PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

MICHEL GUEUGNON

Perturbations singulières et noyaux de Poisson

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 2
, p. 1-112
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_2_A1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1978 t.15-2

PERTURBATIONS SINGULIERES ET NOYAUX DE POISSON

par Michel GUEUGNON

INTRODUCTION. -

Le but de ce travail est d'étudier certaines perturbations singulières relatives au problème de Dirichlet dans le demi-espace $\mathbb{R}_+^n$. Deux approches différentes utilisant les espaces $T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n)$, de J.L. Lions et E. Magénès [1] seront développées dans ce papier. Dans la première, on considère un opérateur elliptique B , d'ordre $2m'$ et une famille d'opérateurs $B_\varepsilon = \varepsilon A + B$, pour $\varepsilon \in]0, 1]$, d'ordre $2m$ $(m > m')$ satisfaisant l'hypothèse de Greenlee [1] . On étudie alors la convergence d'un problème de Dirichlet relatif à B_ε et on définit les correcteurs selon J.L. Lions [1] . La méthode utilisée, basée sur des théorèmes d'existence et d'unicité est classique, et ne fait que prolonger certains résultats de W.M. Greenlee [1] D. Huet [1] , [2] , J.L. Lions [1] . Dans la deuxième approche, on considère des opérateurs elliptiques de la forme $L(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1}, \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_n})$ où L est un polynôme à n variables d'ordre $2m_1$ et le problème associé $Lu_\varepsilon = 0$ avec données de Dirichlet au bord. On utilise la donnée explicite d'une solution du problème au moyen de noyaux de Poisson selon P. Fife [1] . Celui-ci ne donne qu'un résultat de convergence ponctuelle et intérieure, mais n'étudie pas la convergence sur la frontière du domaine. Dans le présent travail, on utilise des méthodes de transformation de Fourier pour montrer une convergence globale dans des espaces $T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n)$ en imposant certaines hypothèses de régularité à l'origine des données frontières. Des exemples simples sont donnés enfin pour montrer l'utilisation de cette deuxième méthode au calcul de correcteurs et pour comparer les résultats obtenus à ceux de M.J. Vishik et L.P. Ljusternik (cf. P. Fife [1]) et à ceux de J.L. Lions [1] .

Le chapitre 0 est un rappel succinct de propriétés des espaces de Sobolev $H^k(\mathbb{R}^{n-1})$ et $T^{k,r}(\mathbb{R}_+^n)$ (J.L. Lions et E. Magénès [1]) qui seront utilisées dans ce travail.

Le chapitre I traite la première méthode. Le paragraphe (1.2) étend le théorème 6.15 de D. Huet [1] dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ aux espaces $T^{k,r}(\mathbb{R}^n_+)$. Les paragraphes (1.3) et (1.4) définissent des correcteurs d'ordre zéro pour le problème homogène et non homogène respectivement. Le paragraphe (1.5) définit des correcteurs d'ordre supérieur.

Les chapitres II, III, IV, V traitent la deuxième méthode.

Le chapitre II donne la construction des Noyaux de Poisson de P. Fife [1] et étudie les propriétés, nécessaires à la suite, de certaines de leurs éléments constitutifs dans le cas des opérateurs frontières de Dirichlet. On traite aussi dans ce chapitre le cas particulier où les racines du polynôme caractéristique sont simples, car dans ce cas les noyaux sont obtenus directement à partir des racines.

Dans le chapitre III on donne la solution de P. Fife [1] du problème de Dirichlet homogène et quelques-unes de ses propriétés de régularité lorsque les données frontières sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ d'une part. D'autre part on étend la solution et on en étudie sa régularité dans le cas où les données au bord sont évaluées avec les normes de Hörmander. (Agmon-Douglis-Niremberg [1]). Ensuite on traite le cas particulier $m_o = 0$, car on peut alors faire le lien avec le théorème d'existence et d'unicité 7.3 de Lions et Magénès [1] , les deux solutions coïncident alors. Enfin on étudie le cas particulier $m_1 = m_o$ qui est le cas traité par Agmon-Douglis-Niremberg [1] , car ce sera le cas du problème limite de notre problème de perturbations singulières.

Dans le chapitre IV on considère le problème dépendant de ε et on donne une solution dépendant de ε de ce problème au moyen de noyaux de Poisson du chapitre II. On démontre alors un théorème de convergence de cette solution vers la solution du problème limite étudié dans le chapitre III et on donne des estimations sur la rapidité de cette convergence.

Dans le chapitre V, on montre sur des exemples simples comment la donnée explicite d'une solution du problème perturbé permet d'avoir des développements asymptotiques et aussi des correcteurs assez simples. On fait entre autres une comparaison de ces résultats ainsi obtenus et ceux de J.L. Lions [1] et M.J. Vishik et L.P. Ljusternik donnés dans P. Fife [1] .

CHAPITRE O

Rappels sur les espaces $H^k(\mathbb{R}^{n-1})$ et $T^{k,r}(\mathbb{R}^n_+)$

0.1.- Espaces $H^k(\mathbb{R}^{n-1})$, k réel quelconque.

Soit $\mathbb{R}^{n-1}$ l'espace euclidien réel à $n-1$ dimensions. On notera $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ l'élément générique de cet espace.

On note $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ l'espace des fonctions à valeurs réelles, de carré sommable sur Ω, muni de la norme :

(0.1.1) $$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^2\, dx\right)^{1/2} .$$

Soit S'_x l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^{n-1}$. On désigne par $\mathfrak{F}_x$ la transformation de Fourier en x isomorphisme de S'_x sur S'_ξ, où $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ est la variable duale de x. On désigne par $\bar{\mathfrak{F}}_\xi$ l'isomorphisme inverse de $\mathfrak{F}_x$.

Pour k réel quelconque, $H^k(\mathbb{R}^{n-1})$ est l'espace des $u \in S'_x$ tels que :

(0.1.2) $$[1 + |\xi|^2]^{k/2}\ \mathfrak{F}_x u \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

muni de la norme

(0.1.3) $$\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^{n-1})} = \|[1 + |\xi|^2]^{k/2}\,\mathfrak{F}_x u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}$$

Soit $p = (p_1, \ldots, p_{n-1})$, $|p| = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}$, on note :

$$D^p u = \frac{\partial^{p_2 + \ldots + p_{n-1}} u}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_{n-1}^{p_{n-1}}}$$ les dérivées étant prises au sens des distributions.

Alors lorsque k est un entier $\geqslant 0$ l'espace $H^k(\mathbb{R}^{n-1})$ est défini comme l'espace de Hilbert des distributions u sur $\mathbb{R}^{n-1}$ telles que $D^p u \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ pour $|p| \leqslant k$ muni de la norme :

$$(0.1.4) \qquad \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^{n-1})} = \left(\sum_{|p|\leqslant k} \|D^p u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{1/2}$$

et bien sûr il coïncide avec la définition précédente.

0.2.- Espaces $H^k(\mathbb{R}^n_+)$, k entier $\geqslant 0$.

On désigne par $\mathbb{R}^n_+$ le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ formé des points $(x,y) = (x_1,x_2,\dots,x_{n-1},y)$ qui vérifient $y > 0$.

On définit alors $H^k(\mathbb{R}^n_+)$, k entier $\geqslant 0$ comme précédemment avec (0.1.4).

0.3.- Espaces $H^k_o(\mathbb{R}^n_+)$, k entier $\geqslant 0$.

Ce sera par définition l'adhérence dans $H^k(\mathbb{R}^n_+)$ de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\mathbb{R}^n_+$.

0.4.- Espaces $H^{-k}(\mathbb{R}^n_+)$, k entier $\geqslant 0$.

Ce sera par définition le dual fort de $H^k_o(\mathbb{R}^n_+)$.

0.5.- Espaces $T^{k,r}(\mathbb{R}^n_+)$, k réel quelconque, r entier $\geqslant 0$.

Ce sera par définition l'espace des distributions u sur $\mathbb{R}^n_+$ telles que $D^p_x u \in H^k(\mathbb{R}^n_+)$ pour $|p| \leqslant r$. C'est un espace de Hilbert pour la norme :

$$(0.5.1) \qquad \|u\|_{T^{k,r}(\mathbb{R}^n_+)} = \left(\sum_{|p|\leqslant r} \|D^p_x u\|^2_{H^k(\mathbb{R}^n_+)} \right)^{1/2}$$

où D_x désigne la dérivation par rapport à la variable $x = (x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

On a l'inclusion algébrique et topologique suivante :

(0.5.2) $$T^{k,r}(\mathbb{R}^n_+) \subset T^{k',r'}(\mathbb{R}^n_+) \quad \text{pour} \quad k \geqslant k'$$
$$\text{pour} \quad r \geqslant r' \quad .$$

<u>Remarque 0.5.1</u>.- Pour une définition de $T^{k,r}(\mathbb{R}^n_+)$ avec r quelconque, cf. Lions et Magénès [1] . Dans ce travail, on utilisera seulement la définition 0.5.

0.6.- <u>Quelques inclusions utiles</u>.

(0.6.1) $$H^{k+r}(\mathbb{R}^n_+) \subset T^{k,r}(\mathbb{R}^n_+) \subset H^k(\mathbb{R}^n_+) \quad \text{pour} \quad r \geqslant 0 \ .$$

(0.6.2) $$H^k(\mathbb{R}^n_+) \subset H^{k'}(\mathbb{R}^n_+) \quad \text{pour} \quad k \geqslant k'$$

(0.6.3) $$T^{m,r}_o(\mathbb{R}^n_+) = T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+) \cap H^m_o(\mathbb{R}^n_+) \quad \text{pour} \quad r \ \text{entier} \geqslant 0 \ .$$

CHAPITRE I

Problèmes de perturbations singulières relatives au problème de Dirichlet dans le demi-espace Calcul de Correcteurs

1.1.- Position du problème et rappels.

Soient Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$ (dans ce travail $\Omega = \mathbb{R}^n_+$), m et m' des entiers avec $0 \leqslant m' < m$. Pour $u, v \in H^m(\Omega)$ [resp. $H^{m'}(\Omega)$] on définit :

$$(1.1.1) \qquad a(u,v) = \sum_{|p|,|q| \leqslant m} (a_{pq} D^q u, D^p v)_{L^2(\Omega)}$$

$$\left[\text{resp. } (1.1.2) \quad b(u,v) = \sum_{|p|,|q| \leqslant m'} (b_{pq} D^q u, D^p v)_{L^2(\Omega)}\right] .$$

On suppose que les coefficients a_{pq} $(|p|, |q| \leqslant m)$ et $b_{pq}(|p|, |q| \leqslant m')$ sont des restrictions à Ω de fonctions de $B(\bar{\Omega})$ (espace des fonctions complexes indéfiniment différentiables et bornées ainsi que chacune de leurs dérivées sur l'adhérence $\bar{\Omega}$ de Ω). Les formes $a(u,v)$ et $b(u,v)$ sont continues sur $H^m(\Omega)$ et $H^{m'}(\Omega)$ respectivement. Il existe donc des constantes positives M et N telles que

$$(1.1.3) \qquad |a(u,v)| \leqslant M \|u\|_{H^m(\Omega)} \|v\|_{H^m(\Omega)} \qquad \forall (u,v) \in H^m(\Omega)$$

et

$$(1.1.4) \qquad |b(u,v)| \leqslant N \|u\|_{H^{m'}(\Omega)} \|v\|_{H^{m'}(\Omega)} \qquad \forall (u,v) \in H^{m'}(\Omega) .$$

Les opérateurs différentiels associés à $a(u,v)$ et $b(u,v)$ sont respectivement

(1.1.5) $$A = \sum_{|p|,|q|\leqslant m} (-1)^{|p|} D^p[a_{pq}(x) D^q]$$

(1.1.6) $$B = \sum_{|p|,|q|\leqslant m'} (-1)^{|p|} D^p[b_{pq}(x) D^q] \quad .$$

H1.- On suppose $b(u,v)$ $H_o^{m'}(\Omega)$-elliptique, c'est-à-dire qu'il existe $\gamma > 0$:

(1.1.7) $$|b(u,u)| \geqslant \gamma \|u\|^2_{H^{m'}(\Omega)} \qquad \forall\, u \in H_o^{m'}(\Omega) \quad .$$

H2.- On suppose qu'il existe α et $\beta \geqslant 0$ telles que pour $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_o$:

(1.1.8) $$|\varepsilon\, a(u,u) + b(u,u)| \geqslant \alpha\, \varepsilon \|u\|^2_{H^m(\Omega)} + \beta \|u\|^2_{H^{m'}(\Omega)} \qquad \forall\, u \in H_o^m(\Omega)$$

On a alors le résultat suivant. (Théorème 6.15, p. 138, D. Huet [1]) .

<u>Théorème 1.1.- Soit</u> h <u>donnée dans</u> $H^{-m'}(\Omega)$. <u>Pour</u> $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_o$, <u>on désigne par</u> u_ε <u>la solution du problème de Dirichlet</u> :

(1.1.9) $$\begin{cases} u_\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \\ (\varepsilon A + B)\, u_\varepsilon = h \end{cases}$$

<u>Problème qui est équivalent à</u> :

(1.1.9)' $$\varepsilon\, a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, v) = (h, v) \qquad \forall\, v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \quad .$$

<u>On désigne par u la solution du problème</u> :

(1.1.10) $$\begin{cases} u \in \overset{\circ}{H}{}^{m'}(\Omega) \\ Bu = h \end{cases}$$

<u>Problème qui est équivalent à</u> :

(1.1.10)' $$b(u,v) = (h,v) \qquad \forall\, v \in \overset{\circ}{H}{}^{m'}(\Omega) \quad .$$

<u>Alors, quand $\varepsilon \to 0$</u> , u_ε <u>tend vers u dans $H^{m'}(\Omega)$</u> .

On utilisera aussi le lemme suivant (lemme 2.1 page 278 , Lions et Magénès [1]).

Lemme 1.1.- *Sous les hypothèses faites ci-dessus dans le cas où* $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, *soient* u_ε *la solution de* (1.1.9) *avec* $h \in T^{k,r}(\mathbb{R}^n_+)$, $k \geq -m$ *et* $r \geq 0$; *alors* $u_\varepsilon \in T^{k+2m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ *et il existe une constante* C (*indépendante de* u_ε) *telle que*

$$\|u_\varepsilon\|_{T^{k+2m,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \ \|h\|_{T^{k,r}(\mathbb{R}^n_+)} .$$

1.2.- Théorème de convergence dans les $T^{k,r}(\mathbb{R}^n_+)$.

On suppose désormais que $\Omega = \mathbb{R}^n_+$.

1.2.1.- Cas du problème de Dirichlet homogène.

On redonne h et h^ε dans $T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ telles que $h^\varepsilon \to h$ dans $T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ et $f_\varepsilon \in T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ de sorte que $\varepsilon^{1/2} f_\varepsilon \to 0$ dans $T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+)$.

On considère alors u_ε la solution du problème de Dirichlet

$$(1.2.1) \qquad \begin{cases} u_\varepsilon \in T^{m,r}_o(\mathbb{R}^n_+) \\ (\varepsilon A + B)\, u_\varepsilon = h_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon \end{cases}$$

Problème équivalent à :

$$(1.2.1)' \qquad \varepsilon\, a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, v) = (h_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon, v) \qquad \forall\, v \in T^{m,r}_o(\mathbb{R}^n_+) .$$

On considère d'autre part u la solution du problème limite :

$$(1.2.2) \qquad \begin{cases} u \in T^{m',r}_o(\mathbb{R}^n_+) \\ Bu = h \end{cases}$$

Remarque 2.1.- Le problème (1.2.1) admet bien une solution unique, car $h_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon \in H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)$, donc il existe $u_\varepsilon \in H^m_o(\mathbb{R}^n_+)$. Et comme $h_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon \in T^{-m}(\mathbb{R}^n_+)$ entraîne que $u_\varepsilon \in T^{m,r}_o(\mathbb{R}^n_+)$ à cause du lemme 1.1 avec $k = -m$ et en tenant compte de (0.6.3).

Pour le problème (1.2.2), il n'y a qu'à se réferer à Lions et Magénès [1] puisque l'opérateur B est $H_o^{m'}$ elliptique.

Théorème 2.1.- Sous les hypothèses ci-dessus $u_\varepsilon \to u$ dans $T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ et $\varepsilon^{1/2} u_\varepsilon \to 0$ dans $T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Preuve : Considérons $w_\varepsilon \in T_o^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ solution de :

$$(1.2.3) \qquad (\varepsilon A + B)\, w_\varepsilon = h \quad .$$

Le théorème 1.1 entraîne alors que $w_\varepsilon \to u$ dans $H^{m'}(\mathbb{R}^n_+)$. On peut encore écrire l'égalité (1.2.3) sous forme variationnelle

$$(1.2.3)' \qquad \varepsilon\, a(w_\varepsilon, v) + b(w_\varepsilon, v) = (h, v) \qquad \forall\, v \in H_o^m(\mathbb{R}^n_+) \quad .$$

Retranchons (1.2.3)' de (1.2.1)', on obtient :

$$(1.2.4) \qquad \varepsilon\, a(u_\varepsilon - w_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon - w_\varepsilon, v) = (h_\varepsilon - h, v) + (\varepsilon f_\varepsilon, v) \;\forall\, v \in H_o^m(\mathbb{R}^n_+)$$

En particulier pour $v = u_\varepsilon - w_\varepsilon$, on a l'inégalité :

$$(1.2.5) \qquad (\varepsilon\, a(u_\varepsilon - w_\varepsilon, u_\varepsilon - w_\varepsilon) + b(u_\varepsilon - w_\varepsilon, u_\varepsilon - w_\varepsilon)$$

$$\leqslant C \|h^\varepsilon - h\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+)} \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^{m'}(\mathbb{R}^n_+)} +$$

$$\|\varepsilon^{1/2} f_\varepsilon\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)} \|\varepsilon^{1/2}(u_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} \quad .$$

Et en tenant compte de (1.1.8)

$$\alpha\varepsilon \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} + \beta \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|^2_{H^{m'}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \|h^\varepsilon - h\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+)} \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^{m'}(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$\|\varepsilon^{1/2} f_\varepsilon\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)} \|\varepsilon^{1/2}(u_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} \quad .$$

D'où finalement l'inégalité

(1.2.6) $$\|\varepsilon^{1/2}(u_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} + \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^{m'}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant K[\|h_\varepsilon - h\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+)} + \|\varepsilon^{1/2} f_\varepsilon\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)}] .$$

Comme par hypothèse le second membre converge vers zéro quand $\varepsilon \to 0$. On aura :

(1.2.7) $$\|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^{m'}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0 .$$

(1.2.8) $$\|\varepsilon^{1/2}(u_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} \to 0 .$$

L'inégalité triangulaire entraîne :

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^{m'}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^{m'}(\mathbb{R}^n_+)} + \|w_\varepsilon - u\|_{H^{m'}(\mathbb{R}^n_+)} .$$

D'où :

(1.2.9) $$\|u_\varepsilon - u\|_{H^{m'}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0$$

(1.2.10) $$\|\varepsilon^{1/2}(u_\varepsilon - u)\|_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} \to 0 .$$

L'inégalité (1.2.8) appliquée à (1.2.1)' permet comme pour (1.2.6) d'obtenir l'existence d'une constante K_o telle que :

(1.2.11) $$\|\varepsilon^{1/2} u_\varepsilon\|_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} + \|u_\varepsilon\|_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant K_o [\|\varepsilon^{1/2} f_\varepsilon\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)} + \|h_\varepsilon\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+)}] .$$

On est alors dans les conditions 2.1.10 de la démonstration du lemme 2.1 de

D. Huet [2] et on peut alors déduire par récurrence sur r, l'inégalité

(1.2.12) $$\|\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon\|_{T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)} + \|u_\varepsilon\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$
$$\leqslant K\,[\,\|\varepsilon^{1/2}f_\varepsilon\|_{T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+)} + \|h_\varepsilon\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)}\,]$$

qui correspond à l'inégalité 2.1.5 de D. Huet [2] et en se reportant à la deuxième partie de la démonstration du théorème 2.1 de D. Huet [2] on déduit de (1.2.9) et (1.2.10) par récurrence sur r :

$$\|u_\varepsilon - u\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0$$

$$\|\varepsilon^{1/2}(u_\varepsilon - u)\|_{T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0\ .$$

Ce qui achève la démonstration du théorème, cf. M. Schmitt [1] .

1.2. .- Cas du problème de Dirichlet non homogène.

On se donne $g_j^\varepsilon \in H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$ et $g_i \in H^{m'+r-i-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, $i = 0, 1, \ldots, m'-1$ vérifiant la condition suivante :

Il existe $v_\varepsilon \in T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et $v \in T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ telles que l'on ait :

(1.2.13) $$\begin{cases} \gamma_j\, v_\varepsilon = g_j^\varepsilon & \text{pour } j = 0, 1, \ldots, m-1 \\ \gamma_j\, v = g_j & \text{pour } j = 0, 1, \ldots, m'-1 \\ v_\varepsilon \to v & \text{dans } T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+) \\ \varepsilon^{1/2} v_\varepsilon \to 0 & \text{dans } T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+) \end{cases}$$

On considère alors les problèmes :

(1.2.14) $$\begin{cases} B_\varepsilon\, u_\varepsilon = h_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon & \\ \gamma_j\, u_\varepsilon = g_j^\varepsilon & j = 0, 1, \ldots, m-1 \end{cases}$$

(1.2.15) $$\begin{cases} Bu = h & \\ \gamma_j\, u = g_j & j = 0, 1, \ldots, m'-1 \end{cases}$$

Théorème 2.2.- Avec les hypothèses du théorème 2.1 sur f_ε , h_ε et les opérateurs B' , A , B , les problèmes (1.2.14) et (1.2.15) admettent une solution unique $u_\varepsilon \in T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et $u \in T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ respectivement et lorsque $\varepsilon \to 0$

(1.2.16) $$u_\varepsilon \to u \text{ dans } T^{m'}(\mathbb{R}^n_+) \quad \text{et} \quad \varepsilon^{1/2} u_\varepsilon \to 0 \text{ dans } T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+) .$$

Preuve : L'existence et l'unicité de $u \in T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ solution du problème (1.2.15) sont données par Lions et Magénès [1] car B est $H_o^{m'}$-elliptique.

Soit v_ε introduit ci-avant, on a $Av_\varepsilon \in T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et $Bv_\varepsilon \in T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ alors, voir remarque 2.1, il existe une unique $w_\varepsilon \in T_o^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ solution de

(1.2.17) $$B_\varepsilon w_\varepsilon = \varepsilon(f_\varepsilon - Av_\varepsilon) + h_\varepsilon - Bv_\varepsilon$$

et donc $u_\varepsilon = w_\varepsilon + v_\varepsilon \in T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ existe et est solution du problème (1.2.14). L'unicité suit immédiatement de celle du problème homogène.

Considérons maintenant $w \in T_o^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ solution de

(1.2.18) $$Bw = h - Bv \quad .$$

Comme $\varepsilon^{1/2} Av_\varepsilon \to 0$ dans $T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et $Bv_\varepsilon \to Bv$ dans $T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ le théorème 2.1 entraîne $w_\varepsilon \to w$ dans $T_o^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ et $\varepsilon^{1/2} w_\varepsilon \to 0$ dans $T_o^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$. Mais comme $u_\varepsilon = w_\varepsilon + v_\varepsilon$ et $u = w + v$ on a le résultat cherché.

