

E. COMBET

**2- II Inégalités fortes de Morse**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1984, fascicule 3B  
« Séminaire de géométrie », , p. 33-46

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1984\\_\\_3B\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1984__3B_A4_0)

© Université de Lyon, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

INEGALITES FORTES DE MORSE

Nous abordons dans cette seconde partie le calcul des inégalités fortes de Morse (section A) et le calcul des matrices du "petit" complexe cohomologique associé à ces inégalités (section D).

Les résultats de la section A peuvent encore être formalisés rigoureusement en tenant compte de ce qui est connu dans le cas scalaire et qui devrait s'étendre sans difficulté au cas des formes. Par contre nous nous sommes contentés dans la section D d'énoncer les résultats de Witten. Ceux-ci s'appuient sur un "calcul d'instantons en présence de supersymétries" que nous n'avons pu formaliser qu'en partie dans les sections B et C.

A LES INEGALITES FORTES DE MORSE.

Soit  $(M, g)$  une variété compacte orientée de dimension  $n$ , munie d'une métrique riemannienne  $g$  et  $h$  une fonction de Morse :  $M \rightarrow \mathbb{R}$ .

On a vu qu'à chaque point critique  $A_k$  d'indice  $p$  de  $h$  sur  $M$  correspond une valeur propre  $\lambda_p^k(t)$  de  $H_t^p$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_p^k(t) / t = 0.$$

On a ici  $k = 1, 2, \dots, M_p$ .

On note  $X_p$  l'espace vectoriel engendré par les  $p$ -formes propres correspondantes.

Cet espace est de dimension égale à  $M_p$  (le nombre de points critiques d'indice de Morse égal à  $p$ ). Ceci est connu dans le cas scalaires [16] mais reste à prouver pour les  $p$ -formes. Nous l'admettrons ici (voir l'exposé [23]).

Pour  $\psi \in X_p$  :

$$H_t^{p+1} d_t^p \psi = d_t^p H_t^p \psi = \lambda_p^k(t) d_t^p \psi$$

donc  $d_t \psi \in X_{p+1}$ .

Puisque  $\text{Ker } H_t^p$  est contenu dans  $X_p$ , on voit que l'on obtient ainsi un complexe

$$(1) \quad d_t^p : X_p \rightarrow X_{p+1}$$

tel que  $d_t^{p+1} \circ d_t^p = 0$  et  $B_p = \dim (\text{Ker } d_t^p / \text{Im } d_t^{p-1})$ .

On dit que (1) est le petit complexe cohomologique associé à  $h$  sur  $M$ .  
On déduit facilement de ceci les inégalités fortes de Morse :

$$\begin{aligned} M_0 &\geq B_0 \\ M_1 - M_0 &\geq B_1 - B_0 \\ &\dots\dots\dots \\ M_k - M_{k-1} + \dots + (-1)^k M_0 &\geq B_k - B_{k-1} + \dots + (-1)^k B_0 \end{aligned}$$

Pour montrer cela on utilise la suite :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} M_0 & M_1 & M_2 & M_3 \dots\dots \\ X_0 \longrightarrow & X_1 \longrightarrow & X_2 \longrightarrow & X_3 \dots\dots \\ \text{Ker } d_t^0 & \text{Ker } d_t^1 / \text{Im } d_t^0 & \text{Ker } d_t^2 / \text{Im } d_t^1 & \text{Ker } d_t^3 / \text{Im } d_t^2 \dots \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \dots\dots \end{array} \right.$$

On a évidemment  $M_0 \geq B_0 = \dim \text{Ker } d_t^0$

$$M_1 \geq \dim \text{Ker } d_t^1$$

$$M_1 - M_0 \geq \underbrace{\dim \text{Ker } d_t^1 - (\dim \text{Im } d_t^0 + \dim \text{Ker } d_t^0)}_{B_1} \quad \underbrace{\phantom{\dim \text{Ker } d_t^1 - (\dim \text{Im } d_t^0 + \dim \text{Ker } d_t^0)}}_{B_0}$$

et ainsi de suite.

Il est connu que l'existence des inégalités fortes de Morse équivaut à l'existence d'un petit complexe cohomologique (1). La méthode de Witten présente, entre autres, l'intérêt de donner une construction explicite de ce petit complexe.

