout t de S^1 on ait la formule d'Euler :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q(t),\dot{q}(t))\right|_t = \frac{\partial L}{\partial q^i}(q(t),\dot{q}(t)) \qquad (14').$$

On pose $p_i(t) = \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q(t),\dot{q}(t) - f_i^{(\alpha)}(q(t))$ pour i=1...n et $\delta_0(t) = (q(t),p(t))$

On a donc $\delta_0 \in V_\alpha$. Comme la relation de définition dje p est la formule (11') la relation (5') à savoir $\dot{q}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t),p(t) = g^{ij}(q(t))p_j(t) + A^i(q(t))$ est aussi vérifiée. $\dot{q}$ est donc continue et sa dérivée existe presque partout sur $\mathbb{S}^1$. En particulier γ_0 est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\delta_0 = \mathscr{L}(\dot{\gamma}_0)$.

Le deuxième membre de (14') est continue, on peut donc dire que $t \to \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q(t),q(t))$ est continûment dérivable et que (14') est vraie partout.

Comme $t \to f_i^{(\alpha)}(q(t))$ est $\mathscr{C}^1$, il en est de même de p, de (12') , de (8) et de (14') il vient :

$$\dot{p}_i(t) + \frac{\partial f_i^{(\alpha)}}{\partial q^k}(q(t))\dot{q}^k(t) = \frac{\partial f_j^{(\alpha)}(q(t))}{\partial q^i}\dot{q}^j(t) - \frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t),p(t))$$

Compte tenu de (5') on obtient

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t),p(t)) + \frac{\partial f_j^{(\alpha)}(q(t))}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_j}(q(t),p(t)) - \frac{\partial f_i^{(\alpha)}}{\partial q^k}(q(t)),\frac{\partial H}{\partial p_k}(q(t),p(t))$$

Cette formule et (5') donne exactement (13').

δ_0 est une orbite périodique de X_H, en particulier δ_0 est $\mathscr{C}^1$ donc γ_0 est $\mathscr{C}^2$.

Réciproque.

Si γ_0 est la projection sur M d'une orbite de X_H contenu dans $\pi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$, γ_0 est, d'après la remarque préliminaire 2 de classe $\mathscr{C}^2$ et cette orbite périodique est $\delta_0 = \mathscr{L}(\dot{\gamma}_0)$. Les relations (13') et (5') sont vraies elles impliquent pour tout t de $\mathbb{S}^1$ (14') γ_0 est une extrémale de $\hat{L}_\alpha$ sur W_α .

Remarque.

On peut définir [cf [1]] le champ X_E sur TM dit champ de Lagrange par $i_{X_E} \mathscr{L}^* \Omega = dE$ (10). La formule classique $\mathscr{L}_* X_E = X_H$ (11) reste vraie. Autrement dit γ est la projection sur M d'une orbite périodique de X_H si et seulement si $\dot{\gamma}$ est un orbite périodique de X_E .

Le problème variationnel local que l'on vient de décrire est très satisfaisant car on a la :

PROPOSITION 3.

$\hat{L}_\alpha : W_\alpha \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ (c'est-à-dire de classe $\mathscr{C}^1$ et de différentielle localement lipchitzienne) et vérifie la condition (C) de Palais Smale.

On a $\hat{L}_\alpha(\gamma) = \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))\, dt - A_*^{(\alpha)}(\gamma(t))\dot\gamma(t) - U(\gamma(t))dt$ (12)

On sait classiquement (cf [9]) que $\gamma \mapsto \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t),dt$ est de classe $\mathscr{C}^{k-4}_-$ donc au moins de classe $\mathscr{C}^2_-$ puisque $k \geqslant 6$.

Il est élémentaire de vérifier que $\gamma \mapsto \int_0^1 U(\gamma(t))dt$ est de classe $\mathscr{C}^2$ dès que U est classe $\mathscr{C}^4$.

Enfin $\gamma \to \int_0^1 A_*^{(\alpha)}(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^4$, cela résulte du lemme 8.21. p. 211 de ([9])).