1.3.- Correcteurs d'ordre zéro pour le problème homogène.

On garde les notations et hypothèses précédentes et on suppose de plus :

(1.3.1) $$u \in T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$$

(1.3.2) $$\begin{cases} \|h_\varepsilon - h\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)} = O(\varepsilon^{1/2}) \\ \|f_\varepsilon\|_{T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \end{cases}$$

Soient $G_{\varepsilon 1}$ et $G_{\varepsilon 2}$ appartenant à $T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et $T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ **respecti**vement vérifiant :

(1.3.3) $$\|G_{\varepsilon 1}\|_{T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant M$$

(1.3.4) $$\|G_{\varepsilon 2}\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant M \ .$$

Définition 3.1.- On dira que θ_ε est un correcteur d'ordre zéro si c'est une solution de :

(1.3.5) $$\begin{cases} \theta_\varepsilon \in T^{m,r}_o(\mathbb{R}^n_+) - u \\ B_\varepsilon\ \theta_\varepsilon = \varepsilon A\ \theta_2 + \underset{\sim}{B}\ \theta_\varepsilon = \varepsilon G_{\varepsilon 1} + \varepsilon^{1/2}\ G_{\varepsilon 2} \end{cases}$$

Ce problème admet une solution unique car $u \in T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ entraîne **que** $\gamma u \in H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ et donc $\gamma\ \theta_\varepsilon \in H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ et l'on est **dans les** conditions du problème (1.2.14) dont nous avons démontré l'existence et l'**unicité** d'une solution dans le théorème 2.1.

Théorème 3.1.- Sous les hypothèses précédentes :

(1.3.6) $$u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon) \to 0 \quad \text{dans} \quad T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+) \ \text{faible}$$

(1.3.7) $$\|u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon)\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\ \varepsilon^{1/2} \ .$$

Preuve : Soustrayons (1.2.2) et (1.3.5) de (1.2.1) et posons :

$$w_\varepsilon = u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u) \in T^{m,r}_o(\mathbb{R}^n_+) \text{ , on aura :}$$

(1.3.8) $$B_\varepsilon\ w_\varepsilon = -\ \varepsilon Au - \varepsilon G_{\varepsilon 1} + \varepsilon f_\varepsilon - \sqrt{\varepsilon}\ G_{\varepsilon 2} + h_\varepsilon - h \ .$$

Comme $u \in T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$, on a $Au \in T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et en procédant **comme pour**

(1.2.11) et (1.2.12) on obtient l'inégalité :

$$(1.3.9) \qquad \|\varepsilon^{1/2} w_\varepsilon\|_{T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)} + \|w_\varepsilon\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant K[\|\varepsilon^{1/2}(Au + G_{\varepsilon 1} + f_\varepsilon)\|_{T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+)} + \|\varepsilon^{1/2} G_{\varepsilon 2} + h_\varepsilon - h\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)}]$$

$$(1.3.10) \leqslant K\,\varepsilon^{1/2}[\|Au\|_{T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+)} + \|G_{\varepsilon 1}\|_{T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+)} + \|f_\varepsilon\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)} + \\ + \|G_{\varepsilon 2}\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)} + K_1]$$

en tenant compte del'hypothèse (1.3.2) qui signifie $\|h_\varepsilon - h\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant K_1\,\varepsilon^{1/2}$ et vu (1.3.2) (1.3.3) et (1.3.4) on aura que $\|w_\varepsilon\|_{T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)}$ est borné et on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement dans $T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$. Mais comme $\|w_\varepsilon\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\,\varepsilon^{1/2}$ la limite sera nulle d'où le théorème.

<u>Théorème 3.2</u>.- <u>Ajoutons aux hypothèses du théorème 3.1</u> :

$$(1.3.11) \qquad G_{\varepsilon 1} \to G_1 \quad \underline{\text{dans}} \quad T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+)$$

$$(1.3.12) \qquad G_{\varepsilon 2} \to 0 \quad \underline{\text{dans}} \quad T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)$$

$$(1.3.13) \qquad \|h_\varepsilon - h\|_{T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)} = 0(\varepsilon^{1/2}) \quad \text{et } (1.3.14) \quad f_\varepsilon \to f \ \underline{\text{dans}} \ T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+) .$$

Alors (1.3.15) $\quad u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u) \to 0 \quad$ <u>dans</u> $T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ <u>fort</u>.

(1.3.16) $\quad \varepsilon^{-1/2}[u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u)] \to 0 \quad$ <u>dans</u> $T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ <u>fort</u>.

Pour cela on commencera par démontrer le lemme :

Lemme 3.2.- Soit $w_\varepsilon \in \overset{\circ}{H}^m(\mathbb{R}^n_+)$, $u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$ avec :

$$B_\varepsilon\, w_\varepsilon = \varepsilon F_\varepsilon - \varepsilon A u + \varepsilon^{1/2}\, G_\varepsilon \tag{1.3.17}$$

où $F_\varepsilon \to F$ dans $H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)$, $G_\varepsilon \to 0$ dans $H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+)$.

Alors :

$$w_\varepsilon \to 0 \quad \text{dans} \quad H^m(\mathbb{R}^n_+)$$

$$\varepsilon^{-1/2}\, w_\varepsilon \to 0 \quad \text{dans} \quad H^{m'}(\mathbb{R}^n_+) \quad .$$

Preuve : (1.3.17) peut s'écrire sous forme variationnelle en divisant par ε :

$$\varepsilon^{-1}\, b_\varepsilon(w_\varepsilon, w_\varepsilon) = (F_\varepsilon, w_\varepsilon) - a(u, w_\varepsilon) + (G_\varepsilon, \varepsilon^{-1/2}\, w_\varepsilon) \quad . \tag{1.3.18}$$

La démonstration du théorème 3.1 dans le cas $r = 0$ appliquée à (1.3.10) montre que w_ε converge faiblement vers zéro dans $H^m(\mathbb{R}^n_+)$. Donc comme $F_\varepsilon \to$ dans $H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)$, $(F_\varepsilon, w_\varepsilon) \to 0$ et de même comme $u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$ $a(u, w_\varepsilon) \to 0$.

De même la démonstration du théorème 3.1 montre que $\|\varepsilon^{-1/2} w_\varepsilon\|_{H^{m'}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C$ donc :

$$|(G_\varepsilon, \varepsilon^{-1/2} w_\varepsilon)| \leqslant \|G_\varepsilon\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+)}\ \|\varepsilon^{-1/2} w_\varepsilon\|_{H^{m'}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\, \|G_\varepsilon\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+)}$$

et comme $G_\varepsilon \to 0$ par hypothèse dans $H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+)$ il en sera de même du premier membre de l'inégalité.

D'où $\varepsilon^{-1}\, b_\varepsilon(w_\varepsilon, w_\varepsilon) \to 0$, ce qui avec (1.1.8) entraîne le résultat.

Preuve du théorème 3.2 : Considérons l'égalité (1.3.8). Si l'on pose $F_\varepsilon = f_\varepsilon - G_\varepsilon$ qui converge vers $F = f - G_1$ dans $T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ donc en particulier dans $H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)$ (Hypothèses (1.3.14) et (1.3.11)), et $G_\varepsilon = \varepsilon^{-1/2}\,(h_\varepsilon - h) - G_{\varepsilon 2}$ qui converge vers zéro dans $T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ donc dans $H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+)$ (hypothèses (1.3.12) et (1.3.13)), on peut appliquer le lemme 3.2 et donc $w_\varepsilon \to 0$ dans $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ et $\varepsilon^{-1/2} w_\varepsilon \to 0$ dans $H^{m'}(\mathbb{R}^n_+)$. Ce qui donne le résultat (1.3.15)-(1.3.16) pour $r = 0$.

On suppose alors le théorème vrai jusqu'à l'ordre $r - 1$ et montrons qu'il est encore vrai à l'ordre r.

Posons $r_\varepsilon = D^q_{x'} w_\varepsilon$ avec $|q| \leqslant r-1$ et soit $i \in [1, n-1]$. Il suffit alors de démontrer que $\dfrac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i} \to 0$ dans $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ et $\varepsilon^{-1/2} \dfrac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i} \to 0$ dans $H^{m'}(\mathbb{R}^n_+)$. Pour cela on calculera $B_\varepsilon \dfrac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i}$ et on montrera que l'on est dans les conditions d'applications du lemme 3.2.

De (1.3.8) on tire :

(1.3.20) $$\frac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} B_\varepsilon w_\varepsilon = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} G_{\varepsilon 1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} f_\varepsilon - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} Au - \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x} G_{\varepsilon 2} + \frac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} (h_\varepsilon - h) .$$

Par hypothèse on a :

(1.3.21) $\dfrac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} G_{\varepsilon 1} \in H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)$ qui converge vers $\dfrac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} G_1$.

(1.3.22) $\dfrac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} f_\varepsilon \in H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)$ qui converge vers $\dfrac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} f$

(1.3.23) $\dfrac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} G_{\varepsilon 2} \in H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)$ qui converge vers zéro

(1.3.24) $\dfrac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} (h_\varepsilon - h) \in H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+)$ et $\varepsilon^{-1/2} \dfrac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} (h_\varepsilon - h)$ converge vers zéro.

D'autre part A et B donnés par (1.1.5) et (1.1.6) respectivement peuvent s'écrire aussi :

$$(1.3.25) \qquad A = \sum_{|p| \leqslant 2m} \alpha_p(x)\, D^p \quad , \qquad B = \sum_{|p| \leqslant 2m'} \beta_p(x)\, D^p$$

où les α_p et les β_p sont encore des restrictions à $\mathbb{R}^n_+$ de fonctions de $B(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Et on peut voir alors que :

$$(1.3.26) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} Au = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\substack{|p| \leqslant 2m \\ |s| \leqslant r-1}} \gamma_{ps}(x)\, D^s_{x'} (D^p_u) \in H^{-m}(\mathbb{R}^n_+) \quad .$$

Calculons $B_\varepsilon \dfrac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i}$. On aura :

$$(1.3.27) \qquad B_\varepsilon \left(\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (B_\varepsilon\, r_\varepsilon) + [B_\varepsilon \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (B_\varepsilon\, r_\varepsilon)]$$

où :

$$(1.3.28) \qquad B_\varepsilon\, r_\varepsilon = B_\varepsilon (D^q_x\, w_\varepsilon) = D^q_{x'} (B_\varepsilon\, w_\varepsilon) + [B_\varepsilon (D^q_{x'}\, w_\varepsilon) - D^q_{x'}\, B_\varepsilon\, w_\varepsilon]$$

et finalement :

$$(1.3.29) \qquad B_\varepsilon \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} D^q_x (B_\varepsilon\, w_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} [B_\varepsilon (D^q_{x'}\, w_\varepsilon) - D^q_{x'} (B_\varepsilon\, w_\varepsilon)]$$
$$+ [B_\varepsilon \left(\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (B_\varepsilon\, r_\varepsilon)] \quad .$$

Se reportant à la démonstration du lemme 2.1, p. 434 de D. Huet [2] **on a :**

$$(1.3.30) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} [B_\varepsilon (D^q_{x'}\, w_\varepsilon) - D^q_{x'} (B_\varepsilon\, w_\varepsilon)] = \varepsilon F_{2\varepsilon} + H_{2\varepsilon}$$

avec

$$(1.3.31) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_{2\varepsilon} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \displaystyle\sum_{\substack{|p| \leqslant 2m \\ |s| \leqslant r-2}} \gamma_{ps}(x)\, D^s_{x'} (D^p\, w_\varepsilon) \in H^{-m}(\mathbb{R}^n_+) \\ \\ H_{2\varepsilon} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \displaystyle\sum_{\substack{|q| \leqslant 2m' \\ |t| \leqslant r-2}} \delta_{qt}(x)\, D^t_{x'} (D^q\, w_\varepsilon) \in H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+) \end{array} \right.$$

et

$$(1.3.32)\quad \begin{cases} \|F_{2\varepsilon}\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant K_4 \|w_\varepsilon\|_{T^{m,r-1}(\mathbb{R}^n_+)} \\ \|H_{2\varepsilon}\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant K_5 \|w_\varepsilon\|_{T^{m',r-1}(\mathbb{R}^n_+)} \end{cases}$$

De même on a :

$$(1.3.33)\qquad B_\varepsilon\left(\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}(B_\varepsilon r_\varepsilon) = -\varepsilon F_{3\varepsilon} - H_{3\varepsilon}$$

avec :

$$(1.3.34)\quad \begin{cases} F_{3\varepsilon} = \sum\limits_{|p|\leqslant 2m} \dfrac{\partial \alpha_p}{\partial x_i} D^p r_\varepsilon \in H^{-m}(\mathbb{R}^n_+) \\ H_{3\varepsilon} = \sum\limits_{|p|\leqslant 2m'} \dfrac{\partial \beta_p}{\partial x_i} D^p r_\varepsilon \in H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+) \end{cases}$$

et

$$(1.3.35)\quad \begin{cases} \|F_{3\varepsilon}\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant K_6 \|r_\varepsilon\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant K_7 \|w_\varepsilon\|_{T^{m,r-1}(\mathbb{R}^n_+)} \\ \|H_{3\varepsilon}\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant K_8 \|w_\varepsilon\|_{T^{m',r-1}(\mathbb{R}^n_+)} \quad . \end{cases}$$

En tenant compte de (1.3.25) dans (1.3.20) et de (1.3.28), (1.3.30) et (1.3.33) on obtient :

$$(1.3.36)\quad B_\varepsilon\left(\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} G_{\varepsilon 1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} f_\varepsilon - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\substack{|p|\leqslant 2m \\ |s|\leqslant r-1}} \gamma_{ps}(x)\, D^s_{x'}(D^p u)$$

$$\left[-\sqrt{\varepsilon}\, \frac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} G_{\varepsilon 2} + \frac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'}(h_\varepsilon - h) + \varepsilon F_{2,\varepsilon} + H_{2\varepsilon} - \varepsilon F_{3\varepsilon} - H_{3\varepsilon} \right] .$$

Or l'hypothèse de récurrence appliquée à 1.3.32 et 1.3.35 montre que :

$$\|F_{2\varepsilon}\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0 \qquad \|\varepsilon^{-1/2} H_{2\varepsilon}\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0$$

$$\|F_{3\varepsilon}\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0 \qquad \|\varepsilon^{-1/2} H_{3\varepsilon}\|_{H^{-m'}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0 \quad .$$

(1.3.36) s'écrit donc sous la forme de (1.3.17) avec :

$$F_\varepsilon = - \frac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} G_{\varepsilon 1} + \frac{\partial}{\partial x_1} D^q_{x'} f_\varepsilon + F_{2,\varepsilon} - F_{3\varepsilon}$$

On remplace Au par $- \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\substack{|p|\leq 2m \\ |s|\leq r-1}} \gamma_{ps}(x)\, D^s_{x'}(D^p_u) \in H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)$

$$G_\varepsilon = - \frac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'} G_{\varepsilon 2} + \varepsilon^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x_i} D^q_{x'}(h_\varepsilon - h) + \varepsilon^{-1/2} H_{2\varepsilon} - \varepsilon^{-1/2} H_{3\varepsilon}$$

On est donc dans les hypothèses du lemme 3.2 ce qui achève la démonstration du théorème 3.2.

1.4.- Correcteurs d'ordre zéro pour le problème non homogène.

On considère alors les problèmes (1.2.14) et (1.2.15) et on garde les hypothèses du paragraphe 1.2.b auxquelles on ajoute celles du théorème 3.1.

Remarque 4.1.- En général $\gamma_j u \neq g_j$ pour $j \in [m', m-1]$ et donc la convergence qui a lieu dans $T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ n'a pas lieu en général dans $T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$; d'où l'introduction de correcteurs.

Soit donc $\theta_\varepsilon \in T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ solution du problème :

$$(1.4.1) \quad \begin{cases} \varepsilon A\theta_\varepsilon + B\theta_\varepsilon = \varepsilon G_{\varepsilon 1} + \sqrt{\varepsilon}\, G_{\varepsilon 2} & \\ \gamma_j \theta_\varepsilon = g_j - \gamma_j u & j \in [m', m-1] \\ \gamma_j \theta_\varepsilon = 0 & j \in [0, m'-1] \end{cases}$$

où $G_{\varepsilon 1}$ et $G_{\varepsilon 2}$ satisfont (1.3.3) et (1.3.4).

Ce problème a une solution unique, cf. théorème 2.2.

Commençons par considérer le problème (1.2.14) simplifié, c'est-à-dire :

$$(1.4.2) \qquad \begin{cases} B_\varepsilon\, u_\varepsilon = h_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon \\ \gamma_j\, u_\varepsilon = g_j \qquad j \in [0, m-1] \end{cases}$$

<u>**Théorème** 4.1.- Sous les hypothèses ci-dessus</u> :

$$(1.4.3) \qquad u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u) \to 0 \quad \underline{\text{dans}} \quad T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+) \quad \underline{\text{faible}}$$

$$(1.4.4) \qquad \|u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u)\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\, \varepsilon^{1/2} \quad .$$

<u>**Preuve**</u> : Considérons $w_\varepsilon = u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u)$. Retranchons (1.2.15) et (1.4.1) de (1.4.2). On aura en tenant compte que $u \in T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$:

$$(1.4.5) \qquad B_\varepsilon\, w_\varepsilon = -\, \varepsilon G_{\varepsilon 1} + \varepsilon f_\varepsilon - \sqrt{\varepsilon}\, G_{\varepsilon 2} - \varepsilon A u + h_\varepsilon - h \quad .$$

D'autre part la linéarité de l'opération trace de $T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ sur $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^n_+)$ entraînera :

$$(1.4.6) \qquad \gamma_j\, w_\varepsilon = 0 \qquad \forall\, j \in [0, m-1] \quad .$$

On est alors dans les conditions d'application du théorème 3.1 d'où le résultat.

Si de plus on se place dans les hypothèses du théorème 3.2, on obtient la convergence forte.

Revenons au cas plus général (1.2.14) et considérons $\ell^\varepsilon_j \in H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ satisfaisant aux hypothèses

$$(1.4.7) \qquad \|\ell_{j\varepsilon}\|_{H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} = O(\varepsilon^{1/2}) \quad j = 0,\dots,m'-1 \quad \text{dans} \quad H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

$$(1.4.8) \qquad \|\ell_{j\varepsilon} - (g_j - \gamma_j u)\|_{H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} = O(\varepsilon^{1/2}) \quad j = m',\dots,m-1 \quad \text{dans} \quad H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

Supposons de plus :

(1.4.9) $$\|g_{j\varepsilon} - g_j\|_{H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} = O(\varepsilon^{1/2}) \qquad j = 0,1,\dots,m'-1 \ .$$

Soit donc alors $\theta_\varepsilon \in T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ solution du problème :

(1.4.10) $$\begin{cases} \varepsilon\, A\theta_\varepsilon + B\theta_\varepsilon = \varepsilon G_{\varepsilon 1} + \sqrt{\varepsilon}\, G_{\varepsilon 2} \\ \gamma_j\, \theta_\varepsilon = \ell_j^\varepsilon \qquad j = 0,1,\dots,m-1 \end{cases}$$

où $G_{\varepsilon 1}$ et $G_{\varepsilon 2}$ comme théorème 3.1.

<u>Théorème 4.2</u>.- <u>Les hypothèses du théorème 4.1 et celles ci-dessus entraînent</u> :

(1.4.11) $$u_\varepsilon - (u+\theta_\varepsilon) \to 0 \quad \underline{\text{dans}} \quad T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+) \quad \underline{\text{faible}}$$

(1.4.12) $$\|u_\varepsilon - (u+\theta_\varepsilon)\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\, \varepsilon^{1/2} \ .$$

<u>Preuve</u> : Considérons les fonctions de $H^{m+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\varepsilon^{-1/2}(g_j^\varepsilon - \ell_j^\varepsilon - g_j)$ pour $j \in [0,\ m-1]$ et $\varepsilon^{-1/2}(g_j^\varepsilon - \ell_j^\varepsilon - \gamma_j u)$ $j \in [m',\ m-1]$. Les hypothèses (1.4.7) (1.4.8) (1.4.9) entraîne leur convergence vers zéro. Donc de la remarque 4.1, p. 446 de D. Huet [2] , il existera $v'_\varepsilon \in T^{m,r}(\mathbb{R}^{n-1})$ et $v \in T^{m,r}(\mathbb{R}^{n-1})$ telles que :

(1.4.13) $$\begin{cases} \gamma_j\, v'_\varepsilon = \varepsilon^{-1/2}(g_j^\varepsilon - \ell_j^\varepsilon - \gamma_j u) & j \in [m',\ m-1] \\ \gamma_j\, v' = \varepsilon^{-1/2}(g_j^\varepsilon - \ell_j^\varepsilon - g_j) & j \in [0,\ m'-1] \\ \gamma_j\, v = 0 \qquad j \in [0,\ m-1] \end{cases}$$

et telle que $v'_\varepsilon \to v$ dans $T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$.

Considérons alors $v_\varepsilon = \varepsilon^{1/2}(v'_\varepsilon - v) \in T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$. Elle vérifie :

$$(1.4.14)\quad \begin{cases} \varepsilon^{-1/2}\, v_\varepsilon \to 0 & \text{dans } T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+) \\ \gamma_j\, v_\varepsilon = g^\varepsilon_j - \ell^\varepsilon_j - g_j & j \in [0, m'-1] \\ \gamma_j\, v_\varepsilon = g^\varepsilon_j - \ell^\varepsilon_j - \gamma_j u & j \in [m', m-1] \end{cases}$$

D'autre part B étant continu sur $T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ à valeurs dans $T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ $\varepsilon^{-1/2} v_\varepsilon \to 0$ dans $T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ donc dans $T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)$ entraîne que $\varepsilon^{-1/2}\, Bv_\varepsilon = B\, \varepsilon^{-1/2}\, v_\varepsilon \to 0$ dans $T^{-m',r}(\mathbb{R}^n_+)$.

Soit alors w_ε solution du problème

$$(1.4.15)\quad \begin{cases} w_\varepsilon \in T^{m,r}_o(\mathbb{R}^n_+) \\ B_\varepsilon\, w_\varepsilon = -\varepsilon[g_{\varepsilon 1} + Av_\varepsilon - f_\varepsilon Au] + \varepsilon^{1/2}[\varepsilon^{-1/2}(h_\varepsilon - h) - B\varepsilon^{-1/2} v_\varepsilon - G_{\varepsilon 2}] \end{cases} .$$

Les hypothèses considérées ci-dessus entraînent que nous sommes dans les mêmes conditions que dans la démonstration du théorème 3.1. Donc la solution existe et est unique et $w_\varepsilon \to 0$ dans $T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)$ faible,
$\|w_\varepsilon\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\, \varepsilon^{1/2}$.

Or $w_\varepsilon = u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u) - v_\varepsilon \in T^{m,r}_o(\mathbb{R}^n_+)$ à cause de (1.4.14) et vérifie (1.4.15), d'où :

$$u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u) = w_\varepsilon + v_\varepsilon \to 0 \quad \text{dans } T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+) \text{ faible et}$$

$$\|u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u)\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant \|w_\varepsilon\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)} + \|v_\varepsilon\|_{T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\, \varepsilon^{1/2} .$$

Ce qui achève le théorème.