En résumé, à chaque point critique  $A_k^{(p)}$  d'indice  $p$  de  $h$  sur  $M$  correspond une "basse" valeur propre  $\lambda_p^k(t)$  de  $H_t^p$  et une  $p$ -forme propre normalisée  $\psi_{A_k^{(p)}}(t)$  :

$$H_t^p \psi_{A_k^{(p)}}(t) = \lambda_p^k(t) \psi_{A_k^{(p)}}(t).$$

Ces  $p$ -formes propres constituent une base de  $X_p$  (voir [16] pour le cas scalaire ; nous admettons que ceci reste vrai pour les  $p$ -formes ; voir [23] pour le cas général) et nous devons calculer les matrices de  $H_t^p$  et de  $d_t^p$  sur ces bases.

Ces calculs sont effectués dans l'article de E. Witten [21] à l'aide d'arguments de supersymétries dont la formalisation mathématique ne semble pas avoir été publiée à ce jour.

Ces calculs reposent sur l'analyse des instantons dont les points fondamentaux peuvent se résumer de la façon suivante :

(i) Les parties principales de ces calculs se concentrent autour des points critiques de  $h$  et des courbes qui joignent ces points en minimisant l'action euclidienne du système. Ces courbes, quand elles existent, sont précisément appelées des instantons.

(ii) La recherche des instantons est liée à un calcul de variations qui, dans le cas considéré ici, est un problème de recherche des lignes de plus grande pente joignant les divers points critiques de la fonction  $h$ .

(iii) Les éléments de matrice

$$\langle \psi_{A_k^{(p)}}(t), H_t^p \psi_{A_\ell^{(p)}}(t) \rangle$$

ont une partie principale de l'ordre de

$$\exp - 2t | h(A_k^{(p)}) - h(A_\ell^{(p)}) |.$$

(iv) Les éléments de matrice

$$\langle \psi_{A_k^{(p+1)}}(t), d_t^p \psi_{A_\ell^{(p)}}(t) \rangle$$

ont une partie principale de l'ordre de

$$\exp - t | h(A_k^{(p+1)}) - h(A_\ell^{(p)}) |.$$

(v) Chaque instanton  $[A_k^{(p+1)} \rightarrow A_\ell^{(p)}]$  contribue à la matrice précédente par un coefficient entier égal à  $\pm 1$  et dont la définition précise sera donnée à la fin de cette deuxième partie.

Nous allons reprendre ces points les uns après les autres en essayant de les justifier. Dans la plupart des cas cela ne sera possible qu'en se référant au cas scalaire considéré dans les articles récents [16],[18] où d'ailleurs les résultats sont seulement énoncés mais non démontrés. Cependant ce type de phénomène est bien connu en physique mathématique ; voir par exemple [17] , [22] .

#### B. L'USAGE DES INSTANTONS EN MECANIQUE QUANTIQUE.

L'usage des instantons (ou "pseudo-particules") est apparu récemment pour expliquer précisément l'effet tunnel entre les états classiques d'énergie nulle, quand on fait un calcul d'approximation. Ceci est le cas en théorie des champs de Yang et Mills comme en théorie d'un système à une particule. Une particularité de ce phénomène est le passage d'une action-minkowskienne à une action euclidienne et l'apparition de termes exponentiels [17] , [22] .

Tout cela peut être vu d'une façon parfaitement rigoureuse dans le cas élémentaire d'une particule.

---

Le mouvement d'un point matériel de masse  $m$  soumis dans  $\mathbf{R}^n$  à une force qui dérive du potentiel  $V$  suit les lois de Newton :

$$m \ddot{\gamma}_j = - V'_{x_j} \quad , \quad j = 1, \dots, n.$$

On a au cours du mouvement la loi de conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2} m \dot{\gamma}^2 + V = E \text{ (constante) ;}$$

entre les points  $(A_0, t_0)$ ,  $(A, t)$  le mouvement suit une courbe extrémale de la fonctionnelle (Hamilton) :

$$(2) \quad \int_{t_0}^t \left( \frac{1}{2} m \dot{\gamma}^2 - V \right) ds$$

et cette courbe rend extrémale la fonctionnelle (Maupertuis) :

$$\int_{t_0}^t \sqrt{2m(E-V(\gamma(s)))} |\dot{\gamma}(s)| ds$$

parmi toutes les trajectoires telles que  $\frac{1}{2} m \dot{\gamma}^2 + V = E$  (constante).

