PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

PETR NEMEC

Remarque sur les sommes directes des modules de type dénombrable

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 4
, p. 37-48

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_4_37_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1978 t. 15-4

REMARQUE SUR LES SOMMES DIRECTES DES MODULES DE TYPE DENOMBRABLE

par Petr NEMEC

La théorie classique des groupes abéliens de torsion permet plusieurs généralisations au cas des modules sur un anneau non nécessairement commutatif. On peut s'interroger sous quelles conditions les théorèmes classiques restent valables dans ce cas. Parmi les exemples de telles investigations on peut citer la théorie de la décomposition primaire au sens de Dickson ([5] et [6]) qui généralise le théorème suivant lequel tout groupe abélien de torsion est une somme directe de ses composants p-primaires, pour différents premiers p. Les anneaux ayant cette propriété avaient été caractérisé par Alin [1] . T.S. Shores [13], [14] a étudié des anneaux où tout module de Loewy (c'est-à-dire un module étant de torsion dans la théorie de torsion engendrée par tous les modules simples) de type fini est une somme directe des modules monogènes.

D'autres travaux ont rapport à la généralisation des théorèmes classiques concernant p-groupes. La notion du p-groupe correspond dans le cas général à celle d'un module I-primaire, I étant un idéal à gauche maximal. L. Bican [2] a généralisé le critère de Kulikov et les théorèmes de Prüfer, en démontrant que sous la

condition (X) (voir ci-dessous) la validité de ces théorèmes est équivalente à la vérification de la condition (Y). Dans une autre direction, R.B. Warfield, Jr. [15] a généralisé les résultats principaux concernant les p-groupes totalement projectifs, notamment le théorème d'Ulm, aux modules mixtes sur un anneau de valuation discrète.

Dans le cas des p-groupes, la théorie structurelle donnant la description au moyen des invariants est très satisfaisante et il est possible de dire que ses résultats ont une forme définitive (voir par exemple [8, §§80-83]). Dans [9], [10] et [11] nous avons étudié la généralisation de ces résultats au cas des modules I-primaires. Comme il suit des Propositions 1 et 3 ci-dessous, pour que la théorie structurelle des modules I-primaires soit analogue à celle des p-groupes, il faut que les conditions (X) et (Y) soient vérifiées. Afin d'obtenir une analogie complète il nous fallait introduire une autre condition, notamment la condition (P) ci-dessous.

Les exemples d'anneaux vérifiant ces trois conditions sont abondants. Dans [11] , nous avons démontré que tout anneau héréditaire à gauche vérifiant les conditions (X) et (Y) vérifie aussi la condition (P). Donc, d'après [4, chap. VII, par. 2, ex. 7] , tout domaine de Dedekind, c'est-à-dire tout anneau intègre héréditaire, peut servir d'exemple.

Le but de ce court article est de donner (sous les conditions (X), (Y) et (P)) une caractérisation des sommes directes des modules I-primaires réduits de type dénombrable (c'est-à-dire possédant une famille dénombrable de générateurs), en généralisant au cas des modules le résultat de Nunke [12] . La méthode de démonstration est en principe la même que dans le cas des groupes [8, Theorem 82.4] . D'abord, il sera utile de présenter

les définitions nécessaires et de rappeler quelques résultats de [9], [10] et [11] (l'implication (iv) ⇒ (iii) dans la proposition 1 provient de [14], l'équivalence des assertions (i)-(iv) et (ix) dans la proposition 3 et la proposition 5 proviennent de [2] ; les propositions 2,4 proviennent de [3]) donnant une brève récapitulation de la situation dans le cas des modules I- rimaires.

Soit R un anneau (non nécessairement commutatif) et soit I un idéal à gauche maximal. Pour tout module M (les modules sont considérés à gauche) définissons $r(M) = IM$ et $p(M)$ comme la somme de tous les sous-modules de M isomorphes à R/I (c'est-à-dire $p(M)$ est le pied correspondant à R/I), $r^0(M) = M$, $p_0(M) = 0$, $r^{\alpha+1}(M) = r(r^\alpha(M))$, $p_{\alpha+1}(M)/p_\alpha(M) = p(M/p_\alpha(M))$ pour tout ordinal α et $r^\alpha(M) = \bigcap_{\alpha<\beta} r^\beta(M)$, $p_\alpha(M) = \bigcap_{\alpha<\beta} p_\beta(M)$ pour α ordinal- limite. On note $\ell^p(M)$ le plus petit parmi les ordinaux α tels que $p_\alpha(M) = p_{\alpha+1}(M)$, et $\ell_r(M)$ le plus petit des ordinaux β tels que $r^\beta(M) = r^{\beta+1}(M)$, $\tilde{p}(M) = p_{\ell^p(M)}(M)$ et $\bar{r}(M) = r^{\ell_r(M)}(M)$. Enfin, $E(M)$ dénote une enveloppe injective de M.