<u>Remarque 4.2</u>.- Si l'on se place dans les hypothèses du théorème 3.2, on obtiendra la convergence forte pour w_ε et donc aussi pour $u_\varepsilon - (\theta_\varepsilon + u)$.

1.5.- Correcteurs d'ordre $\geqslant 1$.

On considère de nouveau le problème (1.2.1) et on suppose qu'il existe

$$u,\ u^1,\ \dots,\ u^M \in T_o^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$$

et $$L^1,\ L^2,\ \dots,\ L^M \in T^{-m,r}(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{tels que}$$

(1.5.1) $$\varepsilon A(u + \varepsilon u^1 + \dots + \varepsilon^M u^M) + B(u + \varepsilon u^1 + \dots + \varepsilon^M u^M) =$$

$$= \varepsilon L^1 + \dots + \varepsilon^M L^M + \varepsilon^{M+1} Au^M + h_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$.

Le problème limite est toujours donné par (1.2.2) . L'identité (1.5.1) équivaut aux égalités suivantes :

(1.5.2) $$\begin{cases} Au + Bu^1 = L^1 \\ Au_1 + Bu^2 = L^2 \\ \dots\dots\dots \\ Au^{M-1} + Bu^M = L^M \end{cases}$$

Définition 5.1.- Un élément θ_ε^M de $T^{m,r}(\mathbb{R}_+^n)$ sera dit correcteur d'ordre M si solution du problème :

$$\theta_\varepsilon^M \in T_o^{m,r}(\mathbb{R}_+^n) - (u + \varepsilon u^1 + \dots + \varepsilon^M u^M)$$

$$\varepsilon A\, \theta_\varepsilon^M + B\, \theta_\varepsilon^M = -(\varepsilon L^1 + \varepsilon^2 L^2 + \dots + \varepsilon^M L^M) + \varepsilon^M(\varepsilon G_{\varepsilon 1} + \varepsilon^{1/2} G_{\varepsilon 2})$$

où $G_{\varepsilon 1}$ et $G_{\varepsilon 2}$ sont les mêmes que dans (1.3.3) et (1.3.4).

On a alors les estimations données par le théorème suivant.

Théorème 5.1.- On se place dans les hypothèses du théorème (3.1) et celles ci-dessus. On a alors :

(1.5.4) $$\| u_\varepsilon - (u + \varepsilon u^1 + \ldots + \varepsilon^M u^M + \theta_\varepsilon^M) \|_{T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\, \varepsilon^M$$

(1.5.5) $$\| u_\varepsilon - (u + \varepsilon u^1 + \ldots + \varepsilon^M u^M + \theta_\varepsilon^M) \|_{T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\, \varepsilon^{M+1/2} .$$

Preuve : Posons $w_\varepsilon = u_\varepsilon - (u + \varepsilon u^1 + \ldots + \varepsilon^M u^M + \theta_\varepsilon^M)$ et retranchons les équations (1.5.1) et (1.5.3) de (1.2.1), on obtient :

(1.5.6) $$\varepsilon A w_\varepsilon + B w_\varepsilon = -\varepsilon^{M+1} A u^M - \varepsilon^M (\varepsilon G_{\varepsilon 1} + \varepsilon^{1/2} G_{\varepsilon 2}) \quad .$$

On se ramène ainsi au problème du même genre que celui traité dans la preuve du théorème 3.1 avec les mêmes hypothèses, d'où le résultat.

Théorème 5.2.- Si l'on ajoute les hypothèses (1.3.11), (1.3.12), (1.3.13) et (1.3.14) on aura :

(1.5.7) $$\varepsilon^{-M} [u_\varepsilon - (u + \varepsilon u^1 + \ldots + \varepsilon^M u^M + \theta_\varepsilon^M)] \to 0 \ \text{dans } T^{m,r}(\mathbb{R}^n_+) \text{ fort}$$

(1.5.8) $$\varepsilon^{-M-1/2} [u_\varepsilon - (u_\varepsilon - (u + \varepsilon u^1 + \ldots + \varepsilon^M u^M + \theta_\varepsilon^M)] \to 0$$

$$\text{dans } T^{m',r}(\mathbb{R}^n_+) \text{ fort.}$$

CHAPITRE II

Noyaux de Poisson

2.1.- Notations et hypothèses.

2.1.a.- Les opérateurs différentiels

De manière générale nous écrirons les opérateurs différentiels à coefficients constants à n variables $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ sous la forme $P(\frac{1}{i} D_x)$ où $D_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. $P(\bar{\xi})$, où $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, est un polynôme dit polynôme caractéristique de l'opérateur. Nous distinguerons la dernière variable en posant $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ et $y = x_n$ et on écrira $(x,y) \in \mathbb{R}^n$. De plus on posera $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ et $i\eta = \xi_n$. Le polynôme caractéristique peut alors être écrit $P(\bar{\xi}) = P(\xi, i\eta)$.

Nous nous intéresserons aux solutions de l'équation :

$$\mathbb{L}\left(\frac{\varepsilon}{i} D_x\right) u(\bar{x}) = 0 \tag{2.1.1}$$

dans le demi-espace $y = x_n > 0$, satisfaisant à certaines conditions frontières sur le plan $y = 0$. Ici $\mathbb{L}$ sera un polynôme de degré pair $2m_1$, et ε un petit paramètre réel. Nous supposerons aussi le degré du terme d'ordre le plus petit être pair, soit $2m_o$. Finalement nous supposerons $m_1 > m_o \geq 0$. La principale hypothèse sur $\mathbb{L}$ sera du type forte ellipticité , à savoir :

<u>Hypothèse I</u>.- Il existe une constante $E > 0$ telle que :

$$\operatorname{Re} \mathbb{L}(\bar{\xi}) \geq E(|\bar{\xi}|^{2m_1} + |\bar{\xi}|^{2m_o}) \qquad \forall\, \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n . \tag{2.1.2}$$

Soient $\mathbb{L}_1(\bar{\xi})$ et $\mathbb{L}_o(\bar{\xi})$ les polynômes homogènes consistant en les termes de $\mathbb{L}$ d'ordre $2m_1$ et $2m_o$ resepctivement. En particulier l'hypothèse I entraîne que $\mathbb{L}_1$ et $\mathbb{L}_o$ sont elliptiques.

Nous écrirons désormais $L(\xi,\eta) \equiv \mathbb{L}(\xi, i\eta)$ avec des définitions analogues pour L_1 et L_o.

L'équation (2.1.1) devient alors :

(2.1.3) $$L(\frac{\varepsilon}{i} D_x, - \varepsilon D_y)\, u(x,y) = 0 \quad .$$

Nous noterons $\eta_i(\xi)$ les racines du polynôme en η $L(\xi,\eta) = 0$. Les racines joueront un rôle principal dans toute la suite. Nous ne serons intéressés que par les racines dont la partie réelle est positive et nous ferons l'hypothèse :

Hypothèse II.- Pour chaque vecteur réel $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ avec $|\omega| = 1$, il existe exactement m_1 racines $\gamma_i(\omega)$ $(i = 1,\dots,m_1)$ de $L_1(\omega,\gamma) = 0$ avec partie réelle positive et exactement m_o racines $\alpha_i(\omega)$ $(i = 1,\dots,m_o)$ de $L_o(\omega,\alpha) = 0$ avec partie réelle positive.

Remarque 1.1.- Cette hypothèse est vérifiée dès que $n > 2$.

Hypothèse III.- Les racines $\eta_i(\xi)$ sont analytiques comme fonctions de la variable réelle ξ . De plus il existe un voisinage de l'origine et un voisinage de l'infini dans le plan complexe de la variable σ tels que $\eta_i(\sigma\omega)$ sont des fonctions analytiques de σ et du vecteur réel ω pour σ dans ces voisinages et ω dans un voisinage de la sphère $|\omega| = 1$.

Comme conséquence de ces hypothèses, on a les propriétés des racines résumées dans le lemme suivant. (Pour la démonstration cf. P. Fife [1]).

Lemme 1.1.- Exactement la moitié des $\eta_i(\xi)$. (Par exemple la première moitié) a une partie réelle positive pour $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. On a aussi les propriétés asymptotiques suivantes, où les β_i $(i = m_o+1,\dots,m_1)$ sont les racines non nulles de partie réelle positive de $L(0,\eta) = 0$:

(2.1.4) $\qquad \eta_i(\rho\omega) = \rho\gamma_i(\omega) + O(1) \qquad (\rho \to \infty,\ \rho \in \mathbb{R}^+) \qquad i = 1,\dots,m_1$

(2.1.5) $\qquad \eta_i(\rho\omega) = \rho\alpha_i(\omega) + O(\rho^2) \qquad (\rho \to 0,\ \rho \in \mathbb{R}^+) \qquad i = 1,\dots,m_o$

(2.1.6) $\qquad \eta_i(\rho\omega) = \beta_i + O(\rho) \qquad (\rho \to 0,\ \rho \in \mathbb{R}^+) \qquad i = m_o+1,\dots,m_1$.

2.1.b.- Les opérateurs frontières.

Soient $B_i(\xi,\eta)$ $(i = 1,\dots,m_1)$ des polynômes de degré μ_i , et γ_i certains entiers. Nous nous intéresserons aux solutions de l'équation (2.1.3) dans le demi-espace $y > 0$ satisfaisant :

(2.1.7) $\qquad B_j(\frac{\varepsilon}{i} D_x,\ -\varepsilon D_y)\ u(x,0) = \varepsilon^{-\gamma_j}\ \varphi_j(x)$.

Nous imposerons l'hypothèse suivante sur les B_j et L .

Hypothèse IV.- Nous définissons $L^+(\xi,\tau) = \prod_{k=1}^{m_1} (\tau + \eta_k(\xi))$ et $L_1^+(\omega,\tau) = \prod_{i=1}^{m_1} (\tau + \gamma_i(\omega))$. Comme polynôme en τ , les fonctions $B_j(\xi,\tau)$ sont linéairement indépendantes modulo $L^+(\xi,\tau)$.

(1) Pour chaque $\xi \neq 0$ réel et

(2) Pour chaque complexe ξ dans un voisinage de l'origine.

De plus pour chaque réel $\omega \neq 0$, les polynômes $B_i'(\omega,\tau)$ sont linéairement indépendants modulo $L_1^+(\omega,\tau)$, où B_j' consistent en les termes d'ordre le plus élevé de B_j .

Remarque 1.2.- $B_j(\xi,\ -\tau) = Q_j(\xi,\tau)\ L^+(\xi,\tau) + R_j(\xi,\tau)$ avec $d^\circ R_j < m_1$, $\xi \neq 0$ et comme polynôme en τ :

(2.1.8) $\qquad R_j(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{m_1} b^{jk}(\xi)\ \tau^{k-1}$.

L'hypothèse IV équivaut à $d(\xi) = \det(b^{jk}(\xi)) \neq 0 \quad \forall\, \xi \neq 0$ c'est-à-dire que cette matrice est inversible.

De même :

$$B'_j(\omega, -\tau) = Q'_j(\omega,\tau)\, L_1^+(\omega,\tau) + R'_j(\omega,\tau) \quad \text{avec} \quad d^\circ R'_j < m_1 \quad , \omega \neq 0$$

et comme polynôme en τ :

$$R'_j(\omega,\tau) = \sum_{k=1}^{m_1} b'^{jk}(\omega)\, \tau^{k-1} \quad . \tag{2.1.9}$$

La deuxième partie de l'hypothèse IV équivaut à $d'(\xi) = \det(b'^{jk}(\omega)) \neq 0$ $\forall\, \omega \neq 0$ c'est-à-dire que cette matrice est inversible.

2.2.- Le noyau de Poisson.

Dans cette section nous allons rappeler la construction des noyaux de Poisson de P. Fife [1] pour le problème :

$$L(\tfrac{1}{i} D_x, -D_y)\, u(x,y) = 0 \qquad y > 0 \tag{2.2.1}$$

$$B_j(\tfrac{1}{i} D_x, -D_y)\, u(x,0) = \varphi_j(x) \qquad j = 1,\ldots,m_1 \quad . \tag{2.2.2}$$

Par noyaux de Poisson on entend des fonctions $K_j(x,y)$, $j = 1,\ldots,m_1$ telles que pour certaines classes de fonctions $\varphi_j(x)$, la convolution

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{m_1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_j(x-\tau, y)\, \varphi_j(\tau)\, d\tau \tag{2.2.3}$$

soit solution de (2.2.1) et (2.2.2).

2.2.a.- Définitions et constructions préliminaires.

$\chi(\rho)$ sera une fonction indéfiniment différentiable définie pour $\rho \in \mathbb{R}^+$ et telle que

$$\chi(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad \rho \geqslant 1 \end{cases} \tag{2.2.4}$$

On pose $|\xi| = \rho$ et $\omega = \frac{\xi}{\rho}$ donc $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $|\omega| = 1$.

C_a désignera un contour simple fermé borné du plan complexe à gauche de la droite $\operatorname{Re} z = -2\alpha$ et entourant l'ensemble :

$$\{ z \in \mathbb{C} : z = -\frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho} \quad , \quad i = 1,\dots,m_1 \qquad \rho \geqslant a \qquad |\omega| = 1\}$$

où a est quelconque dans $\mathbb{R}_*^+$ et α tel que $\operatorname{Re} \eta_i(\rho\omega) \geqslant 3\alpha\rho$ (Fife [1] lemme 3.1).

On note, si toutes les racines $\eta_i(\sigma\omega)$ sont distinctes dans un voisinage de l'origine :

$$G_i(\sigma,\omega,y) = e^{-\eta_i(\sigma\omega)y} \quad . \tag{2.2.5}$$

Sinon nous définissons, toujours pour σ dans un voisinage de 0 :

$$G_k(\sigma,\omega,y) \equiv \int_C \frac{z^{k-1} e^{\sigma yz}}{\widehat{L_1}(\sigma,\omega,z)}\, dz \quad \text{pour } k = 1,2,\dots,m_o \tag{2.2.6}$$

et

$$G_k(\sigma,\omega,y) \equiv \int_{C'} \frac{z^{k-m_o-1} e^{zy}}{\widehat{L^2}(\sigma,\omega,z)}\, dz \quad \text{pour } k = m_o+1,\dots,m_1 \tag{2.2.7}$$

où

$$\widehat{L}_1(\sigma,\omega,z) = \prod_{i=1}^{m_o} \left(z + \frac{\eta_i(\sigma\omega)}{\sigma}\right) \tag{2.2.8}$$

et

$$\widehat{L}_2(\sigma,\omega,z) = \prod_{i=m_o+1}^{m_1} (z + \eta_i(\sigma\omega)) \quad . \tag{2.2.9}$$

C est un contour fermé borné autour de $\{ \frac{-\eta_i(\sigma\omega)}{\sigma} \quad i = 1,\dots,m_o \quad |\omega| = 1 \quad |\sigma| < a \}$.

C' est un contour fermé borné autour de $\{ -\eta_i(\sigma\omega) \quad |\omega| = 1 \quad |\sigma| \leqslant a \quad i = m_o+1,\dots,m_1 \}$.

Remarque 2.1.- a sera choisi de sorte que C' soit à gauche de la droite $\mathrm{Re}\, z = -2\beta$ où β est une constante telle que $\mathrm{Re}\, \beta_i \geqslant 3\beta$ (Lemme 3.1, P. Fife [1]).

Finalement nous considérons pour σ dans un voisinage de 0

$$A^{k\ell}(\sigma\omega, y) \equiv B_\ell(\sigma\omega, -D_y)\, G_k(\sigma, \omega, y) \equiv R_\ell(\sigma\omega, -D_y)\, G_k(\sigma, \omega, y) \tag{2.2.10}$$

où $b_\ell(\xi, \tau) \equiv B_\ell(\xi, \tau) \pmod{L^+(\xi, \tau)}$ donc ordre de $b_\ell \leqslant m_1 - 1$.

L'hypothèse IV entraîne que la matrice $(A^{k\ell}(\sigma\omega, 0))$ est inversible pour $\sigma \neq 0$ et l'on note alors :

$A_{jk}(\sigma\omega)$ cette matrice inverse.

D'autre part on notera successivement :

$$L^+(\xi, \tau) = \prod_{k=1}^{m_1} (\tau + \eta_k(\xi)) = \sum_{p=0}^{m_1} a_p(\xi)\, \tau^{m_1 - p} \qquad (a_o = 1) \tag{2.2.11}$$

$$L_j^+(\xi, \tau) = \sum_{p=0}^{j} a_p(\xi)\, \tau^{j-p} \qquad j = 0, 1, \ldots, m_1 - 1 . \tag{2.2.12}$$

On a alors : (Agmon-Douglis-Niremberg [1] p. 632)

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{L^+_{m_1-1-j}(\xi, \tau)\, \tau^k}{L^+(\xi, \tau)}\, d\tau = \delta_{jk} \tag{2.2.13}$$

où C est une courbe de Jourdan qui contient en son intérieur les $(-\eta_i)$

(2.2.14) Soit $(b_{jk}(\xi))$ la matrice inverse de $(b^{jk}(\xi))$ considérée en (2.1.8)

(2.2.15) Soit alors $N_k(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{m_1} (b_{ik}(\xi)\, L^+_{m_1-i}(\xi, \tau))$.

On a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{N_k(\xi, \tau)\, B_\ell(\xi, -\tau)}{L^+(\xi, \tau)}\, d\tau = \delta_{\ell k} \tag{2.2.16}$$

(Agmon-Douglis- iremberg [1] , p. 634)

Et on pose finalement :

$$(2.2.17) \qquad \mathcal{N}_k(\rho,\ \omega,\ \zeta) = \rho^{-m_1+\mu_k+1}\ \frac{N_k(\rho\omega,\ \rho\zeta)}{2i\pi}$$

et (2.2.16) entraîne que :

$$(2.2.18) \qquad \int_{C_a} \frac{\mathcal{N}_k(\rho,\ \omega,\ \zeta)\ \rho^{-\mu_\ell}\ B_\ell(\rho\omega,\ -\rho\zeta)}{\prod_{i=1}^{m_1} (\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})}\ d\zeta = \delta_{k\ell} \quad .$$

En effet il suffit de remplacer $\mathcal{N}_k(\rho,\ \omega,\ \zeta)$ par sa valeur dans (2.2.17) et de faire le changement de variable $\tau = \rho\zeta$.

2.2.b.- Noyaux de Poisson

Avec les notations précédentes, nous considérons les noyaux suivants :

$$(2.2.19) \quad K_j(x,y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{|z|=a} \frac{dz}{2\pi i z} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi(\tfrac{\rho}{a}) (\tfrac{\rho+z}{\rho})^{n-2} \sum_{k=1}^{m_1} A_{jk}(\xi+z\omega)\, G_k(\rho+z,\omega,y) e^{ix.(\xi+z\omega)}\, d\xi$$

$$+ \quad (2\pi)^{-n+1} \int_{C_a} d\zeta \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\tfrac{\rho}{a}))\ \rho^{-\mu_j} \mathcal{N}_j(\rho,\omega,\zeta) (\prod_{i=1}^{m_1} (\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}))^{-1} e^{\rho(ix.\omega+\zeta y)}\, d\xi$$

$$\equiv \quad K_{j_0}(x,y) \quad + \quad K_{j_1}(x,y) \quad .$$

Remarque 2.2.- L'intégrale sur le contour $|z| = a$ est introduite pour éviter une éventuelle discontinuité en $\xi = 0$ des $A_{jk}(\xi)$. S'il n'y a pas de telles singularités on pourra supprimer z en appliquant le théorème des résidus.

Remarque 2.3.- On voit sur (2.2.19) que les noyaux sont composés de deux parties : l'une au voisinage de $\rho = 0$ et l'autre au voisinage de l'infini. Nous étudierons dans ce chapitre le comportement asymptotique des $A_{jk}(\rho\omega)$ au voisinage de $\rho = 0$ d'une part et des $\mathcal{N}_j(\rho,\omega,\zeta)$ au voisinage de $\rho = +\infty$ d'autre part. La première étude sera faite seulement dans le cas des opérateurs frontières de Dirichlet.

2.3.- Comportement asymptotique des $A_{jk}(\rho\omega)$ pour $\rho = 0$ **lorsque les opérateurs** frontières sont de Dirichlet. (Cas général).

Considérons les opérateurs frontières associés aux polynômes :

(2.3.1) $$B_j(\xi,\eta) = (-\eta)^{j-1} \qquad j = 1,\ldots,m_1$$

2.3.a.- La matrice $[A^{k\ell}(\rho\omega,0)]$ au voisinage de 0

α) $k \leqslant m_o$.