En mécanique quantique on associe à cette particule une fonction d'onde  $\psi$  solution de l'équation de Schrödinger associée à l'hamiltonien

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V .$$

Les états stationnaires du système sont solutions de l'équation réduite :

$$H\psi = E\psi, E \in \mathbb{R}.$$

Notre problème est d'étudier le comportement asymptotique des fonctions propres associées aux basses valeurs propres de H.

Citons ici un résultat de B. Simon [18] :

"Soit  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $V \gg 0$  sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) > 0$ ,  $V$  s'annule exactement en deux points  $a$  et  $b$  et en ces points la matrice  $(\partial^2 V / \partial x_i \partial x_j)$  est définie-positive.

On note  $E_0(\lambda)$ ,  $E_1(\lambda)$  les deux premières valeurs propres de l'opérateur  $H(\lambda) = -\frac{1}{2} \Delta + \lambda^2 V$ ;  $\Omega_0(\lambda)$  et  $\Omega_1(\lambda)$  sont les fonctions propres normalisées associées.

Pour  $x, y \in \mathbb{R}^n$  on pose

$$(3) \quad \rho(x, y) = \inf_{\gamma, t, t_0} \left\{ \int_{t_0}^t \left( \frac{1}{2} \dot{\gamma}(s)^2 + V(\gamma(s)) \right) ds \mid \gamma(t_0) = x, \gamma(t) = y \right\}$$

où  $\gamma$  décrit un ensemble de chemins absolument continus.

Alors on a les deux résultats suivants :

- (i)  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{\lambda} \text{Log}(E_1(\lambda) - E_0(\lambda)) \right\} = \rho(a, b)$
- (ii)  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{2} \text{Log} \Omega_0(\lambda, x) \right\} = \min(\rho(x, a), \rho(x, b))$  .

On notera ici un fait caractéristique de ce type de calcul : c'est l'usage de l'action euclidienne

$$\int_{t_0}^t \left( \frac{1}{2} \dot{\gamma}(s)^2 + V(\gamma(s)) \right) ds$$

au lieu de l'action classique (2). On peut noter que le lagrangien classique

$\frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 - V$  peut être considéré comme l'approximation du lagrangien relativiste

$-c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\gamma}^2}{c^2}} - V$  et il y a donc passage d'une action minkowskienne à une action

euclidienne. On sait que ce fait est caractéristique du calcul des instantons, notamment en théorie des champs de Yang et Mills.

On peut noter aussi que a et b sont des mouvements "classiques" d'énergie nulle de la particule considérée ( $V(a) = V(b) = 0, \dot{\gamma} = 0$ ) et que le calcul des variations (3) conduit à chercher des courbes extrémales joignant ces points a et b. Nous reviendrons sur ce problème dans la prochaine section. Notons que l'on appelle instantons ces courbes extrémales qui joignent les mouvements "classiques" d'énergie nulle..

Dans l'article [16], ces résultats sont étendus au cas où V a un nombre fini quelconque de zéros non dégénérés dans  $\mathbf{R}^n$  (ou sur une variété riemannienne). Les éléments de matrice de  $H(\lambda)$  sont exprimés à l'aide des géodésiques joignant deux zéros de V dans la métrique d'Agmon (à comparer à la fonctionnelle de Maupertuis) :

$$(4) \quad \int_{t_0}^t \sqrt{2V(\gamma(s))} |\dot{\gamma}(s)| ds .$$

Il n'est pas tout à fait évident que ce calcul soit équivalent au précédent et nous y reviendrons dans la prochaine section. En attendant, si l'on admet que ces résultats [16], [18] restent vérifiés pour les laplaciens sur les p-formes on en déduit les énoncés (i), (ii), (iii) de la section A de cette seconde partie on a en effet ici pour le lagrangien euclidien :

$$g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j + t^2 g^{ij} \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial x^j} = g_{ij} \left( \dot{\gamma}^i + \epsilon t g^{ik} \frac{\partial h}{\partial x^k} \right) \left( \dot{\gamma}^j + \epsilon t g^{jk} \frac{\partial h}{\partial x^k} \right) - 2\epsilon t \frac{\partial h}{\partial x^k} \dot{\gamma}^k$$

où  $\epsilon = \pm 1$ . Le minimum de l'action sera donc atteint le long des lignes de plus grande pente

$$\dot{\gamma}^i \pm t g^{ik} \frac{\partial h}{\partial x^k} = 0$$

et ce minimum est égal à  $\mp 2 t (h(y) - h(x))$ .