Si A_* est de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$ dans $(\mathbb{R}^n)^*$ l'application $\tilde{A}_* : H^1(S^1,\mathbb{R}^n) \times L^2(S^1,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ définie par $\tilde{A}_*(f,v) = \int_0^1 A_*(f(t))v(t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^{k-2}$.

On voit sur l'écriture locale (9') que $A_*^{(\alpha)}$ est de classe $\mathscr{C}^4$.

Pour obtenir la condition (C) de Palais Smale on suit la démarche de [4] p. 524.

Soit une fonctionnelle $\mathscr{I} : H^1(S^1,\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}$ qui vérifie les deux conditions :

a) $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{H^1} = \infty$ implique $\lim_{n\to\infty} |\mathscr{I}(u_n)| = +\infty$.

b) si $(u_n)_n$ est une suite bornée de $H^1(S^1,\mathbb{R}^n)$ satisfaisant $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\quad p,q \geqslant N \Rightarrow |(D\mathscr{I}(u_p)-D\mathscr{I}(u_q))(u_p-u_q)| < \varepsilon$ il existe une suite extraite $(u_{n_k})_k$ convergeant dans $H^1.(S^1,\mathbb{R}^n)$.

Alors $\mathcal{I}$ vérifie la condition (C) à savoir :

toute suite $(u_n)_n$ satisfaisant $|\mathcal{I}(u_n)|$ borné et $\lim\limits_{n \to \infty} \| \operatorname{grad} \mathcal{I}(u_n) \| = 0$ possède une suite extraite convergente.

On introduit les notations pour $u \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{U}_\alpha)$:

$$\hat{L}^\circ_\alpha(u) = \int_0^1 g_{ij}(u(t))\dot{u}_i(t)\dot{u}_j(t)dt$$

$$\hat{L}^1_\alpha(u) = \hat{L}^o_\alpha(u) - \int_0^1 A_i^{(\alpha)}(u(t))\dot{u}^i(t)dt \qquad (15')$$

$$\hat{L}_\alpha(u) = \hat{L}^1_\alpha(u) - \int_0^1 U(u(t)dt \qquad (16')$$

On sait [cf [4] v. p. 528] que $\hat{L}^\circ_\alpha$ vérifie les conditions a) et b).

<u>LEMME 1</u>.

$\hat{L}^{o1}_\alpha : H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{U}_\alpha) \to \mathbb{R}$ *vérifie la condition a).*

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, la compacité de M et la continuité de $A^{(\alpha)}$ sur U_α il vient pour tout u de $H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{U}_\alpha)$

$$\left| \int_0^1 A_i^{(\alpha)}(u(t))\dot{u}^i(t)dt \right| \leqslant \left(\int_0^1 \| A_*^{(\alpha)}(u(t)) \|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \| \dot{u}(t) \|^2 dt \right)^{1/2}$$

$$\leqslant (C(\int_0^1 \| \dot{u}(t) \|^2 dt)^{1/2}$$

C désignant une constante.

Mais pour chaque x de $\mathcal{U}_\alpha$ $h \to g_{ij}(x)h^ih^j$ est une forme quadratique définie positive, il existe donc $m(x) > 0$ tel que

$$g_{ij}(x)h^ih^j \geqslant m(x) \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 \right).$$

De plus les $(g_{ij})_{ij}$ sont continues et M est compact il existe donc $m > 0$ telle que pour tout x de $\mathcal{U}_\alpha$ et tout h de $\mathbb{R}^n$

$$g_{ij}(x)h^ih^j \geqslant m \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 \right) .$$

On en déduit pour tout u de $H^1(S^1, \mathcal{U}_\alpha)$:

$$\hat{L}^1_\alpha(u) \geqslant m \int_0^1 \| \dot{u}(t)\|^2 dt - C\left(\int_0^1 \| \dot{u}(t)\|^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\geqslant m \int_0^1 \| \dot{u}(t)\|^2 dt \left(1 - \frac{C}{m} \frac{1}{\left(\int_0^1 \| \dot{u}(t)\|^2 dt\right)^{1/2}} \right)$$

Si $(u_n)_n$ est une suite de $H^1(S^1, \mathcal{U}_\alpha)$ tq $\lim_{p \to \infty} \| u_p\|_{H^1} = +\infty$ du fait que M est compact cela implique $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \| \dot{u}_p(t)\|^2 dt = +\infty$ donc $\lim_{p \to \infty} L^1_\alpha(u_p) = +\infty$.