(2.2.6) et (2.2.10) entraînent que :

(2.3.2) $$A^{k\ell}(\rho\omega,y) = \int_C \frac{\rho^{\ell-1}\, z^{k+\ell-2}\, e^{\rho yz}}{\prod_{i=1}^{m_o}\left(z + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}\right)}\, dz$$

Car $B_\ell(\frac{1}{i} D_x, - D_y) = D_y^{\ell-1}$ dans le cas (2.3.1)

D'où :

(2.3.3) $$A^{k\ell}(\rho\omega,0) = \rho^{\ell-1} \int_C \frac{z^{k+\ell-2}\, dz}{\prod_{i=1}^{m_o}\left(z + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}\right)}$$

Comme $A^{k\ell}(\rho\omega,0)$ est analytique au voisinage de $\rho = 0$ **par construction** on aura le premier terme de son développement en série en cherchant la limite lorsque $\rho \to 0$ du rapport $\dfrac{A^{k\ell}(\rho\omega,0)}{\rho^{\ell-1}}$, mais comme le lemme 1.1 donne :

$$\frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho} = \alpha_i(\omega) + O(\rho) \qquad \text{on aura :}$$

(2.3.4) $$A^{k\ell}(\rho\omega,0) = \rho^{\ell-1}(\alpha_{k\ell}(\omega) + O(\rho))$$

où

(2.3.5) $$\alpha_{k\ell}(\omega) = \int_C \frac{z^{k+\ell-2}}{\prod_{i=1}^{m_o}(z + \alpha_i(\omega))}\, dz$$

β) $k \geqslant m_o+1$

(2.2.7) et (2.2.10) entraînent que :

$$A^{k\ell}(\rho\omega,y) = \int_{C'} \frac{z^{k+\ell-m_o-2}\, e^{yz}}{\prod_{i=m_o+1}^{m_1} (z+\eta_i(\rho\omega))}\, dz \tag{2.3.6}$$

Donc :

$$A^{k\ell}(\rho\omega,0) = \int_{C'} \frac{z^{k+\ell-m_o-2}}{\prod_{i=m_o+1}^{m_1} (z+\eta_i(\rho\omega))}\, dz \quad . \tag{2.3.7}$$

Comme $\eta_i(\rho\omega) = \beta_i + O(\omega)$ au voisinage de $\rho = 0$ $i \geqslant m_o+1$ d'après le lemme 1.1, un raisonnement analogue au précédent dans le paragraphe α) entraîne :

$$A^{k\ell}(\rho\omega,0) = \alpha_{k\ell}(\omega) + O(\rho) \tag{2.3.8}$$

où

$$\alpha_{k\ell}(\omega) = \int_{C'} \frac{z^{k+\ell-m_o-2}}{\prod_{i=m_o+1}^{m_o} (z+\beta_i)}\, dz \tag{2.3.9}$$

La matrice des $A^{k\ell}(\rho\omega,0)$ aura donc un développement de la forme suivante au voisinage de $\rho = 0$:

$$\begin{bmatrix}
\alpha_{11}(\omega)+O(\rho) & \rho(\alpha_{12}(\omega)+O(\rho)) & \rho^2(\ldots) & \cdots\cdots & \rho^{m_1-1}(\alpha_{1m_1}(\omega)+O(\rho)) \\
\alpha_{21}(\omega)+O(\rho) & \rho(\alpha_{22}(\omega)+O(\rho)) & \rho^2(\ldots) & \cdots\cdots & \rho^{m_1-1}(\alpha_{2m_1}(\omega)+O(\rho)) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_{m_o1}(\omega)+O(\rho) & \rho(\alpha_{m_o2}(\omega)+O(\rho)) & \rho^2(\ldots) & \cdots\cdots & \rho^{m_1-1}(\alpha_{m_om_1}(\omega)+O(\rho)) \\
\alpha_{m_o+1,1}(\omega)+O(\rho) & \alpha_{m_o+1,2}(\omega)+O(\rho) & (\ldots) & \cdots\cdots & (\alpha_{m_o+1,m_1}(\omega)+O(\rho)) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_{m_1,1}(\omega)+O(\rho) & \alpha_{m_1,2}(\omega)+O(\rho) & (\ldots) & \cdots\cdots & (\alpha_{m_1m_1}(\omega)+O(\rho))
\end{bmatrix}$$

Notations.- On notera A_1 la matrice $(\alpha_{jk}(\omega))_{\substack{1\leqslant j\leqslant m_o \\ 1\leqslant k\leqslant m_o}}$

A_2 la matrice $(\alpha_{jk}(\omega))_{\substack{m_o+1\leqslant j\leqslant m_1 \\ m_o+1\leqslant k\leqslant m_1}}$

2.3.b.- La matrice $[A_{jk}(\rho\omega)]$ au voisinage de $\rho = 0$ (cas général)

Théorème 3.1.- Au voisinage de $\rho = 0$, on a les propriétés asymptotiques suivantes :

(2.3.10) $A_{jk}(\rho\omega) = O(\rho^{-(j-1)})$ $\quad j,k \leqslant m_o$

(2.3.11) $A_{jk}(\rho\omega) = O(\rho^{-(j-1)+m_o})$ $\quad j \leqslant m_o \quad k \geqslant m_o+1$

(2.3.12) $A_{jk}(\rho\omega) = O(\rho^{-(m_o-1)})$ $\quad j \geqslant m_o+1 \quad k \leqslant m_o$

(2.3.13) $A_{jk}(\rho\omega) = O(1)$ $\quad j \geqslant m_o+1 \quad k \geqslant m_o+1$

Preuve : La matrice inverse d'une matrice étant égale à la matrice transposée des cofacteurs divisée par le déterminant, on va chercher le premier terme du développement au voisinage de $\rho = 0$ des termes du déterminant d'une part et des cofacteurs d'autre part. Par définition première, le déterminant est obtenu en faisant la somme (à la signature près des permutations) des produits d'un terme de la première colonne, d'un terme de la deuxième colonne qui ne soit pas sur la même ligne que le terme précédent, ..., d'un terme de la $k^{\text{ième}}$ colonne qui ne soit pas sur la même ligne que les termes précédents etc... et ceci en faisant toutes les permutations possibles.

Considérons donc la matrice $A^{k\ell}(\rho\omega,0)$ développée ci-dessus. Le terme de plus bas degré en ρ de son déterminant sera obtenu en ne retenant que les produits de termes pris dans le carré $1 \leqslant k \leqslant m_o$ et $1 \leqslant \ell \leqslant m_o$ et le carré $m_o+1 \leqslant k$, $\ell \leqslant m_1$. Dans le premier carré on a en faisant le produit des différentes colonnes des termes de la forme $C(1 \times \rho \times \rho^2 \times \dots \times \rho^{m_o-1}) = C\,\rho^{\frac{m_o(m_o-1)}{2}}$ et dans le deuxième carré il n'y a que des constantes. Donc le terme de plus bas degré du développement du déterminant de $A^{k\ell}(\rho\omega,0)$ en puissance de ρ sera :

$$A\,\rho^{\frac{m_o(m_o-1)}{2}} \qquad \text{où} \quad A = \det(A_1) \times \det(A_2) \quad . \tag{2.3.14}$$

Pour les cofacteurs nous procéderons de même en distinguant les différents cas suivants :

α) $j,k \leqslant m_o$

Le cofacteur est obtenu comme le déterminant de la matrice considérée à la quelle on a enlevé le $j^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne. On se retrouve dans un cas analogue au précédent. On aura donc le terme de plus bas degré en ρ en multipliant $\det A_2$ au déterminant du cofacteur du terme (j,k) de la matrice A_1. La puissance de ρ sera alors $\frac{m_o(m_o-1)}{2} - (k-1)$ puisque l'on a retiré la colonne des ρ^{k-1}.

β) $j \leqslant m_o$ <u>et</u> $k \geqslant m_o+1$

Dans ce cas là on considère seulement le carré des m_o-1 lignes et colonnes du coin supérieur gauche de la matrice et le carré $m_o+1 \leqslant j \leqslant m_1$ et $m_o \leqslant \ell \leqslant m_1$ avec $\ell \neq k$. On obtient comme exposant de ρ : $\frac{m_o(m_o-1)}{2} - (m_o-1)$.

γ) $j \geqslant m_o+1$ <u>et</u> $k \leqslant m_o$

On supprime la $k^{\text{ième}}$ colonne c'est-à-dire celle où apparaissent les ρ^{k-1} dans les m_o premières lignes. On considérera alors le carré $1 \leqslant j \leqslant m_o$ et $1 \leqslant \ell \leqslant m_o+1$ avec $\ell \neq k$ et le carré $m_o+1 \leqslant \ell \leqslant m_1$, $\ell \neq j$ et $m_o+2 \leqslant k \leqslant m_1$.

L'exposant ρ sera alors $\frac{m_o(m_o-1)}{2} + m_o - (k-1)$.

δ) $j \geqslant m_o+1$ <u>et</u> $k \geqslant m_o+1$

Dans ce cas là on aura à multiplier $\det A_1$ au cofacteur du terme (j,k) de la matrice A_2 et la puissance de ρ sera $\dfrac{m_o(m_o-1)}{2}$.

D'où en divisant par le déterminant et en transposant la matrice des cofacteurs, on obtient le résultat énoncé :

Ecrivons le développement asymptotique de la matrice des $A_{jk}(\rho\omega)$ au voisinage de $\rho = 0$. On a :

$$
(2.3.15)\qquad
\begin{bmatrix}
\beta_{11}(\omega)(1+0(\rho)) & \beta_{12}(\omega)(1+0(\rho)) & \cdots & \beta_{1m_o}(\omega)(1+0(\rho)) & \rho^{m_o}\ \beta_{1m_o+1}(\omega)(1+0(\rho)) & \cdots & \rho^{m_o}\ \beta_{1m_1}(\omega)(1+0(\rho)) \\
\frac{\beta_{21}(\omega)}{\rho}(1+0(\rho)) & \frac{\beta_{22}(\omega)}{\rho}(1+0(\rho)) & \cdots & \frac{\beta_{2m_o}(\omega)}{\rho}(1+0(\rho)) & \rho^{m_o-1}\ \beta_{2m_o+1}(\omega)(1+0(\rho)) & \cdots & \rho^{m_o-1}\ \beta_{2m_1}(\omega)(1+0(\rho)) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\beta_{m_o1}(\omega)}{\rho^{m_o-1}}(1+0(\rho)) & \frac{\beta_{m_o2}(\omega)}{\rho^{m_o-1}}(1+0(\rho)) & \cdots & \frac{\beta_{m_om_o}(\omega)}{\rho^{m_o-1}}(1+0(\rho)) & \rho\beta_{m_om_o+1}(\omega)(1+0(\rho)) & \cdots & \rho\beta_{m_om_1}(\omega)(1+0(\rho)) \\
\frac{\beta_{m_o+1,1}(\omega)}{\rho^{m_o-1}}(1+0(\rho)) & \frac{\beta_{m_o+1,2}(\omega)}{\rho^{m_o-1}}(1+0(\rho)) & \cdots & \frac{\beta_{m_o+1,m_o}(\omega)}{\rho^{m_o-1}}(1+0(\rho)) & \beta_{m_o+1,m_o+1}(\omega)(1+0(\rho)) & \cdots & \beta_{m_o+1,m_1}(\omega)(1+0(\rho)) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\beta_{m_1,1}(\omega)}{\rho^{m_o-1}}(1+0(\rho)) & \frac{\beta_{m_1,2}(\omega)}{\rho^{m_o-1}}(1+0(\rho)) & \cdots & \frac{\beta_{m_1,m_o}(\omega)}{\rho^{m_o-1}}(1+0(\rho)) & \beta_{m_1,m_o+1}(\omega)(1+0(\rho)) & \cdots & \beta_{m_1,m_1}(\omega)(1+0(\rho))
\end{bmatrix}
$$

2.3.c.- <u>Calcul explicite des</u> $\beta_{jk}(\omega)$ <u>en fonction des</u> α_{jk} .

Pour cela il suffit de se reporter à chaque cas de la démonstration précédente et d'exprimer à quoi correspond chaque cofacteur divisé par le déterminant.

α) $j \leqslant m_o$ <u>et</u> $k \leqslant m_o$

$$
(2.3.16)\qquad \beta_{jk}(\omega) = \frac{\mathrm{cof}_1^*\ \alpha_{kj}(\omega)}{\det A_1}
$$

où cof_i^* désigne le cofacteur dans la matrice A_i $\quad i = 1, 2$.

β) $j \geqslant m_o+1$ <u>et</u> $k \leqslant m_o$

$$\beta_{jk}(\omega) = \frac{\det\begin{pmatrix} \alpha_{j1}(\omega) & \cdots & \alpha_{m_o-1}(\omega) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \widehat{\alpha_{k1}(\omega)} & \cdots & \widehat{\alpha_{km_o-1}(\omega)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m_o1}(\omega) & \cdots & \alpha_{m_o-1,m_o-1}(\omega) \end{pmatrix} \times \det\begin{pmatrix} \alpha_{m_o+1,m_o}(\omega) & \cdots & \widehat{\alpha_{m_o+1,j}(\omega)} & \cdots & \alpha_{m_o+1,m_1}(\omega) \\ \vdots & & \vdots & & \\ \alpha_{m_1,m_o}(\omega) & \cdots & \widehat{\alpha_{m_1,j}(\omega)} & \cdots & \alpha_{m_1m_1}(\omega) \end{pmatrix}}{\det A_1 \times \det A_2} \tag{2.3.17}$$

où les termes surmontés d'un $\wedge$ sont supprimés.

γ) $j \leqslant m_o$ <u>et</u> $k \geqslant m_o+1$

$$\beta_{jk}(\omega) = \frac{\det\begin{pmatrix} \alpha_{11}(\omega) & \cdots & \widehat{\alpha_{1j}(\omega)} & \cdots & \alpha_{1,m_o+1}(\omega) \\ \vdots & & \vdots & & \\ \alpha_{m_o1}(\omega) & \cdots & \widehat{\alpha_{m_oj}(\omega)} & \cdots & \alpha_{m_o,m_o+1}(\omega) \end{pmatrix} \times \operatorname{cof}_2^* \alpha_{k,m_o+1}}{\det A_1 \times \det A_2} \tag{2.3.18}$$

δ) $j \geqslant m_o+1$ <u>et</u> $k \geqslant m_o+1$

$$\beta_{jk}(\omega) = \frac{\operatorname{cof}_2^* \alpha_{kj}(\omega)}{\det A_2} . \tag{2.3.19}$$

<u>Remarque 3.1</u>.- On voit en étudiant la matrice (2.3.15) que l'on a des singularités à l'origine seulement pour les termes A_{jk} avec $k \leqslant m_o$ et $1 \leqslant j \leqslant m_1$. On pourra alors dans les expressions correspondant aux $A_{jk}(\xi)$ autres que ceux-ci supprimer l'intégration sur le contour $|z| = a$ dans (2.2.19). Le corollaire suivant du théorème 3.1 permettra aussi de s'affranchir de cette intégration dans certains cas.

Corollaire 3.1.- Si $\mathrm{Min}(m_o, j) < n$ l'intégrale

(2.3.20) $$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi(\tfrac{\rho}{a})\ A_{jk}(\rho\omega)\ G_k(\rho,\omega,y)\ e^{ix-\xi}\ d\xi$$

est absolument convergente.

Preuve : D'après Fife [1] $A_{jk}(\rho\omega)\ G_k(\rho,\omega,y)$ est analytique en ξ dans un voisinage de l'origine sauf peut-être à l'origine. Le théorème 3.1 précédent donne :

$$\begin{array}{llllll}
\text{Si} & j \leqslant m_o & |A_{jk}(\rho\omega)| \leqslant C\rho^{-(j-1)} & \text{si} & k \leqslant m_o & (1)\\
 & & \phantom{|A_{jk}(\rho\omega)|} \leqslant C\rho^{-(j-1)+m_o} & \text{si} & k \geqslant m_o+1 & (2)\\
\text{Si} & j \geqslant m_o+1 & |A_{jk}(\rho\omega)| \leqslant C\rho^{-(m_o-1)} & \text{si} & k \leqslant m_o & (3)\\
 & & \phantom{|A_{jk}(\rho\omega)|} \leqslant C & \text{si} & k \geqslant m_o+1 & (4)
\end{array}$$

où C désigne différentes constantes. On a d'autre part :

$$\int |\chi(\tfrac{\rho}{a})|\,|A_{jk}(\rho\omega)|\,|G_k(\rho,\omega,y)|\ d\xi = \int_{|\omega|=1} \int_0^\infty |\chi(\tfrac{\rho}{a})|\ \rho^{n-2}\ |A_{jk}(\rho\omega)|\,|G_k|\ d\rho\ d\omega\ .$$

Mais $|\chi(\frac{\rho}{a})|\rho^{n-2}\ |A_{jk}(\rho\omega)|\,|G_k|$ est continue en ρ sauf peut être en 0. Elle est prolongeable par continuité dans les cas (2) et (4) ci-dessus et dans ces cas donc l'intégrale est absolument convergente. Dans les cas (1) cette fonction est équivalente à l'origine à $\rho^{n-2-(j-1)}$ donc l'intégrale convergera si et seulement si $-(n-j+1) < 1 \Leftrightarrow j < n$. Dans le cas (3) elle est équivalente à l'origine à $\rho^{n-2-(m_o-1)}$. donc l'intégrale converge si et seulement si $-(n-2-(m_o-1)) < 1 \Leftrightarrow m_o < n$ d'où le résultat.

2.4.- Comportement asymptotique des $N_k(\rho,\omega,\xi)$ au voisinage de $\rho = +\infty$.

2.4.a.- La matrice des $b_{ik}(\rho\omega)$ au voisinage de $\rho = +\infty$.

Comme $\eta_i(\rho\omega) = \rho\gamma_i(\omega) + O(1)$ quand $\rho \to \infty$, $i = 1,\dots,m_1$ d'après le lemme 1.1, on peut écrire :

$$(2.4.1)\quad L^{+}(\rho\omega,\ \rho\tau) = \prod_{i=1}^{m_1} (\rho\tau + \eta_i(\rho\omega)) = \rho^{m_1} L_1^{+}(\omega,\tau) + P(\rho,\omega,\tau)$$

où on aura : $\rho^{-m_1} P(\rho,\omega,\tau) = O(\frac{1}{\rho})$ lorsque $\rho \to \infty$ (1)

Utilisons les notations introduites en 2.1.b et dans l'hypothèse IV, alors :

$$(2.4.2)\quad B_j(\rho\omega,\ -\rho\tau) = \rho^{\mu_j} B_j'(\omega,\ -\tau) + C_j(\rho\omega,\ \rho\tau)$$

où on aura : $\rho^{-\mu_j} C_j(\rho\omega,\ \rho\tau) = O(\frac{1}{\rho})$ (2)

Remplaçons $B_j'(\omega,\ -\tau)$ par son expression

$$(2.4.3)\quad B_j'(\omega,\ -\tau) = Q_j'(\omega,\tau)\ L_1^{+}(\omega,\tau) + R_j'(\omega,\tau) \quad .$$

On pourra alors écrire :

$$(2.4.5)\quad B_j(\rho\omega,\ -\rho\tau) = [\rho^{m_1} L_1^{+}(\omega,\tau) + P(\rho,\omega,\tau)]\ \rho^{\mu_j - m_1} Q_j'(\omega,\tau)$$
$$+ \rho^{\mu_j} R_j'(\omega,\tau) + C_j(\rho\omega,\ \rho\tau) - \rho^{\mu_j - m_1} P(\rho,\omega,\tau)\ Q_j'(\omega,\tau) \ .$$

Or en tenant compte de (1) et (2) ci-dessus, on a :

$$(3)\quad \rho^{-\mu_j}\ (C_j(\rho\omega,\ \rho\tau) - \rho^{\mu_j - m_1} P(\rho,\omega,\tau)\ Q_j'(\omega,\tau) = Q(\frac{1}{\rho}) \quad \text{quand} \quad \rho \to \infty \ .$$

Cette expression est un polynôme en τ de degré $< \mu_j$, dont chaque coefficient est $O(\frac{1}{\rho})$.

Divisons alors ce polynôme par $\rho^{-m_1} L^{+}(\rho\omega,\ \rho\tau)$ qui est un polynôme en τ de degré m_1 , dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1 et les autres coefficients sont constants ou $O(\frac{1}{\rho})$ quand $\rho \to \infty$. On aura :

$$\rho^{-\mu_j}\ (C_j(\rho\omega,\ \rho\tau) - \rho^{\mu_j - m_1} P(\rho,\omega,\tau)\ Q_j'(\omega,\tau)) = \rho^{-m_1} L^{+}(\rho\omega,\ \rho\tau)\ Q_j''(\rho,\omega,\tau) + R_j''(\rho,\omega,\tau)$$

où $d^{\circ}_{\tau}\ R_j''(\rho,\omega,\tau) < m_1$.

Mais par définition de la division euclidienne les coefficients de $Q_j''(\rho,\omega,\tau)$ et par suite de $R_j''(\rho,\omega,\tau)$ seront $O(\frac{1}{\rho})$ quand $\rho \to \infty$.

Finalement reportant cette expression dans (2.4.5), on aura :

$$B_j(\rho\omega,\ -\rho\tau) = L^+(\rho\omega,\ \rho\tau)[\rho^{\mu_j - m_1}(Q'_j(\omega,\tau) + Q''_j(\rho,\omega,\tau)] + \rho^{\mu_j}(R'_j + R''_j) \quad .$$

Donc, l'unicité de la division euclidienne entraîne :

$$\boxed{R_j(\rho\omega,\ \rho\tau) = \rho^{\mu_j}(R'_j(\omega,\tau) + R''_j(\rho,\omega,\tau)) = \rho^{\mu_j}(R'_j(\omega,\tau) + O(\tfrac{1}{\rho}))} \tag{2.4.6}$$

Or $R_j(\rho\omega,\ \rho\tau) = \sum\limits_{k=1}^{m_1} b^{jk}(\rho\omega)\ \rho^{k-1}\ \tau^{k-1}$

et $R'_j(\omega,\tau) = \sum\limits_{k=1}^{m_1} b'^{jk}(\rho\omega)\ \tau^{k-1}$.

Donc (2.4.6) entraîne :

$$\sum_{k=1}^{m_1} b^{jk}(\rho\omega)\ \rho^{k-1}\ \tau^{k-1} = \rho^{\mu_j}\ [\sum_{k=1}^{m_1} b'^{jk}(\omega)\ \tau^{k-1} + O(\tfrac{1}{\rho})] \quad .$$

D'où :

$$b^{jk}(\rho\omega) = \rho^{\mu_j - k+1}\ [b'^{jk}(\omega) + O(\tfrac{1}{\rho})] \quad . \tag{2.4.7}$$

Puisque $b^{jk}(\rho\omega)$ est inversible et si $b_{k\ell}(\rho\omega)$ est son inverse, on a :

$$\sum_{k=1}^{m_1} \rho^{-\mu_j + k-1}\ b^{jk}(\rho\omega) \times \rho^{\mu_j - k+1}\ b_{k\ell}(\rho\omega) = \delta_{j\ell} \quad .$$

Cherchons donc le développement au voisinage de $\rho = \infty$ de la matrice $(\rho^{\mu_j - k+1}\ b_{k\ell}(\rho\omega))$ en fonction de celui de la matrice $(\rho^{-\mu_j + k-1}\ b^{jk}(\rho\omega))$.

Or d'après (2.4.7) le développement de cette dernière matrice au voisinage de $\rho = \infty$ est $(b'^{jk}(\omega) + O(\frac{1}{\rho}))$.

Par définition de la matrice inverse comme étant la transposée de la matrice des cofacteurs multipliée par l'inverse du déterminant on a puisque $\Delta = \Delta' + O(\frac{1}{\rho})$ où $\Delta' = \det(b'^{jk}(\omega)) \neq 0$

$$\rho^{\mu_\ell - k+1}\, b_{k\ell}(\rho\omega) = b'_{k\ell}(\omega) + 0(\tfrac{1}{\rho})$$

c'est-à-dire :

(2.4.8) $$b_{k\ell}(\rho\omega) = \rho^{-\mu_\ell + k-1}\, b'_{k\ell}(\omega) \quad [1 + 0(\tfrac{1}{\rho})] \quad .$$

2.4.b.- <u>Les</u> $N_k(\rho,\omega,\tau)$ <u>au voisinage de</u> $\rho = \infty$

La définition (2.1.15) donne :

$$N_k(\rho\omega,\ \rho\tau) = \sum_{i=1}^{m_1} b_{ik}(\rho\omega)\ L_{m_1-i}(\rho\omega,\ \rho\tau)$$

Or $b_{ik}(\rho\omega) = \rho^{-\mu_k+i-1}\ b'_{ij}(\omega)\ [1 + 0(\tfrac{1}{\rho})]$.

Et si l'on note $\widehat{L_{m_1-1}}(\xi,\tau)$ le terme de plus haut degré du polynôme $L_{m_1-i}(\xi,\tau)$ on a :

$$L_{m_1-i}(\rho\omega,\ \rho\tau) = \rho^{m_1-i}\ \widehat{L_{m_1-i}}(\omega,\tau)\ [1 + 0(\tfrac{1}{\rho})] \quad .$$

Donc :

(2.4.9) $$N_k(\rho\omega,\ \rho\tau) = \rho^{-\mu_k+m_1-1}\ (\sum_{i=1}^{m_1} b'_{ik}(\omega)\ \widehat{L_{m_1-i}}(\omega,\tau)\ [1 + 0(\tfrac{1}{\rho})] \quad .$$

On définit alors :

(2.4.10) $$N_k(\infty,\omega,\tau) = \sum_{i=1}^{m_1} b'_{ik}(\omega)\ \widehat{L_{m_1-i}}(\omega,\tau) \quad .$$

Mais d'après (2.2.17)

$$N_k(\rho,\omega,\tau) = \rho^{-m_1+\mu_k+1}\ \frac{N_k(\rho\omega,\ \rho\tau)}{2i\pi} \quad .$$

D'où finalement :

(2.4.11) $$N_k(\rho,\omega,\tau) = [\sum_{i=1}^{m_1} b'_{ik}(\omega)\ \widehat{L_{m_1-i}}(\omega,\tau)]\ [1 + 0(\tfrac{1}{\rho})] \quad .$$

Maintenant on a successivement d'après les résultats précédents

$$B_\ell(\rho\omega,\ -\rho\tau) = \rho^{\mu_\ell}\ [B'_\ell(\omega,\ -\tau) + 0(\tfrac{1}{\rho})] \quad .$$

Donc :

$$\rho^{\mu_\ell}\ B_\ell(\rho\omega,\ -\rho\tau)\ \rightarrow\ B'_\ell(\omega,\ -\tau) \qquad \text{quand } \rho$$

$$N_k(\rho,\omega,\tau)\ \rightarrow\ N_k(\infty,\omega,\tau)$$

$$\prod_{i=1}^{m_1}\left(\tau + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}\right)\ \rightarrow\ \prod_{i=1}^{m_1}(\tau + \gamma_i(\omega))\ =\ L_1^+(\omega,\tau)\ .$$

Or nous pouvons passer à la limite dans (2.2.16) ce qui donne :

$$\int_{C_a} \frac{N_k(\infty,\omega,\tau)\ B'_\ell(\omega,\ -\tau)\ d\tau}{L_1^+(\omega,\tau)} = \delta_{k\ell} \qquad . \tag{2.4.18}$$

2.5.- Des propriétés de $G_k(\sigma,\omega,y)$

Celles-ci feront l'objet de deux lemmes qui seront très utiles dans la suite de ce travail.