Un module M est dit I-primaire si $\tilde{p}(M) = M$, divisible si $r(M) = M$ et réduit si $\bar{r}(M) = 0$.

Soit M un module I-primaire. Pour tout $x \in M$, définissons $h_M(x) = \alpha$ si $x \in r^\alpha(M) \setminus r^{\alpha+1}(M)$ et $h_M(x) = \infty$ si $x \in \bar{r}(M)$. Pour tout ordinal α, nous posons $M^0 = M$, $M^{\alpha+1} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^n M^\alpha$, $M^\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} M^\beta$ si α est limite, $M_\alpha = M^\alpha/M^{\alpha+1}$, $U_\alpha(M) = p(r^\alpha(M))/p(r^{\alpha+1}(M))$. Si I est bilatère, alors $U_\alpha(M)$ sont des espaces vectoriels sur le corps gauche R/I et nous définissons $f_\alpha(M) = \dim_{R/I} U_\alpha(M)$.

Un sous-module N d'un module I-primaire M est admissible si $R^{\alpha}(M/N) = r^{\alpha}(M)+N/N$ pour tout ordinal α, et balancé s'il est admissible et $r^{\alpha}(N) = N \cap r^{\alpha}(M)$ pour tout ordinal α.

Un système $\mathscr{H}$ de sous-modules de M est appelé système de Hill si $O \in \mathscr{H}$, si tout $N \in \mathscr{H}$ est admissible dans M, si $\sum_{i \in J} N_i \in \mathscr{H}$ pour tout sous-système $\{N_i \mid i \in J\}$ de $\mathscr{H}$ et, si, S étant un ensemble dénombrable d'éléments de M et N appartenant à $\mathscr{H}$, alors il existe $K \in \mathscr{H}$ tel que $N \cup X \subseteq K$ et K/N est un module de type dénombrable.

Un module I-primaire réduit qui possède un système de Hill est appelé module de Hill.

Enfin, considérons les conditions suivantes pour un idéal à gauche maximal I :

(X) Si K est un idéal à gauche tel que R/K est I-primaire alors K est bilatère.

(XX) Si K est un idéal à gauche tel que R/K est I-primaire alors K contient un idéal bilatère L tel que R/L est I-primaire.

(YL) I est bilatère et I/I^2 est un module simple.

(YR) I est bilatère et I/I^2 est un module à droite simple.

(Y) I vérifie (YL) et (YR).

(W) $\ell^{p}(M) < \omega$ pour tout module I-primaire monogène M.

(Z) $I^n = I^{n+1}$ pour tout n.

(P) Il existe une suite transfinie des modules H_{α} telle que $H_o = 0$, $r^{\alpha}(H_{\alpha+1}) \cong R/I$, $H_{\alpha+1}/r^{\alpha}(H_{\alpha+1}) \cong H$ pour tout ordinal α et $H_{\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} H_{\beta}$ si α est un ordinal-limite.

REMARQUE. - Pour que la condition (YL) soit vérifiée, il suffit que I/I^2 soit un module monogène. Donc, tout anneau commutatif principal vérifie (X) et (Y) pour tous les idéaux maximaux.

Les démonstrations des propositions 1-13 peuvent être trouvées dans [9], [10] et [11].

PROPOSITION 1. - *Si* I *est un idéal à gauche maximal alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) I *vérifie* (YL) *et* (W).

(ii) I *vérifie* (YL) *et* (XX).

(iii) Pour tout idéal à gauche K, R/K *est* I*-primaire si et seulement s'il existe* n ≥ 0 *tel que* $K = I^n$.

(iv) I *vérifie* (YL) *et* (X).

PROPOSITION 2. - *Si* I *vérifie* (X), (Y) *et* N *est un sous-module de type fini d'un module* I*-primaire* M *alors l'ensemble* $\{h_M(X)\ x \in N\}$ *est fini.*

PROPOSITION 3. - *Si* I *vérifie* (X) *alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Un module I*-primaire* M *est une somme directe de modules monogènes si et seulement s'il existe une suite croissante des sous-modules* $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots$ *telle que* $M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ *et pour tout* $n \geq 0$ *il existe* $m_n > 0$ *tel que* $h_M(x) < m_n$ *pour tout* $x \in M_n$.