---

Une méthode directe pour montrer les résultats [16], [18] repose sur l'intégration fonctionnelle. En reprenant par exemple l'opérateur

$$H(\lambda) = -\frac{1}{2} \Delta + \lambda^2 V$$

et en écrivant

$$H(\lambda) \psi = E \psi$$

alors on a pour chaque  $t$  :

$$e^{-tH(\lambda)} \psi = e^{-tE} \psi$$

$$\psi = e^{-tH(\lambda)} e^{tE} \psi .$$

Il est possible d'exprimer le noyau  $e^{-t \frac{H(\lambda)}{\lambda}}(x,y)$  en utilisant la formule de Feynman-Kac. Cette formule s'écrit formellement :

$$e^{-t \frac{H(\lambda)}{\lambda}}(x,y) = \int e^{-\lambda \int_0^t (\frac{1}{2} \dot{\gamma}^2(s) + V(\gamma(s))) ds} \delta(\gamma(0)-x) \delta(\gamma(t)-y) "d\gamma"$$

c'est-à-dire comme intégrale sur les chemins joignant  $x$  à  $y$ . On sait que l'on peut justifier cette formule heuristiquement [14], rigoureusement [19] et, qu'en tous cas, elle se comporte asymptotiquement comme elle est écrite plus haut c'est-à-dire suivant le principe de Laplace bien connu pour les intégrales exponentielles ordinaires [19]. C'est ce fait qui conduit à considérer les zéros de  $V$  et les extrémales de l'action euclidienne qui joignent ces zéros, c'est-à-dire les instantons.

---

On notera que les résultats donnés dans cette section constituent une généralisation directe de ceux que nous avons rappelés dans l'introduction à propos de l'effet tunnel en mécanique quantique.

---



### C. EXISTENCE DES INSTANTONS

Un problème de calcul des variations.

Etant donnés  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ , on note  $\Omega(\bar{x}, \bar{y})$ , l'ensemble des applications  $\gamma$  absolument continues sur un intervalle  $(t_0, t)$  borné ou non de  $\mathbb{R}$  (cet intervalle dépend de  $\gamma$ ) telles que

$$\gamma(t_0) = \bar{x}, \quad \gamma(t) = \bar{y}.$$

Dans la suite on fixe  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  telle que  $V \geq 0$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

A chacun des chemins  $\gamma$  précédents on fait correspondre le nombre

$$I(\gamma) = \int_{t_0}^t [\dot{\gamma}(s)^2 + V(\gamma(s))] ds$$

et on pose

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_{\gamma \in \Omega(\bar{x}, \bar{y})} I(\gamma).$$

1er cas. il existe  $V_0 > 0$  tel que  $V \geq V_0$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

On a dans ce cas un problème classique, le point essentiel étant que  $(t_0, t)$  peut être inclus dans un intervalle compact fixe  $[0, T]$  car on a :

$$I(\gamma) \geq \int_{t_0}^t V_0 dt$$

d'où l'on déduit :

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) \geq (t - t_0)V_0.$$

On peut donc se limiter à l'étude des intégrales  $I(\gamma)$  prises sur les chemins  $\gamma \in H_1(0, T, \mathbb{R}^n)_{\bar{x}, \bar{y}}$  c'est-à-dire les chemins absolument continus  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tels que  $\gamma(0) = \bar{x}$ ,  $\gamma(T) = \bar{y}$ .

On sait dans ces conditions qu'il existe une courbe  $\gamma_0$  qui minimise effectivement  $I(\gamma)$  et l'on a (voir par exemple [13], proposition 2.5)

$$\begin{aligned} I(\gamma_0) &= \rho(\bar{x}, \bar{y}) \\ (5) \quad &= \inf_{\gamma \in H_1(0, 1, \mathbb{R}^n)_{\bar{x}, \bar{y}}} \int_0^1 \sqrt{V(\gamma(s))} |\dot{\gamma}(s)| ds. \end{aligned}$$

On trouve ainsi dans ce cas une coïncidence des géodésiques de la métrique d'Agmon (5) avec les courbes minimales du lagrangien  $\dot{\gamma}^2 + V$ .

2ème cas ;  $V$  est positive sur  $\mathbb{R}^n$  et s'annule en un nombre fini de points.

Dans ces conditions le problème considéré est à extrémités  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  fixes dans  $\mathbb{R}^n$  mais les instants  $t_0, t$  peuvent devenir infinis.