Lemme 5.1.- (P. Fife [1] p. 111). Les fonctions $G_k(\sigma,\omega,y)$ $k = 1,2,\ldots,m_1$ sont définies et analytiques pour la variable complexe σ dans un voisinage de l'origine, pour tout vecteur ω réel de norme 1, et pour tout réel $y > 0$. De plus :

1) Pour chaque σ et ω , ces fonctions sont linéairement indépendantes (comme fonctions de y) et solutions de :

$$L^+(\sigma\omega,\ -D_y)\ G_k = 0 \quad ; \tag{2.5.1}$$

2) Pour $k = 1,2,\ldots,m_o$ elles peuvent être exprimées sous la forme

$$G_k(\sigma,\omega,y) = e^{-\alpha\sigma y}\ \widehat{G}_k(\sigma,\omega,\sigma y)$$

où α est telle que $\mathrm{Re}\ \eta_i(\rho\omega) \geqslant 3\alpha\rho$ et les fonctions $\widehat{G}_k(\sigma,\omega,\tau)$ et leurs dérivées sont bornées comme suit, où $\sigma = \rho$ est réel :

(2.5.2) $$|D^{k'}\ \widehat{G}_k(\rho,\omega,\tau)| \leqslant E_{k'}$$

pour $\rho \geqslant 0$, $|\omega| = 1$, $\tau \geqslant 0$. Ici $D^{k'}$ désigne des dérivées par rapport à ρ , ω et/ou τ d'ordre k' , et $E_{k'}$ sont des constantes positives dépendant seulement de L^+ et k ;

3) Pour $\sigma = \rho$ réel et $k = m_o+1,\ldots,m_1$, les G_k peuvent être exprimées sous la forme

(2.5.3) $$G_k(\rho,\omega,y) = e^{-(\beta y+\alpha\rho y)}\ \widehat{G}_k(\rho,\omega,\ y)$$

où les $\widehat{G}_k$ et leurs dérivées ont la même majoration que dans (2) ci-dessus.

<u>Lemme 5.2</u>.- Si $k \leqslant m_o$ et ℓ un entier quelconque positif ou nul, nous avons :

(2.5.4) $$|D_y^\ell\ G_k(\rho,\omega,y)| \leqslant C\ \ \rho^\ell\ e^{-\alpha\rho y}$$

où la constante C ne dépend que de L^+ et ℓ et ρ dans un voisinage de l'origine.

Si $k \geqslant m_o+1$, nous avons :

(2.5.5) $$|D_y^\ell\ G_k(\rho,\omega,y)| \leqslant C\ \ e^{-(\beta y+\alpha\rho y)}\ .$$

<u>Preuve</u> : C'est une conséquence du lemme 5.1 précédent. En effet si $k \leqslant m_o$

$$G_k(\rho,\omega,y) = e^{-\alpha\rho y}\ \widehat{G}_k(\rho,\omega,\rho y)$$

et $|D_\tau^\ell\ \widehat{G}_k(\rho,\omega,\tau)| \leqslant E_\ell$, où E_ℓ ne dépend que de L^+ et ℓ .

Par dérivation d'un produit, on a donc :

$$D_y^\ell\ G_k(\rho,\omega,y) = e^{-\alpha\rho y}\ [(-\alpha\rho)^\ell\ \widehat{G}_k +\ldots+ (-\alpha\rho)^p\ \rho^{\ell-p}\ D_\tau^{\ell-p}\ \widehat{G}_k +\ldots+ \rho^\ell\ D_\tau^\ell\ \widehat{G}_k]$$

car $D_y\ \widehat{G}_k = D_\tau\ \widehat{G}_k\ \ \dfrac{\partial\tau}{\partial y}$.

D'où l'on déduit la première inégalité :

$$|D_y^\ell \, G_k(\rho,\omega,y)| \leqslant C \, \rho^\ell \, e^{-\alpha\rho y} \quad .$$

De même lorsque $k \geqslant m_o+1$ le lemme 5.2 donne :

$$G_k(\rho,\omega,y) = e^{-(\beta y+\alpha\rho y)} \, \widehat{G}_k(\rho,\omega,\rho y) \quad .$$

Donc :

$$D_y^\ell \, G_k(\rho,\omega,y) = e^{-(\beta y+\alpha\rho y)} \, [(-\beta y-\alpha y\rho)^\ell \, \widehat{G}_k + \ldots + \rho^\ell \, D_\tau^\ell \, \widehat{G}_k(\rho,\omega,\tau)]$$

et comme $|D_\tau^\ell \, \widehat{G}_k(\rho,\omega,\tau)| \leqslant E_k$, on a le résultat annoncé.

2.6.- Etude des noyaux de Poisson dans le cas de racines simples du polynôme caractéristique.

Théorème 6.1.- Si l'on suppose toutes les racines du polynôme caractéristique distinctes, on a :

$$\sum_{k=1}^{m_1} A_{jk}(\rho\omega) \, G_k(\rho,\omega,y) = \int_{C_a} \rho^{-\mu_j} \, \frac{N_j(\rho,\omega,\zeta)}{\prod_{i=1}^{m_1} \left(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}\right)} \, e^{\rho\zeta y} \, d\zeta \quad . \tag{2.6.1}$$

Preuve : Dans ce cas là d'après (2.2.5), nous avons :

$$G_k(\rho,\omega,y) = e^{-\eta_k(\rho\omega)y} \qquad k = 1,2,\ldots,m_1 \quad .$$

On peut alors calculer :

$$A^{k\ell}(\rho\omega,y) = B_\ell(\rho\omega, -D_y) \, G_k(\rho,\omega,y) = D_y^\ell \, G_k(\rho,\omega,y) = [-\eta_k(\rho\omega)]^{\ell-1} \, e^{-\eta_k(\rho\omega)y} \, .$$

D'où :

$$A^{k\ell}(\rho\omega,0) = [-\eta_k(\rho\omega)]^{\ell-1} \quad . \tag{2.6.2}$$

C'est donc une matrice de Vander Mond inversible puisque toutes les racines sont distinctes. Et sa matrice inverse aura pour terme générique :

$$(2.6.3) \qquad A_{jk}(\rho\omega) = \frac{\sigma_{m_1-j} \prod\limits_{i\neq k}^{m_1} [(\tau + \eta_i(\rho\omega))]}{\prod\limits_{i\neq k}^{m_1} (\eta_k(\rho\omega) - \eta_i(\rho\omega))} .$$

Où σ_{m_1-j} désigne le polynôme symétrique en les racines du polynôme entre crochets c'est-à-dire la somme des produits m_1-j à m_1-j des racines du polynôme entre crochets. Par exemple pour $j = 1$ on aura le produit des $(-\eta_i(\rho\omega))$ pour $i \neq k$ et pour $j = m_1-1$ on aura leur somme.

Appliquons alors le théorème des résidus au deusième membre de l'égalité à démontrer. On aura puisque les racines sont simples :

$$A = 2\pi i \sum_{k=1}^{m_1} \rho^{-\mu_j} \frac{N_j(\rho,\omega, \frac{-\eta_k(\rho\omega)}{\rho})}{\prod\limits_{i\neq k}^{m_1} (\frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho} - \frac{\eta_k(\rho\omega)}{\rho})} e^{-\eta_k(\rho\omega)y} .$$

Or par définition on a vu (2.2.17) que :

$$N_j(\rho,\omega, \frac{-\eta_k(\rho\omega)}{\rho}) = \rho^{-m_1+\mu_j+1} \frac{N_j(\rho\omega, -\eta_k(\rho\omega))}{2\pi i}$$

et $\qquad N_j(\rho\omega, -\eta_k(\rho\omega)) = L^+_{m_1-j}(\rho\omega, -\eta_k(\rho\omega)) \quad$ car $\quad B_\ell(\rho\omega, -\tau) = (\tau)^{\ell-1}$

$$= \sum_{p=0}^{m_1-j} a^+_p(\rho\omega) \, (-\eta_k(\rho\omega))^{m_1-j-p} \qquad \text{d'après (2.2.12)}$$

où $a^+_p = (-1)^p \sigma_p [\prod\limits_{i=1}^{m_1} (\tau + \eta_i(\rho\omega)]$ (relation entre les coefficients du polynôme (2.2.11) et ses racines). Et comme :

$$(2.6.4) \qquad \sum_{p=0}^{m_1-j} (-1)^p \sigma_p [\prod_{i=1}^{m_1} (\tau + \eta_i(\rho\omega)](- \eta_k(\rho\omega))^{m_1-j-p}$$

$$= (-1)^{m_1-1} \sigma_{m_1-j} [\prod_{i\neq k}^{m_1} (\tau + \eta_i(\rho\omega))] .$$

On obtient :

$$(2.6.5) \qquad A = \sum_{k=1}^{m_1} \frac{\sigma_{m_1-j}\left[\prod\limits_{i\neq k}^{m_1} (\tau + \eta_i(\rho\omega))\right]}{\prod\limits_{i\neq k}^{m_1} (\eta_k(\rho\omega) - \eta_i(\rho\omega))} e^{-\eta_k(\rho\omega)y}$$

Ce qui achève le théorème.

Remarque 6.1.- Donc dans le cas où les racines sont simples et les singularités à l'origine pas trop fortes pour que l'intégrale converge, les noyaux s'écrivent alors :

$$(2.6.6) \qquad K_j(x,y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{R^{n-1}} \sum_{k=1}^{m_1} \frac{\sigma_{m_1-j}\left[\prod\limits_{i\neq k}^{m_1} (\tau + \eta_i(\rho\omega))\right]}{\prod\limits_{i\neq k}^{m_1} (\eta_k(\rho\omega) - \eta_i(\rho\omega))} e^{ix\cdot\xi-\eta_k(\rho\omega)y} \, d\xi \, .$$

Remarque 6.2.- Dans ce cas là le développement au voisinage de l'origine des $A_{jk}(\rho\omega)$ peut se faire plus directement à partir de l'expression (2.6.3). Faisons alors le calcul lorsque de plus les $\alpha_i(\omega)$ et les β_i sont distinctes.

a) $j \leqslant m_o$ et $k \leqslant m_o$

Chaque élément de la somme $\sigma_{m_1-j}\left[\prod\limits_{i\neq k}^{m_1} (\tau - \eta_i(\rho\omega))\right]$ est un produit de (m_1-j) racines autres que $-\eta_k(\rho\omega)$ et $m_1-j \geqslant m_1-m_o$. On obtiendra donc les termes en la plus petite puissance de ρ en ne considérant que les racines $\eta_i(\rho\omega)$ avec $i \geqslant m_o+1$ car dans ce cas $\eta_i(\rho\omega) = \beta_i + O(\rho)$ et donc :

$$\sigma_{m_1-j}\left[\prod_{i\neq k}^{m_1} (\tau - \eta_i(\rho\omega))\right] = \rho^{m_o-j} \left(\prod_{i=m_o+1}^{m_1} \beta_i \, \sigma_{m_o-j}\left[\prod_{i\neq k}^{m_o} (\tau + \alpha_i(\omega))\right] + O(\rho)\right) .$$

De même on aura :

$$\prod_{i\neq k}^{m_1} (\eta_k(\rho\omega) - \eta_i(\rho\omega)) = \rho^{m_o-1} \left(\prod_{i\neq k}^{m_o} (\alpha_k(\omega) - \alpha_i(\omega)) \prod_{i=m_o+1}^{m_1} \beta_i + O(\rho)\right) .$$

Il suffit de tenir compte du lemme 2.1.1 sur les racines $\eta_i(\rho\omega)$. D'où dans le cas $j \leqslant m_o$ et $k \leqslant m_o$, on a :

(2.6.7) $$A_{jk}(\rho\omega) = \frac{1}{\rho^{j-1}}\,[\beta_{jk}(\omega) + O(\rho)] = \frac{1}{\rho^{j-1}}\left[\frac{\sigma_{m_o-j}\,(\prod\limits_{i\neq k}^{m_o}(\tau + \alpha_i(\omega)))}{\prod\limits_{i\neq k}^{m_o}(\alpha_k(\omega) - \alpha_i(\omega))} + O(\rho)\right]$$

b) $j \leqslant m_o$ <u>et</u> $k \geqslant m_o+1$

Chaque élément de la somme σ_{m_1-j} est encore un produit de (m_1-j) racines autres que $-\eta_k$ et $m_1-j \geqslant m_1-m_o$. Mais cette fois $k \geqslant m_o+1$, donc :

$$\sigma_{m_1-j}\,(\prod_{i\neq k}^{m_1}(\tau + \eta_i(\rho\omega))) = \rho^{m_o-j+1}\left[\prod_{i\neq k}^{m_1}\beta_i\,\sigma_{m_o-j+1}\,[\prod_{i=1}^{m_o}(\tau + \alpha_i(\omega))] + O(\rho)\right]$$

et

$$\prod_{i\neq k}^{m_1}(\eta_k(\rho\omega) - \eta_i(\rho\omega)) = \beta_k^{m_o}\prod_{i\neq k}^{m_1}(\beta_k - \beta_i) + O(\rho) \quad .$$

D'où finalement :

(2.6.8) $$A_{jk}(\rho\omega) = \rho^{m_o-j+1}(\beta_{jk}(\omega) + O(\rho)) =$$

$$\rho^{m_o-j+1}\left[\frac{\prod\limits_{i\neq k}^{m_1}\beta_i\,\sigma_{m_o-j+1}\,[\prod\limits_{i=1}^{m_o}(\tau + \alpha_i(\omega))]}{\beta_k^{m_o}\prod\limits_{i\neq k}^{m_1}(\beta_k - \beta_i)} + O(\rho)\right] .$$

c) $j \geqslant m_o+1$ <u>et</u> $k \leqslant m_o$.

Dans ce cas là $m_1-j < m_1-m_o$, il suffira donc de prendre les termes de la somme σ_{m_1-j} ne contenant que des produits de β_i . On a alors :

$$\sigma_{m_1-j}\prod_{i\neq k}^{m_1}(\tau + \eta_i(\rho\omega) = \sigma_{m_1-j}\,[\prod_{i=m_o+1}^{m_1}(\tau + \beta_i)] + O(\rho)$$

et

$$\prod_{i\neq k}^{m_1}(\eta_k(\rho\omega) - \eta_i(\rho\omega)) = \rho^{m_o-1}\,(\prod_{i\neq k}^{m_o}(\alpha_k(\omega) - \alpha_i(\omega))\prod_{i=m_o+1}^{m_1}\beta_i + O(\rho)) \quad .$$

D'où :

$$(2.6.9) \qquad A_{jk}(\rho\omega) = \frac{1}{\rho^{m_o-1}}(\beta_{jk} + O(\rho)) = \frac{1}{\rho^{m_o-1}}\left[\frac{\sigma_{m_1-j}\left[\prod_{i=m_o+1}^{m_1}(\tau+\beta_i)\right]}{\prod_{i\neq k}^{m_o}(\alpha_k(\omega)-\alpha_i(\omega))\prod_{i=m_o+1}^{m_1}\beta_i} + O(\rho)\right]$$

d) $j \geqslant m_o+1$ <u>et</u> $k \geqslant m_o+1$

Le résultat est immédiat d'après b) et c) , on a :

$$(2.6.10) \qquad A_{jk}(\rho\omega) = \beta_{jk}(\omega) + O(\rho) = \frac{\sigma_{m_1-j}\left[\prod_{i\neq k}^{m_1}(\tau+\beta_i)\right]}{\beta_k^{m_o}\prod_{i\neq k}^{m_1}(\beta_k-\beta_i)}$$

On retrouve ainsi par un calcul plus direct les résultats du cas général avec les $\beta_{jk}(\omega)$ calculés explicitement en fonction des racines $\alpha_i(\omega)$ de $L_o(\omega,\alpha) = 0$ et avec les racines β_i non nulles à partie réelle positive de $L(0, \beta_i) = 0$.

CHAPITRE III

Solutions du problème de Dirichlet non homogène

Théorème 0.1.- Soient $K_j(x,y)$ définis par (2.2.19) et $\varphi_j(x)$, $j = 1,2,\dots,m_1$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact. Alors :

$$(3.0.1) \qquad u(x,y) = \sum_{j=1}^{m_1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_j(x-\tau,y) \ \varphi_j(\tau)\ d\tau = \sum_{j=1}^{m_1} u_j(x,y)$$

est solution du problème de Dirichlet suivant :

$$(3.0.2) \qquad L(\tfrac{1}{i} D_x, -D_y)\ u(x,y) = 0 \qquad y > 0$$

$$(3.0.3) \qquad B_\ell(\tfrac{1}{i} D_x, -D_y)\ u(x,0) = \varphi_\ell(x) \qquad \ell = 1,2,\dots,m_1 \ .$$

Le théorème sera encore valable si les $\varphi_j(x)$ ne sont plus à support compact mais décroissantes assez rapidement à l'infini en particulier pour $\varphi_j(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Pour la démonstration on se reportera à P. Fife [1] .

Explicitons les $K_j(x-\tau,y)$ dans (3.0.1), on aura :

$$(3.0.4) \qquad u_j(x,y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{|z|=a} \chi(\tfrac{\rho}{a}) (\tfrac{\rho+z}{\rho})^{n-2} \sum_{k=1}^{m_1} A_{jk}(\xi+z\omega) G_k(\rho+z,\omega,y)$$
$$\cdot\ e^{i(x-\tau)(\xi+z\omega)}\ \varphi_j(\tau)\ d\xi\ d\tau$$
$$+ (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{C_a} d\zeta \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1-\chi(\tfrac{\rho}{a}))\ \rho^{-(j-1)}\ N_j(\rho,\omega,\zeta)\ \cdot$$
$$\cdot \left(\pi(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})\right)^{-1} e^{\rho(i(x-\tau)\omega+\zeta y)}\ \varphi_j(\tau)\ d\xi\ d\tau \ .$$

On peut en utilisant Fubini et la définition de l'intégrale de Fourier écrire (3.0.4) sous la forme :

$$(3.0.5)\quad u_j(x,y) = (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \int_{|z|=a} \frac{dz}{2\pi i z} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi(\tfrac{\rho}{a}) \left(\frac{\rho+z}{\rho}\right)^{n-2} \sum_{k=1}^{m_1} A_{jk}(\xi+z\omega) G_k(\rho+z,\omega,y)$$

$$e^{ix(\xi+z\omega)}\, \widehat{\varphi_j}(\xi+z\omega)\, d\xi$$

$$+ (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \int_{C_a} d\zeta \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1-\chi(\tfrac{\rho}{a}))\, \rho^{-(j-1)}\, N_j(\rho,\omega,\zeta)\left(\pi\left(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}\right)\right)^{-1}$$

$$e^{\rho(ix\omega+\zeta y)}\, \widehat{\varphi_j}(\xi)\, d\xi$$

$$= u_j^1(x,y) + u_j^2(x,y)$$

où $\widehat{\varphi_j}(\lambda) = (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi_j(\tau)\, e^{-i\tau\cdot\lambda}\, d\tau$.

Notations 1.- Si $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$ on notera sa transformée de Fourier inverse par $\overline{\mathcal{F}}$.

On rappelle que si $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1})$ est un multi-indice, on a :

$$(3.0.6)\qquad D^\alpha\, \overline{\mathcal{F}}(f(\xi))(x) = \overline{\mathcal{F}}((i\xi)^\alpha f(\xi))(x)$$

et où $\xi = \xi_1^{\alpha_1}\, \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$

$$(3.0.7)\qquad \widehat{D^\alpha f(x)}(\xi) = (+\, i\xi)^\alpha\, \hat{f}(\xi)$$

On utilisera dans la suite les notations suivantes :

$$(3.0.8)\qquad f_{jk}^{\alpha\beta}(\xi,y) = \chi(\tfrac{\rho}{a})\, A_{jk}(\xi)\, D_y^\beta\, G_k(\rho,\omega,y)\, \widehat{D^\alpha \varphi_j}(\xi)$$

$$(3.0.9)\qquad f_j^{\alpha\beta}(\xi,y) = \sum_{k=1}^{m_1} f_{jk}^{\alpha\beta}(\xi,y)$$

$$(3.0.10)\qquad g_j^\beta(\xi,y) = (1-\chi(\tfrac{\rho}{a})) \int_{C_a} \frac{\rho^{-(j-1)}\, N_j(\rho,\omega,\zeta)(\rho\zeta)^\beta\, e^{\rho\zeta y}}{\prod_{i=1}^{m_1}\left(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}\right)}\, d\zeta$$

3.1.- Propriétés de la solution dans le cas général.

Théorème 1.1.- Soient $\varphi_j(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 1,\dots,m_1$ alors pour $j \leqslant m_o$ et $\forall\, y \geqslant 0$, les $D_y^{j-1}\, u_j(x,y)$ appartiennent à l'espace $H^r(\mathbb{R}^{n-1})$ comme fonctions de x et

$$(3.1.1) \qquad \| D_y^{j-1} u_j(x,y) \|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C \; \|\varphi_j\|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})} \qquad \forall\, r \in \mathbb{N}$$

et si $j \geqslant m_o+1$, les fonctions de x $D_y^{m_o-1} u_j(x,y)$ sont dans $H^r(\mathbb{R}^{n-1})$ et

$$(3.1.2) \qquad \| D_y^{m_o-1} u_j(x,y) \|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C \; \|\varphi_j\|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})} \qquad \forall\, r \in \mathbb{N}$$

et C est indépendante de y .

<u>Preuve</u> : Lorsque $y = 0$ et $j = 1,\dots,m_o$ $D_y^{j-1} u_j(x,0) = \varphi_j(x)$ et le théorème est immédiat, de même si $j = m_o+1,\dots,m_1$ $D_y^{m_o-1} u_j(x,0) = 0$.

Supposons alors $y > 0$, il nous suffit de montrer que $D_y^{j-1} u_j^1$ et $D_y^{j-1} u_j^2$ sont dans $H^r(\mathbb{R}^{n-1})$ c'est-à-dire si $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$ que $D_x^\alpha\, D_y^{j-1} u_j^1$ et $D_x^\alpha u_j^2$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ pour tout α tel que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} \leqslant r$.