<u>LEMME 2.</u>

$\hat{L}^1_\alpha : H^1(S^1, \mathcal{U}_\alpha) \mapsto \mathbf{R}$ *vérifie la condition b).*

En différentiant (15') on peut écrire pour $h \in H^1(S^1, \mathcal{U}_\alpha)$

$$D\hat{L}^o_\alpha(u)h = D\hat{L}^1_\alpha(u)h + \int_0^1 (DA_*(u(t))h(t) + A_*^{(\alpha)}(u(t))\dot{h}(t))dt .$$

Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de $H^1(S^1, \mathbf{R}^n)$ satisfaisante la condition :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad p,q \geqslant N \Rightarrow |D\hat{L}^1_\alpha(u_p) - D\hat{L}^1_\alpha(u_q)|(u_p-u_q)| < \varepsilon$.

Pour deux indices i et j on a donc

$$D\hat{L}^o_\alpha(u_i) - D\hat{L}^o_\alpha(u_j)(u_i-u_j) = (D\hat{L}^1_\alpha(u_i) - D\hat{L}^1_\alpha(u_j))(u_i-u_j)$$

$$+ \int_0^1 (DA_*(u_i(t)) - DA_*(u_j(t))(u_i(t)-u_j(t)) + (A_*^{(\alpha)}(u_i(t) - A_*^{(\alpha)}(u_j(t))(\dot{u}_i-\dot{u}_j)dt \quad .$$

Comme L^o_α vérifie la condition b) pour obtenir à partir de la suite $(u_n)_n$ une suite extraite convergente il suffit de montrer que $\forall \varepsilon > o \quad \exists N \quad p,q \geqslant N \Longrightarrow$

$$\int_0^1 \{DA_*(u_p(t)) - DA_*(u_q(t)-u_p(t)-u_q(t)) + A_*^{(\alpha)}(u_p(t)) - A_*^{\alpha}(u_q(t))(\dot{u}_p(t)-\dot{u}_q(t))dt < \varepsilon$$

ou ce même résultat pour une suite extraite de $(u_n)_n$.

Mais :

$$\left| \int_0^1 (A_*^{(\alpha)}(u_i(t)) - A_*^{(\alpha)}(u_j(t)))(\dot{u}_i(t)-\dot{u}_j(t))dt \right|$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 \| A_*^{(\alpha)}(u_i(t)) - A_*^{(\alpha)}(u_j(t))\|^2 dt\right)^{1/2} \| u_i-u_j\| H^1$$

$$\leqslant 2A\left(\int_0^1 \| A_*^{(\alpha)}(u_i(t)) - A_*^{(\alpha)}(u_j(t)\|^2 dt\right)^{1/2}$$

car la suite $(u_n)_n$ est bornée.

L'inclusion de $H^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^{2n})$ dans $\mathscr{C}^0_\infty(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^{2n})$ étant compact donc il existe une suite extraite (u_{n_k}) qui converge uniformément sur $[0,1]$, le fait que A_* est continue implique que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad p,q > N \Longrightarrow \int_0^1 \| A_*^{(\alpha)}(u_{np}(t)) - A_*^{(\alpha)}(u_{nq}(t)\|^2 dt \leqslant \frac{\varepsilon}{4A}$$

$$\text{et} \quad \left| \int_0^1 (DA(u_{np}(t)) - DA(u_{nq}(t)))(u_{np}-u_{nq})(t)dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 3.

PROPOSITION 4.