Prenons par exemple  $L(x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y}$  quelconque.

On obtient dans ce cas :

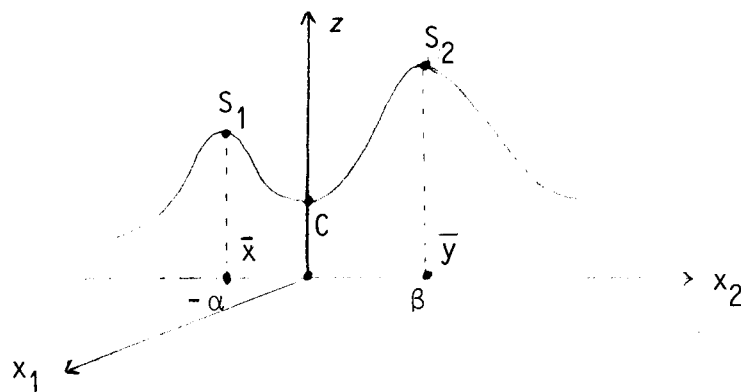
$$\begin{aligned} I(\gamma) &= \int_{t_0}^t (\dot{\gamma}^2 + \gamma^2) ds \\ &= \int_{t_0}^t (\dot{\gamma} - \gamma)^2 dt + 2 \int_{t_0}^t \gamma \dot{\gamma} ds \\ &= \int_{t_0}^t (\dot{\gamma} - \gamma)^2 dt + |\bar{y}|^2 ; \end{aligned}$$

Il vient aussi  $\rho(0, \bar{y}) = |\bar{y}|^2$  et  $\rho(0, \bar{y})$  est atteint par la courbe  $\gamma : ] -\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\gamma(s) = e^{s\bar{y}} .$$

Ainsi, dans ce deuxième cas on a un calcul des variations à extrémités  $(\bar{x}, t_0)$ ,  $(\bar{y}, t)$  variables non-bornées.

Il est possible que  $\rho(\bar{x}, \bar{y})$  ne soit pas atteinte par une courbe. Prenons par  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , avec  $h > 0$  et supposons que les deux sommets  $S_1 = (0, -\alpha, h_1)$ ,  $S_2 = (0, \beta, h_2)$  soient, sur la montagne d'équation  $z = h(x_1, x_2)$  séparés par le col  $(0, 0, h_3) = C$



Considérons dans  $\mathbb{R}^2$  le lagrangien  $= \dot{x}^2 + (\text{grad } h)^2$  ; les extrémités de sont liées aux lignes de plus grande pente sur la montagne car l'on a :

$$I(\gamma) = \int_{t_0}^t (\dot{\gamma} \pm \text{grad } h)^2 ds \pm 2(h(\bar{y}) - h(\bar{x})) ;$$

on obtient ici pour  $\bar{x} = (0, -\alpha)$ ,  $\bar{y} = (0, \beta)$

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = h_1 + h_2$$

et il n'existe pas de chemin  $\gamma$  donnant  $\rho(\bar{x}, \bar{y})$  (il faut prendre la réunion des deux lignes de plus grande pente  $[S_1 \rightarrow C]$ ,  $[C \rightarrow S_2]$ ).

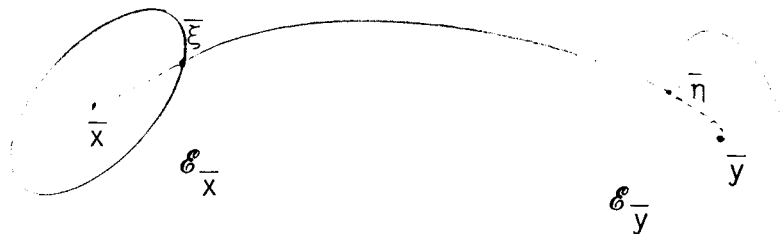
Voici maintenant un cas où une solution du problème existe : on suppose que  $V(x)$  coïncide avec  $\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})(x_i - \bar{x}_i)$  au voisinage de  $\bar{x}$ , on fait la

même hypothèse au voisinage de  $\bar{y}$  et on suppose que  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  sont les seuls zéros de  $V$  sur  $\mathbb{R}^n$ . On considère autour de  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  les petite ellipsoïdes  $\mathcal{E}_{\bar{x}}$ ,  $\mathcal{E}_{\bar{y}}$

d'équation  $\sum \sqrt{\lambda_i} (x_i - \bar{x}_i)^2 = \varepsilon > 0$  dans les axes principaux de la forme