Or si $j \leqslant m_o$, $\sum_{k=1}^{m_1} A_{jk}(\rho\omega)\; D_y^{j-1} G_k(\rho,\omega,y)$ n'a pas de singularités à l'origine à cause du lemme (2.5.2) et du théorème (2.3.1) , on peut donc s'affranchir de l'intégration sur le contour $|z| = a$ et on a avec les notations ci-dessus :

$$(3.1.3) \qquad D_x^\alpha\, D_y^{j-1} u_j^1(x,y) = \bar{\mathfrak{F}}_\xi \left[f_j^{\alpha(j-1)}(\xi,y) \right](x) \quad .$$

Il nous suffit donc de montrer que $f_j^{\alpha(j-1)}(\xi,y)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ pour $y > 0$ à cause du théorème de Plancherel. On a :

$$(3.1.4) \qquad \sum_{|\alpha|\leqslant r} \| D_x^\alpha\, D_y^{j-1} u_j^1(x,y) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = (2\pi)^{-n+1} \sum_{|\alpha|\leqslant r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} | f_j^{\alpha(j-1)}(\xi,y) |^2 d\xi$$

Or $\left|\chi(\frac{\rho}{a}) \sum_{j=1}^{m_1} A_{jk}\, D_y^{j-1} G_k\right|$ est borné indépendamment de y . En effet le lemme (2.5.2) donne :

$$|D_y^{j-1}\, G_k(\rho,\omega,y)| \leq C\, \rho^{j-1}\, e^{-\alpha\rho y} \leq C\, \rho^{j-1} \quad \text{car} \quad e^{-\alpha\rho y} \leq 1 \quad \forall\, \rho, y \geq 0 \quad .$$

Donc :

$$|\chi(\tfrac{\rho}{a}) \sum_{j=1}^{m_1} A_{jk}\, D_y^{j-1}\, G_k| \leq (\chi(\tfrac{\rho}{a})) \sum_{j=1}^{m_1} |\rho^{j-1}\, A_{jk}(\rho\omega)|$$

et cette quantité est bornée comme fonction continue sur $[0,a]$, la **continuité** en 0 étant due au théorème (2.3.1) .

Donc :

$$\sum_{|\alpha|\leq r} \|D_x^\alpha\, D_y^{j-1}\, u_j^1(x,y)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \sum_{|\alpha|\leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{D^\alpha\varphi_j}(\xi)|^2\, d\xi = C\, \|\varphi_j\|^2_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})}$$

d'où la première partie.

De même on a :

(3.1.5) $$D_x^\alpha\, D_y^{j-1}\, u_j^2(x,y) = \bar{\mathcal{F}}[\, g_j^{j-1}(\xi,y)\, \widehat{D^\alpha\varphi_j}(\xi)]\, (x) \quad .$$

Et comme précédemment en appliquant la formule de Plancherel :

(3.1.6) $$\sum_{|\alpha|\leq r} \|D_x^\alpha\, D_y^{j-1}\, u_j^2\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = (2\pi)^{-n+1} \sum_{|\alpha|\leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |g_j^{j-1}(\xi,y)|^2\, |\widehat{D^\alpha\varphi_j}(\xi)|^2\, d\xi \quad .$$

Or :

$$|g_j^{j-1}(\xi,y)|^2 = \rho \left|\int_{C_a} \frac{N_j(\rho,\omega,\zeta)\,\zeta^\beta\, e^{\rho\zeta y}}{\pi(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})}\, d\zeta\right|^2 (1 - \chi(\tfrac{\cdot}{a}))^2 \quad .$$

La courbe de Jourdan C_a étant bornée, $N_j(\rho,\omega,\zeta)$ étant continue et **bornée** à l'infini à cause de (2.4.11) , et $\frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}$ étant bornés à l'infini à cause **du** lemme (2.1.1), la fonction étant nulle pour $\rho \geq a$, on a donc :

$$\left| \frac{N_j(\rho,\omega,\zeta)\ \zeta^\beta}{(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})} \right| \leqslant C \qquad \text{(C est indépendante de } \rho \text{ et } \omega \text{)} .$$

Donc :

$$(3.1.7) \qquad |g_j^{j-1}(\xi,y)|^2 \leqslant C \times (\text{Long } C_a)^2 \times (\sup_{\zeta \in C_a} |e^{\rho\zeta y}|)^2 \leqslant C_1\ e^{-2\rho a y} \leqslant C_1 \ .$$

D'où on tire de (3.1.6) :

$$\| u_j^2(x,y) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C_1 \sum_{|\alpha|\leqslant r} \int |\widehat{D^\alpha \varphi_j}(\xi)|^2\ d\xi = C_1\ \|\varphi_j\|^2_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})}$$

On a ainsi la première partie du théorème.

Dans le cas où $j \geqslant m_o+1$ on procède comme précédemment. Ici la singularité à l'origine des $A_{jk}(\rho\omega)$ est de l'ordre de $\rho^{-(m_o+1)}$ d'après le théorème (2.3.1) et donc la dérivation en y d'ordre m_o-1 supprime cette singularité.

<u>Corollaire</u>.- Si $\varphi_j(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 1,\dots,m_1$, alors $D_y^{j-1}\ u_j(x,y)$ est indéfiniment différentiable comme fonction de x pour tout y fixé positif ou nul lorsque $j \leqslant m_o$ et il en est de même de $D_y^{m_o-1}\ u_j(x,y)$ pour $j \geqslant m_o+1$.

<u>Preuve</u> : C'est une conséquence du lemme de Sobolev et du théorème (3.1.1) .

<u>Notations 2</u>.- Pour des fonctions $u(x,y)$ et $\varphi(x)$ définies sur $\mathbb{R}^n_+$ et $\mathbb{R}^{n-1}$ respectivement . On note lorsque cela a un sens. (Cf. Agmon-Douglis-Niremberg [1])

$$(3.1.8) \qquad |u|_{j,H^r(\mathbb{R}^n_+)} = \left(\sum_{|p|=j} \|D^p u\|^2_{H^r(\mathbb{R}^n_+)} \right)^{1/2} \qquad \text{où } j \in \mathbb{N}$$

$$(3.1.9) \qquad |\varphi|^*_{j-1/2,H^r(\mathbb{R}^{n-1})} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\ |\xi|^{j-1/2}\ (1+|\xi|^2)^{r/2}\ |\hat{\varphi}(\xi)|\ ]^2\ d\xi \right)^{1/2}$$

où $j \in \mathbb{Z}$.

Théorème 1.2.- Soit $\varphi_j \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ telle que $|\varphi_j|^*_{1/2,H^r(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty$,

alors $|D_y^{j-1} u_j|_{1,H^r}$ est fini pour $j \leqslant m_o$ et on a :

(3.1.10) $$|D_y^{j-1} u_j|_{1,H^r(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \ |\varphi_j|^*_{1/2,H^r(\mathbb{R}^{n-1})} \quad .$$

De même pour $j \geqslant m_o+1$ $|D_y^{m_o-1} u_j|_{1,H^r(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\ |\varphi_j|^*_{1/2,H^r(\mathbb{R}^{n-1})}$ **(3.1.11)**

Preuve : On a :

$$|D_y^{j-1} u_j|_{1,H^r} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \| D_{x_i} \ D_y^{j-1} \ u_j \|^2_{H^r(\mathbb{R}^n_+)} \right)^{1/2} \quad .$$

On est donc ramené à calculer $D^p \ D_{x_i} \ D_y^{j-1} \ u_j$ où $p = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ et $|p| \leqslant r$. Comme dans le théorème précédent, les dérivations D_y^{j-1} font **dispa**raître la singularité des $A_{jk}(\rho\omega)$. Et on a :

(3.1.11) $$D^p \ D_{x_i} \ D_y^{j-1} \ u_j^1 = \overline{\mathfrak{F}}[f^{(\alpha+e_i)(\alpha_n+j-1)}(\xi,y)] \ (x)$$

$$\text{où} \quad e_i = (0,0,\ldots,1,\ldots 0)$$

$$p = (\alpha, \alpha_n) \quad .$$

Donc ceci appartiendra à $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ si la quantité suivante est finie :

(3.1.12) $$\| D^p \ D_{x_i} \ D_y^{j-1} \ u_j^1 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} =$$

$$= (2\pi)^{-n+1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_j^{(\alpha+e_i)(\alpha_n+j-1)}(\xi,y)|^2 \ d\xi \ dy \quad .$$

Or le lemme (2.5.2) donne dans le cas où $k \leqslant m_o$:

$$|D_y^{\alpha_n} \ D_y^{j-1} \ G_k(\rho,\omega,y)|^2 \leqslant C \ \rho^{2(\alpha_n+j-1)} \ e^{-2\alpha\rho y} \quad .$$

Et le théorème 2.3.1 donne pour $\rho \leqslant a$ les majorations :

$$|A_{jk}(\rho\omega)|^2 \leqslant C\,\rho^{-2(j-1)} \qquad \text{lorsque} \quad j,k \leqslant m_o \quad .$$

Donc :

$$(3.1.13) \qquad \sum_{k=1}^{m_o} |A_{jk}(\rho\omega)|^2\, |D_y^{\alpha_n}\, D_y^{j-1}\, G_k(\rho,\omega,y)|^2 \leqslant C\,\rho^{2\alpha_n}\, e^{-2\alpha\rho y} \quad .$$

D'où :

$$(3.1.14) \qquad (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \sum_{k=1}^{m_o} |f_{jk}^{(\alpha+e_i)(\alpha_n+j-1)}(\xi,y)|^2\, d\xi\, dy \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} C\,\chi^2(\tfrac{\rho}{a})\,\rho^{-2j+2}\,\rho^{2\alpha_n+2j-2}\left[\int_0^\infty e^{-2\alpha\rho y} dy\right] |\widehat{D^\alpha D_{x_i}\varphi_j}(\xi)|^2\, d\xi$$

et après intégration en y :

$$(3.1.15) \qquad \leqslant C(2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} C\,\chi^2(\tfrac{\rho}{a})\,\frac{1}{2\alpha\rho}\,\xi_1^{2\alpha_1}\ldots\xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}}\,\xi_i^2\,\rho^{2\alpha_n}\,|\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2\, d\xi \quad .$$

De même lorsque $k \geqslant m_o+1$, le lemme (2.5.2) entraîne :

$$|D_y^{\alpha_n}\, D_y^{j-1}\, G_k|^2 \leqslant C\, e^{-2(\beta y+\alpha\rho y)}$$

et comme :

$$|A_{jk}(\rho\omega)|^2 \leqslant C \qquad \text{pour} \quad \rho \leqslant a \quad \text{et} \quad j \leqslant m_o \quad \text{et} \quad k \geqslant m_o+1$$

$$(2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \sum_{k=m_o+1}^{m_1} |f_{jk}^{(\alpha+e_i)(\alpha_n+j-1)}(\xi,y)|^2\, d\xi\, dy \leqslant$$

$$\leqslant C(2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\rho}{a}) \left[\int_0^\infty e^{-2(\beta+\alpha\rho)y}\, dy\right] |\widehat{D^\alpha D_{x_i}\varphi_j}(\xi)|^2\, d\xi$$

$$(3.1.16) \qquad \leqslant C(2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\rho}{a})\,\xi_1^{2\alpha_1}\ldots\xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}}\,\xi_i^2\,|\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2\, d\xi \quad .$$

Finalement en réunissant (3.1.15) et (3.1.16) on a :

$$(3.1.17)\qquad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{|p|\leq r} \| D_{x_i} D^p D_y^{j-1} u_j^1 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\rho}{a})\, \rho^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \sum_{|p|\leq r} \rho^{2\alpha_n} \xi_1^{2\alpha_1} \ldots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$+ C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\rho}{a}) \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \sum_{|p|\leq r} \xi_1^{2\alpha_1} \ldots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 \, d\xi \quad .$$

Comme pour $\rho \leq a$ $\rho^2 \leq C_\rho$ et $\Sigma\, \xi_i^2 = \rho^2$, on tire de (3.1.17)

$$|D_y^{j-1} u_j^1|^2_{1,H^r(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho(1+\rho^2)^r |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 \, d\xi = C\, |\varphi_j|^{*2}_{1/2,H^r(\mathbb{R}^{n-1})} \; .$$

Pour $u_j^2(x,y)$ on utilisera le lemme suivant qui nous servira dans la suite.

<u>Lemme 1.1</u>.- Lorsque $\rho \geq a$ on a l'inégalité suivante pour β_o entier positif ou nul :

$$(3.1.18)\qquad \int_0^\infty \left| \int_{C_a} N_j(\rho,\omega,\zeta) \left(\pi(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})\right)^{-1} \zeta^{\beta o}\, e^{\rho\zeta y}\, d\zeta \right|^2 dy \leq \frac{C}{\rho} \quad .$$

<u>Preuve</u> : C'est une conséquence de l'inégalité (3.1.7) qui donne

$$|\qquad\qquad|^2 \leq C_1\, e^{-2\rho\alpha y}$$

et en intégrant par rapport à y les deux membres de cette inégalité on obtient (3.1.18).

Revenons au théorème, on a :

$$(3.1.19)\qquad D^p D_{x_i} D_y^{j-1} u_j^2 = \overline{\mathfrak{F}} \left[g_j^{\alpha_n+j-1}(\xi,y)\, \widehat{D^{\alpha+e_i} \varphi_j(\xi)} \right](x)$$

et donc la formule de Plancherel donne :

$$(3.1.20)\quad \| D^p D_{x_i} D_y^{j-1} u_j^2 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = (2\pi)^{-n+1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |g_j^{\alpha_n+j-1}(\xi,y)\, \widehat{D^{\alpha+e_i}\varphi_j}(\xi)|^2 \, d\xi dy$$

Or le lemme 1.1 donne l'inégalité :

$$(3.1.21) \qquad |g_j^{\alpha_n+j-1}(\xi,y)|^2 \leqslant C\,\rho^{2\alpha_n-1}\,(1-\chi(\tfrac{\rho}{a}))^2 .$$

Donc (3.1.20) donne :

$$\|D^p D_{x_i} D_y^{j-1} u_j^2\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\int (1-\chi(\tfrac{\rho}{a}))^2\,\rho^{2\alpha_n-1}\,\xi_1^{2\alpha_1}\ldots\xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}}\,\xi_i^2\,|\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\,d\xi$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{|p|\leqslant r}\|D_{x_i} D^p D_y^{j-1} u_j^2\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(1-\chi(\tfrac{\rho}{a}))^2\,\rho^{-1}\,\Sigma\,\xi_i^2\sum_{|p|\leqslant r}\rho^{2\alpha_n}\,\xi_1^{2\alpha_1}\ldots\xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}}\,|\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\,d\xi$$

$$\leqslant C\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\rho(1+\rho^2)^r\,|\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\,d\xi = C\,|\varphi_j|^{*2}_{1/2,H^r(\mathbb{R}^{n-1})} .$$

Ce qui achève la démonstration de la première affirmation du théorème c'est-à-dire le cas $j \leqslant m_o$.

Dans le cas où $j \geqslant m_o+1$, on fait la même démarche de calculs : ici les $A_{jk}(\rho\omega)$ ne sont discontinues à l'origine seulement pour $k \leqslant m_o$ et cette discontinuité est en ρ^{-m_o+1} . Celle-ci est donc supprimée par la dérivation $D_y^{m_o-1}$ et donc pas de problème pour les termes u_j^1 . Pour u_j^2 la dérivation $D_y^{m_o-1}$ introduit un terme en ρ^{m_o-1} et dans l'expression de u_j^2 apparaît le terme ρ^{j-1} , mais comme $j \geqslant m_o+1$ on aura $m_o-1-j+1 < 0$ et comme l'intégration se fait pour $\rho \geqslant a$ on aura $\rho^{m_o-j} \leqslant a^{m_o-j} = c^{te}$

et on est alors ramené au même type de majoration que précédemment. D'où le théorème.

<u>Remarque 1.1</u>.- De ces deux théorèmes et de leurs démonstrations, on voit qu'il y a deux difficultés majeures pour obtenir des fonctions ne serait-ce que dans $L^2(\mathbb{R}^n_+)$.

La première est, comme on l'a déjà vu plusieurs fois, les discontinuités des $A_{jk}(\rho\omega)$ pour $\rho = 0$, la deuxième vient du fait que l'on est amené à calculer une intégrale de la forme $\int_0^\infty e^{-\rho y}\, dy = \frac{1}{\rho}$ et donc ainsi d'augmenter la singularité en $\rho = 0$. On s'est affranchi de la première difficulté par des dérivations en y et dans le deuxième cas par une hypothèse de régularité sur les conditions frontières à l'origine. Nous allons voir maitenant comment on peut supprimer ces difficultés en ne faisant que des hypothèses de régularités sur les conditions frontières à l'origine en plus des conditions classiques à l'infini. On aura le théorème suivant :

Théorème 1.3.- Supposons que :

$$|\varphi_j|^*_{-j+1/2,H^{m_1+r}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty \qquad j \leqslant m_o \tag{3.1.22}$$

$$|\varphi_j|^*_{-m_o+1/2,H^{m_1+r-j+m_o}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty \qquad j \geqslant m_o+1 \quad . \tag{3.1.23}$$

On peut alors définir la fonction $u(x,y) = \sum_{j=1}^{m_1} u_j(x,y)$ où :

$$u_j(x,y) = \bar{\mathfrak{F}}_\xi\,[f_j^{oo}(\xi,y)](x) + \bar{\mathfrak{F}}_\xi\,[g_j^o(\xi,y)\,\hat{\varphi}_j(\xi)](x) \tag{3.1.24}$$

$u(x,y)$ ainsi définie est alors une solution du problème (3.0.2), (3.0.3) qui appartient à $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$.

Preuve : Il faut commencer par montrer que sous les hypothèses (3.1.22) et (3.1.23) $u_j(x,y) = u_j^1(x,y) + u_j^2(x,y)$ a un sens pour tout $j \leqslant m_1$. La transformation de Fourier étant un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, il nous suffit de montrer que :

$$\xi \to f_j^{oo}(\xi,y) \quad \text{est dans} \quad L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

$$\text{et} \qquad \xi \to g_j^o\,(\xi,y)\,\hat{\varphi}_j(\xi) \quad \text{est dans} \quad L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \quad .$$

Nous pouvons écrire :

$$f_j^{oo}(\xi,y) = \sum_{k=1}^{m_1} \chi(\tfrac{\rho}{a})\,\rho^{j-1}\,A_{jk}(\xi)\,G_k(\rho,\omega,y)\,\rho^{1/2}\,\rho^{-j+1/2}\,\hat{\varphi}_j(\xi) \qquad j \leqslant m_o \,.$$

Comme cette fonction est nulle pour $\rho \geqslant a$ on peut majorer $\rho^{1/2}$ par $a^{1/2}$. Le théorème (2.3.1) montre alors que $\rho^{j-1}\, A_{jk}(\xi)$ est continue sur $[0,a]$, donc est borné. D'où

$$(3.1.24) \qquad |f_j^{oo}(\xi,y)|^2 \leqslant C\, \chi^2(\tfrac{\rho}{a})\, \rho^{2(-j+1/2)} |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2 \qquad j \leqslant m_o .$$

Ce qui entraîne le premier résultat à cause de (3.1.22) pour $j \leqslant m_o$.

On fait de même lorsque $j \geqslant m_o+1$ en écrivant :

$$f_j^{oo}(\xi,y) = \sum_{k=1}^{m_1} \chi(\tfrac{\rho}{a})\, \rho^{m_o-1}\; A_{jk}(\xi)\, G_k(\rho,\omega,y)\, \rho^{1/2}\, \rho^{-m_o+1/2}\, \hat{\varphi}_j(\xi)$$

Ce qui donne précédemment entraîne :

$$(3.1.25) \qquad |f_j^{oo}(\xi,y)|^2 \leqslant C\, \chi^2(\tfrac{\rho}{a})\, \rho^{2(-m_o+1/2)} |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2 .$$

Pour la deuxième fonction, on a :

$$g_j^o(\xi,y) = (1-\chi(\tfrac{\rho}{a})) \int_{C_a} \frac{\rho^{-(j-1)}\; N_j(\rho,\omega,\zeta)\; e^{\rho\zeta y}}{\prod_{i=1}^{m_1} (\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})}\, d\zeta$$

Comme cette fonction est nulle pour $\rho \leqslant a$, on peut majorer $\rho^{-(j-1)}$ par $a^{-(j-1)}$ et comme on l'a vu pour (3.1.7) le reste de l'expression est borné. On a alors :

$$(3.1.26) \qquad |g_j^o(\xi,y)\, \hat{\varphi}_j(\xi)|^2 \leqslant C\, |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\, (1-\chi(\tfrac{\rho}{a}))^2 .$$

On a ainsi le résultat cherché, puisque par hypothèse $\hat{\varphi}_j(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Nous allons montrer maintenant que $u(x,y)$ appartient à $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$. On montrera successivement pour cela l'appartenance des $u^1_{jk}(x,y)$ et $u^2_j(x,y)$ à $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$. Il faut donc montrer que ces fonctions sont dans $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ et sont donc des distributions et que leurs dérivées aux sens des distributions $D^q(D^p_x\, u^1_{jk}(x,y))$

appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ pour des multi-indices $p = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1})$ avec $|p| \leq r$ et $q = (\beta_o,\beta_1,\dots,\beta_{n-1})$ avec $|q| \leq m_1$. La démonstration étant la même pour p et q égaux à zéro, on la fait directement pour p et q quelconques.

La dérivation de la transformée de Fourier et de son inverse permet d'écrire :

$$(3.1.27) \qquad D^q(D^p_x\, u^1_{jk}(x,y)) = \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\xi_1^{\alpha_1+\beta_1} \dots \xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}} \frac{\partial^{\beta_o}}{\partial y^{\beta_o}} f^{oo}_{jk}(\xi,y)\right](x)$$

$$= \overline{\mathcal{F}}_\xi [\, f^{\alpha+\beta,\beta_o}_{jk}(\xi,y)](x) \quad .$$

Donc d'après Plancherel, il suffit de montrer que $[f^{\alpha+\beta,\beta_o}_{jk}(\xi,y)](x)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ car, alors :

$$(3.1.28) \qquad \| D^q(D^p_x\, u^1_{jk}(x,y) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \overline{\mathcal{F}}_\xi\, [f^{\alpha+\beta,\beta_o}_{jk}(\xi,y)] \right|^2 (x)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} | f^{\alpha+\beta,\beta_o}_{jk}(\xi,y)|^2\, d\xi\, dy \quad .$$

On aura :

$$(3.1.29) \qquad f^{\alpha+\beta,\beta_o}_{jk}(\xi,y) = (-i)^{\alpha+\beta}\, \chi(\tfrac{\rho}{a})\, A_{jk}(\xi)\, D^{\beta_o}_y\, G_k(\rho,\omega,y)\, \widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j(\xi)} \quad .$$

Or pour $\rho \leq a$, le théorème 2.3.1 donne :

$$|A_{jk}(\rho\omega)| \leq C\, \rho^{-(j-1)} \qquad \text{pour } j,k \leq m_o$$

et le lemme 2.5.2 donne :

$$\left| \frac{\partial^{\beta_o}}{\partial y^{\beta_o}} G_k(\rho,\omega,y) \right| \leq C\, \rho^{\beta_o}\, e^{-\alpha\rho y} \qquad \text{pour } k \leq m_o \quad .$$

Donc dans le cas où $j,k \leq m_o$ on a

$$| f^{\alpha+\beta,\beta_o}_{jk}(\xi,y)| \leq C\, \chi(\tfrac{\rho}{a})\, \rho^{-(j-1)}\, \rho^{\beta_o}\, e^{-\alpha\rho y}\, |\widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j(\xi)}| \quad .$$

D'où :

$$(3.1.30)\qquad \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0 |f_{jk}^{\alpha+\beta,\beta_o}(\xi,y)|^2\,d\xi dy \leqslant$$

$$\leqslant C\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\rho}{a})\,\rho^{-2j+1}\,\rho^{2\beta_o}\,\xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)}\ldots\xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})}\,|\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\,d\xi$$

après intégration en y . Cette quantité est finie par hypothèse.