(ii) Tout module I*-primaire* M *de type dénombrable tel que* $h_M(x) < \omega$ *pour tout* $0 \neq x \in M$ *est une somme directe de modules monogènes.*

(iii) Tout module I*-primaire* M *tel que* $\ell^p(M) < \omega$ *est une somme directe de modules monogènes.*

(iv) Tout module I*-primaire de type fini est une somme directe de modules monogènes.*

(v) Tout module I*-primaire artinien et noéthérien est une somme directe de modules monogènes.*

(vi) Tout module I *-primaire cocyclique* M *possédant une suite de composition de longueur* 3 *tel que* $I^2M = 0$ *est une somme directe de modules monogènes (et donc est monogène).*

(vii) $p(\widetilde{p}(E(R/I))/(R/I))$ *est un module simple.*

(viii) I *vérifie la condition* (YR).

(ix) I *vérifie la condition* (Y).

PROPOSITION 4. - *Si* I *vérifie les conditions* (X) *et* (Y) *alors tout module* I*-primaire est une somme directe d'un module divisible et d'un module réduit.*

PROPOSITION 5. - *Si* I *vérifie les conditions* (X) ,(Y) , (Z) *et* M *est un module* I*-primaire alors* M *est un sous-module essentiel d'un module* I*-primaire divisible et les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) M *est divisible et non-nul.*

(ii) M *est isomorphe à une somme directe de* $\widetilde{p}(E(R/I))$.

(iii) M *est un objet injectif dans la sous-catégorie de tous les modules* I*-primaires.*

PROPOSITION 6. - *Les sommes directes ainsi que les facteurs directs des modules de Hill sont les modules de Hill.*

PROPOSITION 7. - *Si* I *vérifie* (X) *et* (Y) *alors les propriétés suivantes des modules de Hill* M, N *sont équivalentes :*

(i) M *et* N *sont isomorphes.*

(ii) $f_\alpha(M) = f_\alpha(N)$ *pour tout ordinal* α.

PROPOSITION 8. - *Si* I *vérifie* (X),(Y) *et* M,N *sont des sommes directes des modules* I*-primaires réduits de type dénombrable alors tous les* M_α *sont des sommes directes des modules monogènes et les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) M *et* N *sont isomorphes.*

(ii) $M_\alpha \cong N_\alpha$ *pour tout ordinal* α.

(iii) $f_\alpha(M) = f_\alpha(N)$ *pour tout ordinal* α.

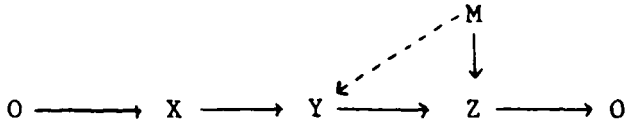
PROPOSITION 9. - *Si* I *vérifie* (X),(Y) *et* $\mathrm{Ext}^2(X,R/I) = 0$ *pour tout module* I*-primaire réduit* X *, en particulier, si* R *est héréditaire à gauche, alors* I *vérifie la condition* (P).

PROPOSITION 10. - *Si* I *vérifie* (X), (Y)*et* (P) *, si* M *est un module* I*-primaire réduit et si* $\ell_r(M) = \tau$ *alors* I *vérifie* (Z), *les modules* H_α *sont uniques (à un isomorphisme près) et il existe un module* I*-primaire* $N = \bigsqcup_{i \in K} N_i$ *et un épimorphisme* $f : N \to M$ *tels que* Ker f *est un sous-module balancé de* N *et pour tout* $i \in K$ *il existe* $\sigma < \tau$ *et* $n < \omega$ *tels que* $N_i \cong H_{\sigma+n}$.

PROPOSITION 11. - *Si* I *vérifie* (X), (Y), (P) *et* M *est un module* I*-primaire réduit alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) M *est un module de Hill.*

(ii) Tout diagramme



où X, Y, Z *sont des modules* I*-primaires réduits et* X *est un sous-module balancé de* Y, *peut être complété.*

(iii) M *est un facteur direct d'une somme directe des modules* H_α.