$(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j})$ , les  $\lambda_i > 0$  étant les demi-longueurs de ces axes. Pour  $\xi \in \mathcal{E}_{\bar{x}}$

on a  $\rho(\bar{x}, \xi) = \varepsilon$ . On commence par minimiser  $I(\gamma)$  avec  $\gamma$  joignant  $\xi \in \mathcal{E}_{\bar{x}}$  à  $\eta \in \mathcal{E}_{\bar{y}}$



C'est un problème dont les extrémités  $(\xi, t_0)$ ,  $(\eta, t)$  sont variables mais décrivent une sous-variété compacte de  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ . Dans ce cas  $\rho(\xi, \eta)$  est atteint par une courbe  $\gamma$  joignant  $\bar{\xi}$  à  $\bar{\eta}$  (voir par exemple [15]) et la solution du problème s'obtient en joignant  $x$  à  $\bar{\xi}$ ,  $y$  à  $\bar{\eta}$  par des rayons des ellipsoïdes.

On obtiendra toujours, pour le cas où  $V$  s'annule seulement en deux points de l'espace  $\mathbb{R}^n$  une solution dans le cas général en approchant  $V$  par son hessien au voisinage de ces deux points.

Remarque :

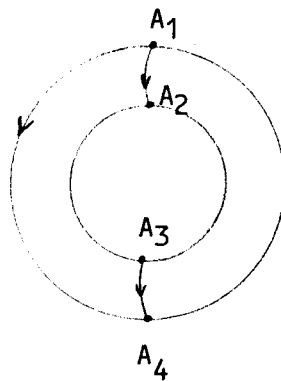
J'ignore s'il existe un théorème qui donne un énoncé d'existence d'instantons c'est-à-dire de courbes qui donnent effectivement  $\rho(\bar{x}, \bar{y})$  dans le cas où  $V$  s'annule en plus de deux points de  $\mathbb{R}^n$ .

Même dans le cas des lignes de plus grande pente sur une variété, le problème ne semble pas simple ; c'est un problème de détermination des courbes séparatrices du système

$$\dot{\gamma} = \pm \text{grad } h$$

joignant deux positions d'équilibre.

Par exemple si l'on prend la fonction altitude  $h$  sur le tore vertical,  $\rho(A_1, A_2)$   $\rho(A_1, A_4)$  sont atteints mais  $\rho(A_1, A_3)$  ne l'est pas



On pourrait penser que dans les calculs asymptotiques spectraux des sections précédentes seules interviennent les nombres  $\rho(\bar{x}, \bar{y})$  mais nous allons voir que les instantons (c'est-à-dire les géodésiques qui donnent  $\rho(\bar{x}, \bar{y})$ ) aussi interviennent.

#### D. LES MATRICES DU PETIT COMPLEXE.

Il reste maintenant à examiner les deux derniers points énoncés en fin de la section A précédente :

Etant donné le petit complexe

$$d_t^p : X_p \rightarrow X_{p+1} \quad p = 0, \dots, n ,$$

les éléments de matrice

$$\langle \psi_{A_k^{(p+1)}}(t), d_t^p \psi_{A_\ell^{(p)}}(t) \rangle$$

ont des parties principales déterminées par les instantons  $[A_k^{(p+1)} \rightarrow A_\ell^{(p)}]$  .

Ceci n'est pas difficile à admettre d'après tout ce qui précède mais il reste à déterminer exactement cette contribution. Ainsi qu'on l'a déjà dit, E. Witten donne cette contribution en s'appuyant sur des arguments empruntés à la physique-mathématiques des supersymétries ([21] , p. 672).