D'autre part lorsque $k \geqslant m_o+1$ le lemme 2.5.2 donne :

$$\left|\frac{\partial^{\beta_o}}{\partial y^{\beta_o}}\,G_k(\rho,\omega,y)\right|^2 \leqslant C\,e^{-2(\beta+\alpha\rho)y}\qquad \rho\leqslant a$$

et le théorème 2.3.1 donne si $j\leqslant m_o$ et $k\geqslant m_o+1$

$$|A_{jk}(\rho\omega)|^2 \leqslant C\,\rho^{-2(j-1)+2m_o}\quad \text{donc bornée pour } \rho\leqslant a\text{ , donc :}$$

$$(3.1.31)\qquad \|f_{jk}^{\alpha+\beta,\beta_o}(\xi,y)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\,\|\varphi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\quad .$$

Si $j\geqslant m_o+1$ et $k\leqslant m_o$ on a encore à cause du lemme 2.5.2

$$\left|\frac{\partial^{\beta_o}}{\partial y^{\beta_o}}\,G_k(\rho,\omega,y)\right|^2 \leqslant C\,\rho^{2\beta_o}\,e^{-2\alpha\rho y}\qquad \rho\leqslant a$$

et le théorème 2.3.1 donne :

$$|A_{jk}(\rho\omega)|^2 \leqslant C\,\rho^{-2(m_o-1)}\qquad \rho\leqslant a\quad .$$

D'où dans ce cas là :

$$(3.1.32)\qquad \|f_{jk}^{\alpha+\beta,\beta_o}(\xi,y)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\rho}{a})\,\rho^{2\beta_o-2(m_o-1)}\,\frac{1}{2\alpha\rho}\,\xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)}\ldots\xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})}\,|\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\,d\xi$$

$$\leqslant C\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\rho}{a})\,\rho^{-2m_o+1}\,|\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\,d\xi < \infty$$ par hypothèse et finalement

lorsque $j,k \geqslant m_o+1$

$$\left|\frac{\partial^{\beta_o}}{\partial y^{\beta_o}} G_k(\rho,\omega,y)\right|^2 \leqslant C\, e^{-2(\beta+\alpha\rho)y} \qquad \rho \leqslant a$$

et

$$|A_{jk}(\rho\omega)|^2 \leqslant C \qquad \rho \leqslant a$$

et comme plus haut on aura :

$$\text{(3.1.33)} \qquad \| f_{jk}^{\alpha+\beta,\beta_o}(\xi,y) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \|\varphi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \quad .$$

Cela termine la démonstration de $u^1_{jk}(x,y) \in T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ $\forall\, j,k \leqslant m_1$.

Il reste donc à montrer que $u^2_j(x,y) \in T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$.

Comme précédemment cela revient à montrer que :

$$g_j^{\beta_o}(\xi,y)\ \widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n_+) \quad .$$

Or on a en tenant compte du lemme 1.1 :

$$\text{(3.1.34)} \qquad \| g_j^{o}(\xi,y)\ \widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1-\chi(\tfrac{\rho}{a}))^2\, \rho^{2\beta_o-2j+1}\, |\widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi)|^2\, d\xi$$

$$\leqslant C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1-\chi(\tfrac{\rho}{a}))^2\, \rho^{2m_1+2r-2j+1} |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\, d\xi < \infty$$

à cause des hypothèses sur $\hat{\varphi}_j$ au voisinage de l'infini.

Il reste à montrer que $u(x,y)$ est solution du problème (3.0.2), (3.0.3) .

Lorsque $u_j(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre m_1 ayant calculer au sens des distributions

$$L(+\frac{1}{i} D_x, -D_y)\, u_j(x,y) = L(\frac{1}{i} D_x, -D_y)\, \bar{\mathcal{F}}_\xi(f_j^{oo}(\xi,y))(x) +$$

$$L(\frac{1}{i} D_x, -D_y)\, \bar{\mathcal{F}}_\xi[g_j^o(\xi,y)\, \hat{\varphi}_j(\xi)](x)$$

Or d'après (3.0.6) on aura :

$$L(\frac{1}{i} D_x, -D_y) u_j(x,y) = \bar{\mathcal{F}}_\xi(L(\xi, -D_y)\, f_j^{oo}(\xi,y))(x) + \bar{\mathcal{F}}_\xi(L(\xi, -D_y)\, g_j^o(\xi,y)\, \hat{\varphi}_j(\xi))\ (x) \quad . \tag{3.1.35}$$

Et comme $L(\xi, -D_y)\, G_k(\rho,\omega,y) = 0$ d'après le lemme 2.5.1 , on aura :

$$\bar{\mathcal{F}}_\xi(L(\xi, -D_y)\, f_j^{oo}(\xi,y))(x) = 0 \quad .$$

De même on a

$$L(\xi, -D_y)\, g_j^o(\xi,y) = (1 - \chi(\frac{\rho}{a})) \int_{C_a} \frac{\rho^{-(j-1)}\, N_j(\rho,\omega,\zeta)\, L(\xi, -\rho\zeta)\, e^{\rho\zeta y}}{\prod_{i=1}^{m_1} (\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})}\, d\zeta = 0$$

à cause du théorème des résidus et le fait que $L(\xi, \eta_i(\rho\omega)) = 0$ et si $\eta_i(\rho\omega)$ est de multiplicité γ , $(\frac{\partial^{\gamma-1}}{\partial\zeta^{\gamma-1}} L(\xi, -\rho\zeta))\ (\frac{-\eta_i(\rho\omega)}{\rho}) = 0$.

D'où $L(\frac{1}{i} D_x, -D_y)\, u_j(x,y) = 0 \qquad \forall\, j \leqslant m_1$.

Montrons que la fonction $y \to f_j^{oo}(\xi,y)$ est continue à valeur dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Pour cela évaluons :

$$\| f_{jk}^{oo}(\xi,y) - f_{jk}^{oo}(\xi,y_o) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\rho}{a})\, |A_{jk}(\rho\omega)|^2\, |G_k(\rho,\omega,y) - G_k(\rho,\omega,y_o)|^2\, |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\, d\xi \quad .$$

Or lorsque $k \leqslant m_o$

$$G_k(\rho,\omega,y) - G_k(\rho,\omega,y_o) = \int_C \frac{z^{k-1}\, (e^{\rho y z} - e^{\rho y_o z})}{\prod_{i=1}^{m_o} (z + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})}\, dz \quad .$$

Le théorème des accroissements finis donne :

$$e^{\rho yz} - e^{\rho y_o z} = (y-y_o)\ \rho z\ \ e^{\rho y_1 z} \quad \text{où} \quad y_1 \in]y_o, y_1[\quad .$$

D'autre part la courbe de Jourdan C étant bornée et $\dfrac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}$ étant bornée pour $\rho \leqslant a$ on aura :

$$\begin{aligned} |G_k(\rho,\omega,y) - G_k(\rho,\omega,y_o)| &\leqslant C\rho\ \ |y-y_o|\ \sup_{z \in C}\ e^{\rho y_1 z} \\ &\leqslant C\rho\ \ |y-y_o|\ e^{-\alpha\rho y_1} \quad . \end{aligned}$$

Mais comme G_k n'est défini et utilisé que pour $\rho \leqslant a$ et que $e^{-\alpha\rho y_1} \leqslant 1$ on a :

$$|G_k(\rho,\omega,y) - G_k(\rho,\omega,y_o)| \leqslant C'\ |y-y_o| \quad \text{où} \quad C' \ \text{est indépendante de} \ \rho$$

et ω .

D'où

$$\| f^{oo}_{jk}(\xi,y) - f^{oo}_{jk}(\xi,y_o)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\rho}{a})\ \rho^{-2(j-1)}\ \ |y-y_o|^2\ \ |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\ d\xi$$

lorsque $j < m_o$ (majoration de $A_{jk}(\rho\omega)$ du théorème 2.3.1) .

De même on a la majoration :

$$\chi^2(\tfrac{\rho}{a})\ \rho^{-2(j-1)} \leqslant C\ \rho^{-2(j-1/2)}\ (1+\rho^2)^{r+m_1} \quad .$$

Car la première expression est nulle pour $\rho \geqslant a$.

Finalement :

$$\| f^{oo}_{jk}(\xi,y) - f^{oo}_{jk}(\xi,y_o)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C\ \ |y-y_o|\,|\varphi_j|^*_{-j+1/2,H^{m_1+r}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

Ceci est démontré pour $j,k \leqslant m_o$, il en serait de même pour les autres $j,k \leqslant m_1$ et donc :

$y \to f_j^{oo}(\xi,y)$ est continue à valeur dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, donc

$y \to \overline{\mathfrak{F}}_\xi(f_j^{oo}(\xi,y))$ sera continue à valeur dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ et on a

$$\lim_{y\to 0} \overline{\mathfrak{F}}_\xi(f_j^{oo}(\xi,y)) = \overline{\mathfrak{F}}_\xi(\lim_{y\to 0} f_j^{oo}(\xi,y))$$

$$(3.1.36) \qquad = \overline{\mathfrak{F}}_\xi(\sum_{k=1}^{m_1} \chi(\tfrac{\rho}{a})\, A_{jk}(\xi)\, A^{k1}(\rho\omega,0)\, \hat{\varphi}_j(\xi))(x)$$

$$= \overline{\mathfrak{F}}_\xi(\chi(\tfrac{\rho}{a})\, \delta_{j1}\, \hat{\varphi}_j(\xi))(x)$$

De la même manière $y \to g_j^o(\xi,y)$ est continue. $(y \to e^{\rho\zeta y})$ et $y \to g_j^o(\xi,y)\, \hat{\varphi}_j(\xi)$ est continue à valeur dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ pour $y \geqslant 0$ donc il en sera de même pour

$$y \to \overline{\mathfrak{F}}(g_j^o(\xi,y)\, \hat{\varphi}_j(\xi))$$

et
$$\lim_{y\to 0} \overline{\mathfrak{F}}_\xi(g_j^o(\xi,y)\, \hat{\varphi}_j(\xi)) = \overline{\mathfrak{F}}_\xi(\lim_{y\to 0} g_j^o(\xi,y)\, \hat{\varphi}_j(\xi)) .$$

Or
$$\lim_{y\to 0} g_j^o(\xi,y) = (1-\chi(\tfrac{\rho}{a})) \int_{C_a} \frac{\rho^{-(j-1)}\, N_j(\rho,\omega,\zeta)}{\prod_{i=1}^{m_1} (\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})}\, d\zeta$$

$$= (1-\chi(\tfrac{\rho}{a}))\, \delta_{j1}$$

et donc

$$(3.1.37) \qquad \lim_{y\to 0} \overline{\mathfrak{F}}_\xi(g_j^o(\xi,y)\, \hat{\varphi}_j(\xi)) = \overline{\mathfrak{F}}_\xi((1-\chi(\tfrac{\rho}{a}))\, \hat{\varphi}_1(\xi))\, d\xi \qquad \text{si } j = 1$$

$$= 0 \qquad \text{si } j \neq 1$$

Et en réunissant (3.1.36) et (3.1.37) on a :

$$\lim_{y\to 0} u_j(x,y) = \delta_{j1}\, \varphi_j(x) .$$

Donc $\lim\limits_{y \to 0} u(x,y) = u(x,0) = \varphi_1(x)$.

D'autre part on a vu que $\dfrac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} u(x,y)$ appartenait à $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ pour $\ell \leqslant m_1$ et la continuité des applications $y \to \dfrac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} f_j^{oo}(\xi,y)$ de $\mathbb{R}^+$ à **valeur** dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ et celle de $y \to \dfrac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} g_j^o(\xi,y)\, \hat{\varphi}_j(\xi)$ entraîne la **continuité de** $y \to \dfrac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} \overline{\mathcal{F}}_\xi(f_j^{oo}(\xi,y))$ et de $y \to \dfrac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} \overline{\mathcal{F}}_\xi(g_j^o(\xi,y)\, \hat{\varphi}_j(\xi))$

et donc :

$$\begin{aligned}\lim_{y \to 0} \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} \overline{\mathcal{F}}_\xi(f_j^{oo}(\xi,y)) &= \overline{\mathcal{F}}_\xi\Big(\lim_{y \to 0} \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} f_j^{oo}(\xi,y)\Big) \\ &= \overline{\mathcal{F}}_\xi\Big(\sum_{k=1}^{m_1} \chi(\tfrac{\rho}{a})\Big)\ A_{jk}(\xi)\ A^{k\ell}(\xi,0)\ \hat{\varphi}_j(\xi) \ .\end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} \overline{\mathcal{F}}_\xi(f_j^{oo}(\xi,y)) = \overline{\mathcal{F}}_\xi(\chi(\tfrac{\rho}{a})\ \delta_{j\ell}\ \hat{\varphi}_j(\xi)) \ . \tag{3.1.38}$$

De même on montre :

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} \overline{\mathcal{F}}_\xi(g_j^o(\xi,y)\ \hat{\varphi}_j(\xi)) = \overline{\mathcal{F}}_\xi((1 - \chi(\tfrac{\rho}{a}))\ \delta_{j\ell}\ \hat{\varphi}_j(\xi)) \ . \tag{3.1.39}$$

Et (3.1.38), (3.1.39) entraîne :

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} u_j(x,y) = \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} u_j(x,0) = \delta_{j\ell}\ \hat{\varphi}_j(x) \ .$$

Finalement :

$$\frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} u(x,0) = \sum_{j=1}^{m_1} \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} u_j(x,0) = \hat{\varphi}_\ell(x) \ .$$

Ce qui achève le théorème.

3.2.- Cas particulier où $m_o = o$

Dans ce cas là le polynôme caractéristique s'écrit :

$$\mathbb{L}(\bar{\xi}) = L_1(\xi,\eta) + L_2(\xi,\eta) + C$$

où $L_1(\xi,\eta)$ est le polynôme homogène de degré $2m_1$, L_2 un polynôme dont le degré de chacun de ses termes est compris entre 1 et $2m_1-1$ et C est une constante.

L'hypothèse I de Paul Fife devient alors :

$$\exists\ E > 0 \quad \text{telle que} \quad \operatorname{Re}\ \mathbb{L}(\bar{\xi}) \geqslant E(|\bar{\xi}|^{2m_1} + 1) \quad \forall\ \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n\ .$$

On a alors le :

Lemme 2.1.- Sous l'hypothèse précédente l'opérateur associé à $\mathbb{L}$ est $H_o^{m_1}(\mathbb{R}^n_+)$-elliptique c'est-à-dire :

$$\forall\ u \in H_o^{m_1}(\mathbb{R}^n_+) \qquad \operatorname{Re}(\mathbb{L}u, u) \geqslant E'\ \|u\|_{H^{m_1}(\mathbb{R}^n_+)} \qquad E' > 0\ .$$

Preuve : Soit donc $u \in H_o^{m_1}(\mathbb{R}^n_+)$ et considérons $\tilde{u}$ le prolongement de u par O à $\mathbb{R}^n$ entier. Il est clair que $\tilde{u} \in H_o^{m_1}(\mathbb{R}^n)$ c'est-à-dire que les $D^p\,\tilde{u}$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour $|p| \leqslant m_1$. Chaque terme de $\mathbb{L}$ est de la forme :

$$a_\alpha\, \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \quad \text{où} \quad a_\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad |\alpha| \leqslant 2m_1\ .$$

Donc : $(L\tilde{u}, \tilde{u})$ est une combinaison linéaire de terme de la forme :

$$(-i)^{|\alpha|}\, a_\alpha(\tilde{u}\ ,\ \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2\ \dots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\ \tilde{u}) = (-i)^{|\alpha|}\, a_\alpha(D^p\,\tilde{u},\ D^q\,\tilde{u})$$

au signe près et où $|p| + |q| = |\alpha|$ et $|p|,|q| \leqslant m_1$.

Alors $D^p\,\tilde{u}$ et $D^q\,\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et on peut appliquer le théorème de Parseval, c'est-à-dire

$$(D^p \tilde{u}, D^q \tilde{u}) = (\widehat{D^p \tilde{u}}, \widehat{D^q \tilde{u}}) = \int_{\mathbb{R}^n} (-i)^{|\alpha|} \xi^{p+q} |\hat{\tilde{u}}(\xi)|^2 \, d\xi \quad .$$

D'où :

$$\mathrm{Re}(L\tilde{u}, \tilde{u}) = \mathrm{Re}(Lu, u) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}\, L(\xi) \, |\hat{\tilde{u}}|^2 \, d\xi$$

$$\geqslant E \int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^{2m_1} + 1) \, |\hat{\tilde{u}}|^2 \, d\xi$$

et comme $\dfrac{(1 + |\xi|^2)^{m_1}}{1 + |\xi|^{2m_1}} \leqslant C$, on a :

$$\mathrm{Re}(Lu, u) \geqslant \frac{E}{C} \, \|\tilde{u}\|^2_{H^{m_1}(\mathbb{R}^n_+)} = \frac{E}{C} \, \|u\|^2_{H^{m_1}(\mathbb{R}^n_+)} \quad .$$

Dans le cas particulier où $m_o = 0$ les hypothèses (3.1.22) et (3.1.23) se réduisent à :

$$\varphi_j(x) \in H^{m_1+r-j+1/2} \qquad \text{pour} \quad j = 1,\dots,m_1 \quad .$$

Et l'on voit (Lions et Magénès [1]) que $\mathbb{L}$ $H^{m_1}_o(\mathbb{R}^n_+)$-elliptique entraîne que l'application

$$u \to (Lu, \vec{\gamma}u) \quad \text{où} \quad \vec{\gamma}u = (u(x,0), \dots, \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial y^{m_1-1}} u(x,0))$$

est un isomorphisme de $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ sur $T^{-m,r}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=0}^{m_1-1} H^{m_1+r-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Cela signifie donc qu'étant données $\varphi_j(x) \in H^{m_1+r-j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 1,\dots,m_1$ il existe une unique solution du problème (3.0.2), (3.0.3) qui appartient à $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$.

<u>Théorème 2.1</u>.- Lorsque $m_o = 0$ et $\varphi_j(x) \in H^{m_1+r-j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, la solution de (3.0.3) donnée par $u(x,y) = \sum_{j=1}^{m_1} u_j(x,y)$ (où $u_j(x,y)$ données par (3.1.24))

appartient à $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et coïncide donc avec celle de Lions et Magénès [1].

<u>Preuve</u> : Cela est immédiat de la démonstration précédente du théorème 1.3 car $u^2_j(x,y) \in T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ n'utilisait que l'hypothèse sur $\varphi_j(x)$ à l'infini. De même on avait vu que pour $k \geqslant m_o+1$ les $u^1_{jk}(x,y)$ appartenaient à $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ avec la seule hypothèse que $\varphi_j(x) \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ au voisinage de l'origine.
Et donc pour tout $k \geqslant 1$ puisque ici $m_o = 0$. D'où le théorème.

3.3.- <u>Cas particulier où</u> $m_1 = m_o$

C'est le cas où le polynôme caractéristique est homogène de degré m_1 , donc le cas étudié par Agmon-Douglis-Niremberg [1] . Une solution est donnée au moyen de noyaux, qui ont le lien suivant avec ceux construits par P. Fife dans le cas où $\mu_j < n-1$, car alors on peut prendre $a = 0$ dans (2.2.19) . En effet l'intégrale définissant $K_{j1}(x,y)$ est alors convergente à l'origine. On a :

$$(3.3.1)\qquad K_j(x,y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{C_a} d\zeta \quad \rho^{-\mu_j} N_j(\rho,\omega,\zeta)\left(\pi\left(\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}\right)\right)^{-1} e^{\rho(ix.\omega+\zeta y)} d\zeta d\xi$$

Mais si l'on suppose $L(\xi,\eta)$ homogène de degré $m = m_1 = m_o$, alors :

$$(3.3.2)\qquad \eta_i(\rho\omega) = \rho\eta_i(\omega) \quad .$$

Car $L(\rho\omega, \eta_i(\rho\omega)) = 0$ et $L(\rho\omega, \rho\eta_i(\omega)) = \rho^m L(\omega, \eta_i(\omega)) = 0$.

D'autre part nous avons supposé

$$B_j(\xi,\tau) = (-\tau)^{j-1}$$

donc homogène de degré $\mu_j = j-1$, on obtient d'après (2.2.15)

$$(3.3.3)\qquad N_k(\xi,\tau) = L^+_{m-k}(\xi,\tau) \quad .$$

Ce polynôme est homogène de degré $m-k$ (Agmon-Douglis-Niremberg [1]) et donc (2.2.17) entraîne :

$$N_j(\rho,\omega,\zeta) = \rho^{-m+\mu_j+1} \frac{N_j(\rho\omega,\rho\zeta)}{2\pi i} = \frac{N_j(\omega,\zeta)}{2\pi i} .$$

D'où après passage en coordonnées polaires (3.3.1) devient

$$(3.3.4) \qquad K_j(x,y) = \frac{(2\pi)^{-n+1}}{2\pi i} \int_{C_a} d\zeta \int_{|\xi|=1} d\omega\xi \int_0^\infty \rho^{-n-2-\mu_j} \frac{N_j(\omega,\zeta)}{(\zeta+\eta_i(\omega))} e^{\rho(ix.\omega+\zeta y)} d\rho$$

Sur cette expression on voit bien que l'intégrale est convergence si et seulement si $\mu_j < n-1$. Alors par intégration par partie en ρ et après permutation des intégrations, on obtient :

$$(3.3.5) \qquad K_j(x,y) = (2\pi)^{-n+1}(n-2-\mu_j)!(-1)^{n-1-\mu_j} \int_{|\xi|=1} d\omega\xi$$

$$\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{N_j(\omega,\zeta)}{L^+(\xi,\zeta)(ix.\omega+\zeta y)^{n-1-\mu_j}} \right] d\zeta$$

On retrouve ainsi exactement le noyau de Poisson donné par Douglis-Niremberg [1] lorsque $\mu_j < n-1$ pour des opérateurs frontières de Dirichlet.

Nous verrons dans le chapitre suivant que le cas $m_1 = m_o$ correspond à un problème limite. Et nous montrerons que dans certains sens une solution de ce problème sera limite d'une suite de solutions de problèmes non homogènes, ces solutions étant celles données dans le début de ce chapitre. Pour cela il nous faudra une autre solution que celle donnée par Agmon-Douglis-Niremberg. Ce sera l'objet de ce paragraphe.

Soit donc le problème :

$$(3.3.6) \qquad \begin{cases} L_o(\frac{1}{i} D_x, -D_y)\, u(x,y) = 0 & y > 0 \\ \frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} u(x,0) = \varphi_j(x) & j = 1,\dots,m_o \end{cases}$$

où $L_o(\xi,\eta)$ est un polynôme homogène de degré $2m_o$.