PROPOSITION 12. - *Si* I *vérifie* (P) *alors la Proposition 8 reste valable pour les modules de Hill quelconques.*

PROPOSITION 13. - *Supposons que* I *vérifie* (X),(Y) ,(P) *et que* $\mathcal{F}$ *soit une classe de modules* I*-primaires réduits telle que*
(i) $\mathcal{F}$ *contient tous les modules de Hill,*
(ii) $\mathcal{F}$ *est stable par sommes directes,*
(iii) si $M,N \in \mathcal{F}$ *et* $f_\alpha(M) = f_\alpha(N)$ *pour tout ordinal* α *alors* $M \cong N$.

Alors $\mathcal{F}$ *est la classe des modules de Hill.*

Après cette récapitulation , nous sommes en position de présenter le résultat de la remarque qui fait l'objet de cet article. Nous utiliserons la modification suivante de la Proposition 9.10 de [7] :

LEMME 14. - *Soit* R *un anneau et* $\mathcal{X}$ *soit un cardinal infini. Si un module* M *est une somme directe des modules dont chacun possède une famille de générateurs de cardinalité inférieure ou égale à* $\mathcal{X}$ *et si* N *est un facteur direct de* M , *alors* N *est aussi une somme directe des modules possédant une famille de générateurs de cardinalité inférieure ou égale à* $\mathcal{X}$.

DEMONSTRATION. - La démonstration se déroule de la même façon que celle du résultat de la théorie des groupes mentionné ci-dessus. C'est-à-dire, soit $M = \coprod_{i \in J} M_i = N \oplus K$ et pour tout $i \in J$, soit X_i une famille de générateurs de M_i avec $|X_i| \leq \mathcal{X}$. Alors chaque $x \in M$ s'exprime uniquement comme $x = x_N + x_K = \Sigma\, x_i$ avec $x_N \in N$, $x_K \in K$, $x_i \in M_i$.

Soit $i \in J$ quelconque. Nous allons construire une suite croissante des modules U_j , $j=0,1,\ldots$, telle que $U_j = \coprod_{i \in J_j} M_i$, $|J_j| < \mathcal{X}$ et pour

tout $x \in \bigcup_{i \in J_i} X_i$, $x_N, x_K \in U_{j+1}$: d'abord posons $U_o = M_i$. Si U_j a déjà été construit, nous définissons J_{j+1} comme l'ensemble de tous les $i \in J$ tels que soit $(x_N)_i \neq 0$, soit $(x_K)_i \neq 0$ pour un $x \in \bigcup_{i \in J_j} X_i$. Evidemment, $|J_{j+1}| < \chi$ et $U_{j+1} = \coprod_{i \in J_{j+1}} M_i$ possède des propriétés nécessaires. Maintenant, nous définissons $A_i = \bigcup_{j=o}^{\infty} U_j$. Alors il existe $L_i \subseteq J$ tel que $A_i = \coprod_{j \in L_i} M_j$, A_i possède une famille de générateurs de cardinalité inférieure ou égale à χ et $A_i = (A_i \cap N) \oplus (A_i \cap K)$. En effet, si $y \in A_i$ alors il existe j tel que $y \in U_j$ et $y_N, y_K \in U_{j+1} \subseteq A_i$. Donc $A_i \subseteq (A_i \cap N) \oplus (A_i \cap K)$ et l'autre inclusion est claire.

Maintenant, nous allons construire une suite croissante transfinie $\{B_\alpha\}$ des sous-modules de M telle que $B_\alpha = \coprod_{i \in I} M_i$, $B_\alpha = (N \cap B_\alpha) \oplus (K \cap B_\alpha)$ et $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ possède une famille de générateurs de cardinalité inférieure ou égale à χ . Posons $B_o = 0$. Si α est limite, $B_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta$ possède des propriétés nécessaires. Enfin, s'il existe $i \in J \setminus I_\alpha$, nous définissons $B_{\alpha+1} = B_\alpha + A_i$ ($B_{\alpha+1} = B_\alpha$ dans le cas contraire). Dans ce cas, $B_{\alpha+1} = \coprod_{j \in I_\alpha \cup L_i} M_j$ et $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ possède une famille de générateurs de cardinalité inférieure ou égale à χ . Si $x \in B_{\alpha+1}$ alors ils existent $u \in B_\alpha$, $v \in A_i$ tels que $x = u+v$, mais on a $v_K, v_N \in A_i$ d'après les propriétés de A_i et $u_k, u_n \in B_\alpha$ d'après l'hypothèse d'induction, donc $x_K = u_K + v_K \in B_{\alpha+1}$ et $x_N = u_N + v_N \in B_{\alpha+1}$. Il est aussi évident qu'il existe un ordinal σ avec $M = B_\sigma$.