$\gamma_0 \in W_\alpha$ est la projection sur M d'une orbite périodique de X_H ssi γ_0 est un point critique de $\hat{L}_\alpha$ sur W_α.

On remarque préalablement (cf. [9] lemme 8.18 p. 210) que $T_\gamma H^1(\mathbb{S}^1,\mathscr{U}_\alpha)$ pour $\gamma \in W_\alpha$ s'identifie à $H^1(\mathbb{S}^1,T\gamma\mathscr{U}_\gamma)$ donc finalement comme $\mathscr{U}_\alpha$ est un domaine de carte à $H^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^n)$.

De plus comme $\hat{L}_\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^2_-$ et que $d_f^2L_\alpha$ (la dérivée seconde de L_α le long de la fibre) est une forme quadratique définie positive, il résulte d'un théorème de [10] (p. 392) que $D\hat{L}_\alpha(\gamma_0)$ est l'extension à $H^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^n)$ de l'application

$$v \to \int_0^1 \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q,\dot{q})\dot{v}^i + \frac{\partial L_\alpha}{\partial q^i}(q,\dot{q})v^i\right)(t)dt \qquad (17')$$

de $\mathscr{C}^2(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}$.

γ_0 est donc un point critique de $\hat{L}_\alpha$ si et seulement si pour tout v de $\mathscr{C}^2(\mathbb{S}^1,\mathscr{U}_\alpha)$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q,\dot{q})\dot{v}^i + \frac{\partial L_\alpha}{\partial q^i}(q,\dot{q})v^i\right)(t)dt = 0 \ .$$

C'est-à-dire en généralisant à $H^1(\mathbb{S}^1,\mathscr{U}_\alpha)$ le lemme de Dubois Raymond si et seulement si pour presque tout t de $\mathbb{S}^1$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q(t),\dot{q}(t))\right) = \frac{\partial L_\alpha}{\partial q^i}(q(t),\dot{q}(t))$$

d'où, grâce à la proposition 2 si et seulement si γ_0 est le projection d'une orbite périodique de X_H sur M.

3. Problème global.

On remarque que si γ appartient à $W_\alpha \cap W_\beta$, en raison de (12)·

$$\hat{L}_\alpha(\gamma) - \hat{L}_\beta(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^1} A_i^{(\beta)}(q(t))\dot{q}^i(t)dt - \int_{\mathbb{S}^1} A_i^{(\alpha)}(q(t))\dot{q}^i(t)dt$$

de sorte que si $h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^n)$ le calcul précédent implique :

$$(D\hat{L}_\alpha(\gamma) - D\hat{L}_\beta(\gamma))(h) = \int_{\mathbb{S}^1} \left[- \frac{d}{dt}(A_j^{(\beta)}(q(t)) + \frac{\partial A_i^{(\beta)}}{\partial q^j}(q(t))\dot{q}^i(t)\right] \dot{h}^j(t)dt$$

$$- \int_{\mathbb{S}^1} \left[- \frac{d}{dt}(A_j^{(\alpha)}(q(t)) + \frac{\partial A_i^{(\alpha)}}{\partial q^j}(q(t))\dot{q}^i(t)\right] h^j(t)dt$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \left(- \frac{\partial A_j^{(\beta)}}{\partial q^i}(q(t))\dot{q}^i(t)h^j(t) + \frac{\partial A_i^{(\beta)}}{\partial q^j}(q(t))\dot{q}^i(t)h^j(t)\right)dt$$

$$- \int_{\mathbb{S}^1} \left(- \frac{\partial A_j^{(\alpha)}}{\partial q^i}(q(t))\dot{q}^i(t)h^j(t) + \frac{\partial A_i^{(\alpha)}}{\partial q^j}(q(t))\dot{q}^i(t)h^j(t)\right)dt$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} - dA_*^{(\beta)}(q(t))(\dot{q}(t),h(t)) + dA_*^{(\alpha)}(q(t))(\dot{q}(t),h(t))dt$$

mais $dA_*^{(\alpha)}$ est globale , car $dA_*^{(\alpha)} = dB + \Omega_0$ avec B la 1 forme définie par $B(v) = A(x)\,(v)^{\#}$ pour $v \in T_xM$ ($v^{\#}$ désignant la 1 forme associée à v au moyen de g c'est-à-dire $X \to g_x(v,X)$ pour $x \in T_xM$). Cela résulte immédiatement de l'écriture (9').