---

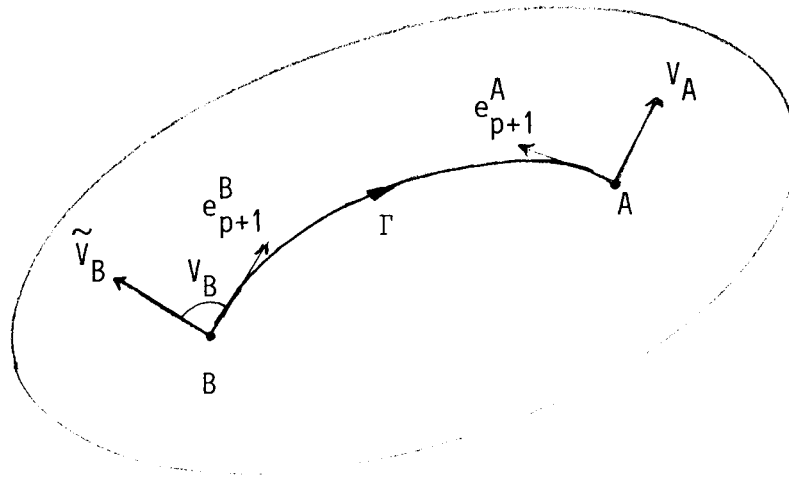
Soit B un point critique d'indice p+1 de h ; on suppose que le hessien de h au point B a des valeurs propres  $\lambda_i$  telles que :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{p+1} < 0 < \lambda_{p+1} < \dots < \lambda_n .$$

Soit A un point critique d'indice p de h , on suppose que le hessien de h au point A a des valeurs propres  $\mu_i$  telles que

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p < 0 < \mu_{p+1} < \dots < \mu_n .$$

Supposons aussi que  $h(B) > h(A)$  ; alors on peut dire que "génériquement" un instanton  $\Gamma : B \rightarrow A$  part tangentiellement (à l'instant  $-\infty$ ) au  $(p+1)^{\text{ème}}$  vecteur propre  $e_{p+1}^B$  de  $\nabla dh$  en B et arrive tangentiellement (à l'instant  $+\infty$ ) au  $(p+1)^{\text{ème}}$  vecteur propre  $e_{p+1}^A$  de  $\nabla dh$  au point A.



Si l'on revient au calcul des inégalités faibles de Morse au § (d), section C de la partie I, on voit que la fonction propre  $\tilde{\psi}_B$  de  $H_t^{p+1}$  relativement à  $B$  est proportionnelle à  $\theta_B^1 \wedge \dots \wedge \theta_B^{p+1}$  tandis que  $\tilde{\psi}_A$  est proportionnelle à  $\theta_A^1 \wedge \dots \wedge \theta_A^p$ . On peut admettre que  $\tilde{\psi}_A, \tilde{\psi}_B$  sont les parties principales de  $\psi_A, \psi_B$  aux points  $A$  et  $B$ . Dans ces conditions, si  $\psi_A$  et  $\psi_B$  sont choisies positivement proportionnelles à  $\theta_A^1 \wedge \dots \wedge \theta_A^p$  et  $\theta_B^1 \wedge \dots \wedge \theta_B^{p+1}$ ; on trouve que la contribution de  $\Gamma$  à la matrice  $\langle \psi_B, d_t^p \psi_A \rangle$  a pour expression  $+\exp(-t(h(B)-j(A)))$ .

Remarque finale: on trouve dans l'article [20] le développement des fonctions propres autour des minimum d'un potentiel dans  $\mathbf{R}^n$ .

Remarque.

On se reportera à l'exposé [23] de G. Henniart pour quelques détails supplémentaires concernant les problèmes posés par la formalisation des méthodes de E. Witten, ainsi que pour d'autres applications de ces méthodes.

## BIBLIOGRAPHIE.

- [13] R. CARMONA and B. SIMON, *Pointwise bounds of Eigenfunctions V.*, Commun. Math. Phys. 80 (1981), 59-81.
- [14] R.P. FEYNMAN, *Statistical Mechanics*, Benjamin 1972.
- [15] W.H. FLEMING - R.W. RISHEL, *Deterministic and stochastic optimal control*. Springer-Verlag 1975.
- [16] B. HELFFER - J.S. SJOSTRAND, Voir réf. [9], partie I.
- [17] R. JACKIW, Voir réf. [4], introduction.
- [18] B. SIMON, *Instantons, double wells and large deviations*, Bulletin of A.M.S. 8 (2), 1983, 323-326.
- [19] B. SIMON, *Functional integration and quantum physics*, Ac. Press 1979.
- [20] B. SIMON, Voir réf [11], partie I.
- [21] E. WITTEN, Voir réf. [6], introduction et [12], partie I.
- [22] E. WITTEN, *Instantons, the quark model and the 1/N expansion*, Nuclear physics, B. 149 (1979) 285-320.
- [23] G. HENNIART, *Les inégalités de Morse, d'après E. Witten*, Séminaire Bourbaki, n° 617, Novembre 1983.