Pour tout $\alpha < \sigma$, $N \cap B_\alpha$ est un facteur direct de B_α qui est à son tour un facteur direct de M, donc $N \cap B_\alpha$ est un facteur direct de M et par conséquent de $N \cap B_{\alpha+1}$. Si $N \cap B_{\alpha+1} = (N \cap B_\alpha) \oplus N_\alpha$ alors $N = \coprod_{\alpha<\sigma} N_\alpha$ et $N_\alpha = (N \cap B_{\alpha+1})/(N \cap B_\alpha)$.
Comme $B_{\alpha+1}/B_\alpha = (N \cap B_{\alpha+1})/(N \cap B_\alpha) \oplus (K \cap B_{\alpha+1})/(K \cap B_\alpha)$, N_α possède une famille de générateurs de cardinalité inférieure ou égale à χ et la démonstration est achevée.

THEOREME 15. - *Si* I *est un idéal à gauche maximal vérifiant* (X),(Y),(P) *et* M *est un module* I*-primaire réduit alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) M *est une somme directe des modules de type dénombrable.*
(ii) M *est un module de Hill et* $\ell_r(M) \leq \omega_1$ *où* ω_1 *est le plus petit ordinal non-dénombrable.*

DEMONSTRATION. - (i) $\Rightarrow$ (ii) Si N est un module I-primaire réduit de type dénombrable alors évidemment N est un module de Hill et d'après la proposition 2, l'ensemble $\{h_N(x) \mid x \in N\}$ est dénombrable donc $\ell_r(N) < \omega_1$. Si $M = \coprod_{i \in K} N_i$, où tous les N_i sont de type dénombrable, alors M est un module de Hill d'après la proposition 6 et $\ell_r(M) = \sup_{i \in K} \ell_r(N_i) < \omega_1$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). D'après la proposition 10, il existe un épimorphisme $f : N \longrightarrow M$, où Ker f est balancé dans N, $N = \coprod_{i \in L} H_{\sigma_i}$ et $\sigma_i < \omega_1$ pour tout $i \in L$. Comme évidemment tout module de Prüfer H_σ possède une famille de générateurs de cardinalité $|\sigma|$, N est une somme directe des modules de type dénombrable. D'après la proposition 11, M est un facteur direct de N et une application du Lemme 14 achève la démonstration.

Ce court article a été préparé lorsque l'auteur effectuait un stage à l'Université Claude Bernard - Lyon I. L'auteur veut exprimer ici sa profonde reconnaissance aux membres d'U.E.R. Mathématiques, et particulièrement à Monsieur le Professeur MAURY, pour leur amabilité et leur soutien pendant ce stage.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J.S. ALIN, *Primary decomposition of modules* Math. Z. 107 (1968), 319-325.

[2] L. BICAN, *Kulikov's criterion for modules,* J. Reine Angew Math., 288 (1976), p. 154-159.

[3] L. BICAN, *The structure of primary modules,* Acad.Univ. Carolinae Math. Phys. 17,2 (1976), p. 3-12

[4] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, Hermann, Paris.

[5] S.E. DICKSON, *Decomposition of modules I, classical rings,* Math. Z. 90 (1965), p. 9-13.

[6] S.E. DICKSON, *Decomposition of modules II, Rings without chain conditions,* Math. Z. 104 (1968), p. 349-357.

[7] L. FUCHS, *Infinite abelian groups I,* Academic Press, New York and London 1970.

[8] L. FUCHS *Infinite abelian groups II,* Academic Press, New York and London 1973.

[9] P. NEMEC, *Les modules primaires,* Thèse, Praha 1977 (en tchèque).

[10] P. NEMEC, *Ulm's theorem for modules* (à paraître).

[11] P. NEMEC, *Prüfer modules,* (à paraître).

[12] R.J. NUNKE, *Homology and direct sums of countable abelian groups,* Math.Z. 101 (1967), 182-212.

[13] T.S. SHORES, *Decompositions of finitely generated modules,* Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1972), p. 445-450.

[14] T.S. SHORES, *The structure of Loewy modules,* J. Reine Angew. Math. 254 (1972) p. 204-220.

[15] R.B. WARFIELD JR., *Classification theorems for p-groups and modules over a discrete valuation ring,* Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 88-92.