Donc pour $\gamma \in W_\alpha \cap W_\beta$ $\quad \hat{DL}_\alpha(\gamma) = \hat{DL}_\beta(\gamma)$.

On peut donc parfaitement définir sur ΛM une 1-forme fermée $\hat{K}$ coïncidant avec les divers $\hat{DL}_\alpha$; et pour globaliser le problème introduire : $\tilde{\Lambda M}$ le revêtement universel de ΛM, ce qui a un sens puisque ΛM est une variété hilbertienne connexe donc localement connexe par arcs et "semi-localement simplement connexe". Les éléments de $\tilde{\Lambda M}$ sont les classes d'homotopie de chemin $\gamma_s : S^1 \to M$ paramétrés par $s \in [0,1]$ d'origine un lacet γ_0 que l'on peut choisir pour simplifier comme réduit a un point m_0 de M et ayant même extrémités γ_1 (cf. [2]).

On note $[\Gamma]$ un élément de $\tilde{\Lambda M}$ ayant pour représentant l'application $\Gamma : (s,t) \mapsto \Gamma(s,t)$ de $[0,1] \times S^1$ dans M satisfaisant pour tout t de S^1 $\Gamma(o,t) = m_0$. Soit p la projection canonique $\tilde{\Lambda M} \to \Lambda M$ c'est-à-dire l'application définie par $p[\Gamma] = \gamma_1$.

On définit tout naturellement une application $\hat{L}$ qui globalise les différents $\hat{L}_\alpha$ en posant

$$\hat{L}([\Gamma]) = \int_\Gamma \hat{K}$$

Cette application est bien définie (c'est-à-dire indépendamment du représentant choisi) en raison du lemme de Poincaré, $\hat{K}$ étant fermée (cf. la démonstration pour les variétés de dimension infinie du lemme de Poincaré dans [12]). Si $[\Gamma] \in \tilde{\Lambda M}$ il existe α tel que $p[\Gamma] \in W_\alpha$ et $\hat{L}[\Gamma] = \hat{L}_\alpha(p[\Gamma])$,, de plus comme $\Pi^1(W_\alpha) = \Pi^2(\mathcal{U}_\alpha) = \{0\}$ si Γ est un chemin paramétré sur $[0,1]$ joignant γ_1 et γ_2 de sorte que $\Gamma(I \times S^1) \subset \mathcal{U}_\alpha$ on a si $[\Gamma_i]$ se projette sur γ_i $(i=1,2)$, On a $L([\Gamma_i]) = L_\alpha(\gamma_i)$ $(i=1,2)$ pour le même indice α.

PROPOSITION 5.

$\hat{L} : \tilde{\Lambda M} \mapsto \mathbb{R}$. est de classe $\mathcal{C}^2_-$ et on a la condition : si $(u_n)_n$ est une suite de points de $\tilde{\Lambda M}$ vérifiant

1) $|L(u_n)|$ *est bornée et* $\lim_{n \to \infty} \|\mathrm{grad} L(u_n)\| = 0$

2) $(u_n)_n$ *est contenu dans un nombre fini de feuillets*

alors il existe une suite convergente.

La condition (2) signifie qu'il existe un nombre fini d'indices α telle que pout tout n $p(u_n) \in \underset{\alpha}{\cup} W_\alpha$ et pour chacun de ces α, les (u_n) se projettant dans le même W_α sont dans un nombre fini d'ouverts W_{α_i} de $p^{-1}(W_\alpha)$ sur lesquels p est un difféomorphisme.

Si M est une variété telle que $\Pi^2(M)$ soit un groupe fini, la proposition 4 implique que $\hat{L}$ vérifie la condition (C).

Le fait que $\hat{L}$ est de classe $\mathscr{C}^2_-$ est évident puisque p est un revêtement.

Si les conditions (1) et (2) sont vérifiées pour une suite $(u_n)_n$ la condition (2) implique qu'il existe une suite extraite $(u_{n_k})_k$, et un même indice α telles que $\forall k\ \hat{L}(u_{n_k}) = \hat{L}_\alpha(pu_{n_k})$. Comme L_α vérifie la condition (C), on peut extraire de cette suite (pu_{n_k}) une suite convergente ; la suite correspondante pour $(u_n)_n$ est celle que l'on souhaite.

PROPOSITION 6.

Les projections sur M *des orbites périodiques de* X_H *coïncident avec les projections sur* ΛM *des points critiques de* $\hat{L}$.

Si $[\Gamma]$ est un point critique de $\hat{L}$, il existe α tel que $\hat{L}([\Gamma]) = \hat{L}_{\alpha(p[\Gamma])}$ Comme p est un difféomorphisme local $\gamma = p\,[\Gamma]$ est un point critique de $\hat{L}_\alpha$ donc en vertu de la proposition 4, γ est la projection sur M d'une orbite périodique de X_H.

Réciproquement si γ est la projection sur M d'une orbite périodique de X_H, γ est de classe $\mathscr{C}^2$ donc il existe $\mathcal{U}_\alpha$ satisfaisant $\Pi^1(\mathcal{U}_\alpha) = \Pi^2(\mathcal{U}_\alpha) = \{0\}$ et $\gamma(S^1) \subset \mathcal{U}_\alpha$. En relevant γ dans $\tilde{\Lambda}M$, on peut dire qu'il existe $[\Gamma] \in \Lambda M$ telle $p[\Gamma] = \gamma$ et $\hat{L}([\Gamma]) = \hat{L}_\alpha(\gamma)$, comme γ est un point critique de L_α, que p est un difféomorphisme local, $[\Gamma]$ est un point critique de L.

Le nombre d'orbites périodiques va pouvoir être estimé en étudiant la topologie de $\tilde{\Lambda}M$ et en appliquant la théorie de Lyusternik-Schnirel'mann[6] .

Bibliographie.

[1] R. ABRAHAM and J.E. MARSDEN, *Foundations of Mechanics* (2ème édition) Benjamin (1978) p. 218-251.

[2] C. GRENBERG, Lectures on algebraic topology, Benjamin (1967).

[3] W. KLINGENBERG, Lectures on closed geodesics, Springer (1978).

[4] J.P. MESIROV, *Perturbation theory for condition (C) in the calculus of variation,* J. differential geometry 12 (1977), p. 523-533.

[5] S.P. NOVIKOV and I. SHMEL'STER, *Periodic solution of Kirchoff equations for the free motion of rigid body in a fluid and the extended theory of Lyusternik-Schnirel'mann Morse (I).* Funct. Anal. Priloztien 15 n°3, traduction américaine (1982), p. 197-207.

[6] R. PALAIS, *Lusternick-Schnirel'mann theory on Banach manifold,* Topology 5 (1966), p. 115-132.

[7] R. PALAIS and S. SMALE, *A generalised Morse theory :* Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), p. 165-171.

[8] P.H. RABINOWITZ, *Periodic solutions of Hamilton systems,* Comm. on Pure and Applied Maths. vol. XXXI (1978), p. 157-184.

[9] J.T. SCHWARTZ, *Non linear functional analysis,* Gordon and Breach (1969).

[10] S. SMALE, *Morse theory and a non linear generalisation of the dirichlet Problem,* Ann. Math. 80 (1964), p. 382-396.

[11] J.M. SOURIAU, *Structures des systèmes dynamiques,* Dunod (1975).

[12] A. WEINSTEIN, *Symplectic manifold and their lagrangien submanifold,* Advances in maths (1971), p. 329-345.