Soient $\alpha_i(\omega)$ $(i = 1,\ldots,m_o)$ les m_o racines de $L_o(\omega,\alpha) = 0$ avec partie réelle positive. (On suppose toujours être dans les hypothèses du chapitre II). L'homogénéité de L_o entraîne que les racines de $L_o(\rho\omega, \eta)$ sont données par :

$$\eta_i(\rho\omega) = \rho\,\alpha_i(\omega) \qquad i = 1,\ldots,m_o \quad .$$

On définit alors comme dans le cas général :

$$(3.3.7) \qquad G'_k(\rho,\omega,y) = e^{-\rho\alpha_i(\omega)y} \quad \text{si les racines} \quad {}_i(\omega) \quad \text{sont simples}$$

sinon

$$(3.3.8) \qquad G'_k(\rho,\omega,y) = \int_C \frac{z^{k-1}\ e^{\rho yz}}{\prod\limits_{1}^{m_o} (z + \alpha_i(\omega))} \, dz \quad .$$

Ici la différence avec le cas général est que les $G_k(\sigma,\omega,y)$ sont analytiques sans restriction du domaine et on a donc pas besoin d'introduire a , c'est-à-dire de considérer un noyau au voisinage de 0 et un noyau au voisinage de l'infini.

On considère alors :

$$(3.3.9) \qquad A^{k\ell}(\rho\omega,y) = \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} G'_k(\rho,\omega,y) = \int_C \frac{\rho^{\ell-1}\ z^{k+\ell-2}\ e^{\rho yz}}{\prod\limits_{i=1}^{m_o} (z + \alpha_i(\omega))} \, dz$$

et donc :

$$(3.3.10) \qquad A^{k\ell}(\rho\omega,0) = \rho^{\ell-1}\ \alpha_{k\ell}(\omega)$$

où les $\alpha_{k\ell}(\omega) = \int_C \frac{z^{k+\ell-2}\,dz}{\prod\limits_{i=1}^{m_o} (z + \alpha_i(\omega))}$ sont ceux données dans (2.3.5) .

Comme les polynômes $(-\tau)^{\ell-1}$ sont manifestement linéairement indépendants

$(\ell = 1 \ldots m_o)$, la matrice $A^{k\ell}(\rho\omega,0)$ est inversible et tenant compte de (2.3.16) on a la matrice :

$$(3.3.11) \qquad \left[A^{k\ell}(\rho\omega,0)\right]^{-1} = \left[A_{jk}(\rho\omega)\right] = \left[\rho^{-j+1}\ \beta_{jk}(\omega)\right]$$

On considère alors les noyaux de Poisson :

$$(3.3.12) \qquad K_j(x,y) = (2\pi)^{-n+1}\int_{|z|=b} \frac{dz}{2\pi i z} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi(\tfrac{\rho}{b})\ (\tfrac{\rho+z}{\rho})^{n-2} \sum_{k=1}^{m_o} (\rho+z)^{-j+1}\ \beta_{jk}(\omega)\ G_k'(\rho+z,\omega,y)e^{ix(\xi+z\omega)}\ d\xi$$

$$+ (2\pi)^{-n+1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1-\chi(\tfrac{\rho}{b})) \sum_{k=0}^{m_o} \rho^{-j+1}\ \beta_{jk}(\omega)\ G_k'(\rho,\omega,y)\ e^{ix.\xi}\ d\xi \quad .$$

Ici b peut être quelconque et la fonction χ est celle introduite en (2.2.4). Comme dans le cas général l'intégration sur le contour $|z| = b$ est introduit pour éviter la singularité en $\rho = 0$.

Théorème 3.1.- Soit $\varphi_j(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, la fonction $u(x,y) = \sum_{j=1}^{m_o} K_j * \varphi_j$ est solution du problème 3.3.6.

Preuve : Dans chacun des $K_j(x,y)$ définis ci-dessus on peut prendre b suffisamment grand pour que le support de $\varphi_j(x)$ soit à l'intérieur de la boule de rayon b . Donc on a :

$$(3.3.13) \qquad u_j(x,y) = (2\pi)^{-n+1}\int_{|z|=b} \frac{dz}{2\pi i z} \iint_{\mathbb{R}^{n-1}} (\tfrac{\rho+z}{\rho})^{n-2} \sum_{k=1}^{m_o} (\rho+z)^{-j+1}\ \beta_{jk}(\omega)\ G_k'(\rho+z,\omega,y)\ e^{i(x-\tau)(\xi+z\omega)}\ \varphi_j(\tau)\ d\xi\ d\tau \quad .$$

La dérivabilité et la linéarité du produit de convolution donne :

$$L_o\, u(x,y) = \sum_{j=1}^{m_o} L_o\, K_j(x,y) * \varphi_j(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{m_o} \int_{|z|=b} \frac{dz}{2\pi i z} \iint \left(\frac{\rho+z}{\rho}\right)^{n-2} \sum_{k=1}^{m_o} (\rho+z)^{-j+1}\, \beta_{jk}(\omega)$$

$$L((\rho+z)\omega,\ -D_y)\ G'_k\ e^{i(x-\tau)(\xi+z\omega)}\ \varphi_j(\tau)\ d\xi\ d\tau \quad .$$

Or d'après (3.3.8)

$$L_o((\rho+z)\omega,\ -D_y)\ G'_k(\rho+z,\omega,y) = \int_C \frac{\zeta^{k-1}\ L_o((\rho+z)\omega,\ -(\rho+z)\zeta)\ e^{(\rho+z)y\zeta}}{\prod_{1}^{m_o} (z + \alpha_i(\omega))}\ d\zeta$$

$$= (\rho+z)^{m_o} \int_C \frac{\zeta^{k-1}\ L_o(\omega,\ -\zeta)\ e^{(\rho+z)y\zeta}}{\prod_{i=1}^{m_o} (z + \alpha_i(\omega))}\ d\zeta \quad .$$

D'après le théorème des résidus il est clair que cette quantité est nulle puisque $L_o(\omega,\ \alpha_i(\omega)) = 0$ et si $\alpha_i(\omega)$ est racine de multiplicité p alors $\alpha_i(\omega)$ est racine des dérivées du polynôme $L_o(\omega,\ -\zeta)$ jusqu'à l'ordre $p-1$.

D'où $\quad L_o\, u(x,y) = 0 \qquad \forall\ y > 0$.

D'autre par on aura en tenant compte de (3.3.9)

$$\text{(3.3.14)} \qquad \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}}\, u_j(x,y) = \sum_{k=1}^{m_o} (2\pi)^{-n+1} \int_{|z|=b} \frac{dz}{2\pi i z} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi\ \left(\frac{\rho+z}{\rho}\right)^{n-2} (\rho+z)^{-j+1}$$

$$\beta_{jk}(\omega)\ A^{k\ell}((\rho+z)\omega, y) \int e^{i(x-\tau)(\xi+z\omega)}\ \varphi_j(\tau)\ d\tau \quad .$$

Comme $y \to 0$ entraîne $A^{k\ell}((\rho+z)\omega,y) = (\rho+z)^{\ell-1}\ \alpha_{k\ell}(\omega)$

$$\text{(3.3.15)} \qquad \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}}\, u_j(x,0) = \sum_{k=1}^{m_o} (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \int_{|z|=b} \frac{dz}{2\pi i z} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\frac{\rho+z}{\rho}\right)^{n-2} (\rho+z)^{-j+\ell}$$

$$\beta_{jk}(\omega)\ \alpha_{k\ell}(\omega)\ e^{ix(\xi+z\omega)}\ \widehat{\varphi}_j(\xi)\ d\xi \quad .$$

Or $\sum_{k=1}^{m_o} \beta_{jk}(\omega)\, \alpha_{k\ell}(\omega) = \delta_{j\ell}$, donc

$$\frac{\partial^{\ell-1}}{\partial y^{\ell-1}} u_j(x,0) = 0 \qquad \text{si} \quad j \neq \ell$$

ou si $j = \ell$

$$\frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} u_j(x,0) = (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \int_{|z|=b} \frac{dz}{2\pi i z} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\frac{\rho+z}{\rho}\right)^{n-2} \hat{\varphi}_j(\rho+z)\, e^{ix(\rho+z\omega)}\, d\xi$$

D'où après intégration sur le contour $|z| = b$ et la transformation de Fourier inverse :

$$\frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} u(x,0) = \sum_{k=1}^{m_o} \frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} u_k(x,0) = \varphi_j(x) \quad .$$

Ce qui achève le théorème.

Théorème 3.2.- Supposons que :

(3.3.16) $$|\varphi_j|^*_{-j+1/2, H^{m_o+r}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty \qquad j \leqslant m_o \quad .$$

On peut alors définir $u(x,y) = \sum_{j=1}^{m_o} u_j(x,y)$ où :

(3.3.17) $$u_j(x,y) = \sum_{k=1}^{m_o} \overline{\mathcal{F}}_\xi[\rho^{-j+1}\, \beta_{jk}(\omega)\, G'_k(\rho,\omega,y)\, \hat{\varphi}_j(\xi)]\,(x) \qquad j \leqslant m_o$$

$$= \sum_{k=1}^{m_o} u_{jk}(x,y) \quad .$$

$u(x,y)$ ainsi définie est alors une solution du problème (3.3.6) qui appartient à $T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)$.

Preuve : C'est l'analogue du théorème 1.3 en plus simple.

Corollaire 3.2.- Si l'on suppose de plus que $\varphi_j(x) \in H^{m_o+r+k-j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, alors la solution $u(x,y)$ appartient à $T^{m_o+k,r}(\mathbb{R}^n_+)$.

CHAPITRE IV

Le problème perturbé

4.1.- Position du problème et premier résultat de convergence.

On se donne un réel positif ε destiné à tendre vers zéro et on considère le problème :

$$(4.1.1)\quad \begin{cases} \mathbb{L}(\frac{\varepsilon}{i} D_{\bar{x}})\, u_\varepsilon(x,y) = 0 & y > 0 \\ \frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}}\, u_\varepsilon(x,0) = \varphi_j(x) & j = 1,\dots,m_1 \qquad \varphi_j(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}) \end{cases} .$$

On prend alors la solution de ce problème donnée par P. Fife [1] à savoir :

$$(4.1.2)\qquad u_\varepsilon(x,y) = \sum_{j=1}^{m_1} u_{j\varepsilon}(x,y) \quad \text{où}$$

$$(4.1.3)\qquad u_{j\varepsilon}(x,y) = \frac{1}{\varepsilon^{-j+n}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_j\left[\frac{(x-\xi)}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right] \varphi_j(\xi)\, d\xi \quad .$$

Le problème limite de (4.1.1) c'est-à-dire lorsque l'on fait formellement $\varepsilon = 0$ est donné par :

$$(4.1.4)\quad \begin{cases} L_o(\frac{1}{i} D_{\bar{x}})\, u(x,y) = 0 & y > 0 \\ \frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}}\, u(x,0) = \varphi_j(x) & j = 1,\dots,m_o \end{cases} .$$

C'est donc le problème homogène (3.3.6) étudié dans le chapitre précédent.

Théorème 1.1.- Avec les notations ci-dessus, lorsque $y > 0$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_{j\varepsilon}(x,y) = u_j(x,y)$$

où $u(x,y) = \sum_{j=1}^{m_o} u_j(x,y)$ est donnée par le théorème 3.3.1.

Preuve : C'est une conséquence des théorèmes (7.1), (7.3) et (7.4) de P. Fife [1]

Ici on a seulement une convergence ponctuelle pour tout (x,y) avec $y > 0$ c'est-à-dire une limite intérieure au domaine $\mathbb{R}^n_+$. Le paragraphe suivant donnera une convergence plus globale.

4.2.- Théorème de convergence dans les $T^{k,r}(\mathbb{R}^n_+)$.

On notera :

$$f^{\alpha\beta}_{jk\varepsilon}(\xi,y) = \chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) A_{jk}(\varepsilon\rho\omega)\, D^\beta_y\left[G_k\left(\varepsilon\rho,\omega,\frac{y}{\varepsilon}\right)\right] \widehat{D^\alpha\varphi_j}(\xi) \tag{4.2.1}$$

$$f^{\alpha\beta}_{j\varepsilon}(\xi,y) = \sum_{k=1}^{m_1} f^{\alpha\beta}_{jk\varepsilon}(\xi,y) \tag{4.2.2}$$

$$g^{\beta}_{j\varepsilon}(\xi,y) = \left(1-\chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right)\right)\int_{C_a} \frac{\rho^{-j+1}\, N_j(\varepsilon\rho,\omega,\zeta)\, e^{\rho\zeta y}(\rho\zeta)^\beta}{\prod_{i=1}^{m_1}\left(\zeta+\frac{\eta_i(\varepsilon\rho\omega)}{\varepsilon\rho}\right)}\, d\zeta \tag{4.2.3}$$

On a alors le théorème :

Théorème 2.1.- Reprenons les hypothèses du théorème 3.1.3

$$|\varphi_j|^*_{-j+1/2,H^{m_1+r}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty \qquad j \leqslant m_o \tag{4.2.4}$$

$$|\varphi_j|^*_{-m_o+1/2,H^{m_1+r-j+m_o}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty \qquad j \geqslant m_o+1 \;. \tag{4.2.5}$$

On peut alors définir la fonction $u_\varepsilon(x,y) = \sum_{j=1}^{m_1} u_{j\varepsilon}(x,y)$ où :

$$u_{j\varepsilon}(x,y) = \varepsilon^{j-1}\, \overline{\mathfrak{F}}_\xi\left[f^{oo}_{j\varepsilon}(\xi,y)\right](x) + \overline{\mathfrak{F}}_\xi\left[g^{o}_{j\varepsilon}(\xi,y)\,\hat{\varphi}_j(\xi)\right](x) \tag{4.2.6}$$

et $u_{j\varepsilon}(x,y)$ appartient à $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$, est solution du problème perturbé (4.1.1) et converge dans $T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)$ vers $u(x,y)$ la solution de (4.1.4) donnée par (3.3.7)

De plus on a les inégalités :

$$(4.2.7) \qquad \| u_\varepsilon(x,y) - u(x,y) \|_{T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\, \varepsilon^{1/2}$$

$$(4.2.8) \qquad \| \varepsilon^{m_1}\, u_\varepsilon(x,y) \|_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \quad .$$

<u>Preuve</u> : Le fait que $u_\varepsilon(x,y)$ soit dans $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ n'est rien d'autre que le théorème 3.1.3. De même dans ce cas, pour montrer que $u_\varepsilon(x,y)$ est solution de (4.1.1) , il suffit de reprendre la vérification faite dans le théorème 3.1.3 en introduisant ε . Il reste donc à montrer la dernière partie, c'est-à-dire la convergence de $u_\varepsilon(x,y)$ vers $u(x,y)$ dans $T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)$. Pour cela on commencera par décomposer $u_{j\varepsilon}(x,y) = u^1_{j\varepsilon} + u^2_{j\varepsilon}$ comme le montre (4.2.6) ; ensuite on pose $u^1_{j\varepsilon} = \sum_{k=1}^{m_1} u^1_{jk\varepsilon}$ où :

$$(4.2.9) \qquad u^1_{jk\varepsilon} = \varepsilon^{j-1}\, \mathfrak{F}_\xi[f^{oo}_{jk\varepsilon}(\xi,y)]\,(x) \quad .$$

On traitera alors successivement $u^2_{j\varepsilon}$, $u^1_{jk\varepsilon}$ pour $j \leqslant m_o$ et $k \geqslant m_o+1$, $u^1_{jk\varepsilon}$ pour $j \geqslant m_o+1$ et $k \geqslant m_o+1$, $u^1_{jk\varepsilon}$ pour $j \geqslant m_o+1$ et $k \leqslant m_o$ et finalement $u^1_{jk\varepsilon}$ pour $j \leqslant m_o$ et $k \leqslant m_o$.

<u>Lemme 2.1</u>.- $u^2_{j\varepsilon}$ converge vers zéro dans $T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et on a les inégalités :

$$(4.2.10) \qquad \| u^2_{j\varepsilon}(x,y) \|^2_{T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C'\, \varepsilon \qquad j = 1,\dots,m_1$$

et

$$(4.2.10)' \qquad \| u^2_{j\varepsilon}(x,y) \|^2_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C$$

<u>Preuve</u> : Considérons les multi-indices $q = (\beta_o,\beta_1,\dots,\beta_{n-1}) = (\beta_o, \beta)$ et $p = (\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$. La formule de Plancherel permet alors d'écrire :

$$(4.2.11)\qquad \| D^q(D^p_x\, u^2_{j\varepsilon}(x,y))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |g^{\beta_o}_{j\varepsilon}(\xi,y)\ \widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi)|^2\ d\xi\ dy\ .$$

Le lemme (3.1.1) reste encore vrai après introduction de ε , et donne donc une majoration en $\frac{1}{\rho}$, donc :

$$(4.2.12)\qquad \int_0^\infty |g^{\beta_o}_{j\varepsilon}(\xi,y)|^2\ dy \leqslant C\ (1-\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}))^2\ \rho^{-2j+2+2\beta_o-1} \qquad \text{lorsque} \quad \varepsilon\rho \geqslant a$$

et donc de (4.2.11) on tire :

$$(4.2.13)\qquad \| u^2_{j\varepsilon}(x,y)\|^2_{T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$\leqslant C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1-\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}))^2\ \rho^{-2j+1} \sum_{\substack{|p|\leqslant r\\ |q|\leqslant m_o}} \rho^{2\beta_o}\ \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \cdots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})}\ |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2\ d\xi$$

$$\leqslant C\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1-\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}))^2 (\varepsilon\rho)^{-1}\ \rho^{-2j+2} \sum_{\substack{|p|\leqslant r\\ |q|\leqslant m_o}} \rho^{2\beta_o}\ \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \cdots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})}\ |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2\ d\xi\ .$$

Or $(1-\chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}))^2\ (\varepsilon\rho)^{-1} \leqslant (\frac{a}{2})^{-1}$ puisque nulle pour $\varepsilon\rho \leqslant \frac{a}{2}$.

D'autre part $\rho^{-2j+2} \sum_{|p|\leqslant r} \rho^{2\beta_o}\ \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \cdots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} \leqslant$

$$\leqslant \rho^{-2j+2} \sum_{\substack{|p|\leqslant r\\ |q|\leqslant m_o}} \rho^{2|p|+2|q|}$$

au voisinage de l'infini.

Mais $|p| \leqslant r$, $|q| \leqslant m_o$ et $m_1 \geqslant m_o+1$ entraîne que $2|p|+2|q|+2-2j \leqslant 2m_1+2r-2j+1$, d'où :

$$\| u^2_{j\varepsilon}(x,y)\|^2_{T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\ \varepsilon\ .$$

Ce qui donne la première inégalité cherchée. La deuxième vient de la première inégalité (4.2.13) où l'on prend la somme pour $|q| \leqslant m_1$ au lieu de m_o . On a alors exactement la majoration correspondant à l'hypothèse à l'infini sur les $\varphi_j(x)$ et on ne peut pas alors introduire de ε comme précédemment.

Lemme 2.2.- Lorsque $j \leqslant m_o$ et $k \geqslant m_o+1$ $u^1_{jk\varepsilon}(x,y)$ converge vers zéro dans $T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)$. Ces termes seront appelés termes frontières. Et on a l'inégalité

$$(4.2.14) \qquad \| u^1_{jk\varepsilon}(x,y) \|^2_{T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C'\varepsilon \quad .$$

Preuve : Comme précédemment on a :

$$(4.2.15) \qquad \| D^q(D^p u^1_{jk\varepsilon}(x,y) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = \varepsilon^{2j-2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} | f^{\alpha+\beta,\beta_o}_{jk\varepsilon}(\xi,y) |^2 \, d\xi \, dy \quad .$$

Or pour $\varepsilon\rho \leqslant a$ le théorème 2.3.1 donne pour $j \leqslant m_o$ et $k \geqslant m_o+1$

$$(4.2.16) \qquad |A_{jk}(\varepsilon\rho\omega)| \leqslant C(\varepsilon\rho)^{m_o-j+1}$$

et le lemme (2.5.2) donne après introduction de ε :

$$(4.2.17) \qquad \left| \frac{\partial^{\beta_o}}{\partial y^{\beta_o}} G_k(\varepsilon\rho,\omega,\tfrac{y}{\varepsilon}) \right|^2 \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{2\beta_o}} e^{-2(\beta+\alpha\varepsilon\rho)\frac{y}{\varepsilon}} \quad \text{pour } \varepsilon\rho \leqslant a \text{ et } k \geqslant m_o+1 \; .$$

Donc (4.2.16) et (4.2.17) entraînent dans (4.2.15) :

$$(4.2.18) \qquad \| D^q(D^p u^1_{jk\varepsilon}(x,y) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C \varepsilon^{2j-2-2\beta_o} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}) (\varepsilon\rho)^{2(m_o-j+1)} \int_0^\infty e^{-2(\beta+\alpha\varepsilon\rho)\frac{y}{\varepsilon}} dy \; |\widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\leqslant C \varepsilon^{2m_o-2\beta_o+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}) \rho^{2m_o-2j+2} \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \cdots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2 \, d\xi$$

Et en tenant compte que $\xi_i = \rho\omega_i$ avec $\omega_i^2 \leqslant 1$, on aura :

$$(4.2.19) \qquad \| D^q(D^p u^1_{jk\varepsilon}(x,y) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C \varepsilon^{2m_o-2\beta_o+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}) \rho^{-2j+1} \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2\beta_o+2m_o+1}}{(1+\rho^2)^{m_1+r}} \cdot$$

$$\cdot (1+\rho^2)^{m_1+r} |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2 \, d\xi \quad .$$

Or nous considérons ici $|q| \leq m_o$ donc $2m_o - 2\beta_o \geq 0$ et

$$(\varepsilon\rho)^{2m_o-2\beta_o} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) \leq a^{2m_o-2\beta_o} .$$

Car $\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) = 0$ si $\varepsilon\rho \geq a$ et $\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) \leq 1$ si $\varepsilon\rho \leq a$.

D'autre part

$$\frac{\rho^{2|p|+2|q|+1}}{(1+\rho^2)^{m_1+r}} \text{ est borné pour } \rho \in [0, +\infty] .$$

Car elle est continue valant zéro à l'origine et est équivalente à l'infini à :

$$\rho^{2|p|+2|q|+1-2m_1-2r}$$

et comme $2|p| - 2r \leq 0$ et $|q| \leq m_o$, $m_1 \geq m_o+1$ entraîne que $2|q| + 1 - 2m_1 \leq 2m_o - 2m_1 + 1 < 0$, donc converge vers zéro à l'infini.

D'où :

$$\|u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|^2_{T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\,\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^{-2j+1} (1+\rho^2)^{m_1+r} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 \, d\xi .$$

Or par hypothèse cette intégrale est finie donc :

$$\|u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|^2_{T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C'\,\varepsilon \qquad j \leq m_o \text{ et } k \geq m_o+1 .$$

<u>Lemme 2.3</u>.- Lorsque $j \geq m_o + 1$ et $k \geq m_o + 1$ $u^1_{jk\varepsilon}(x,y)$ converge vers zéro dans $T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et on a l'inégalité :

$$\|u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|^2_{T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C'\,\varepsilon . \tag{4.2.20}$$

<u>Preuve</u> : On a encore (4.2.15) et (4.2.17) , mais le théorème 2.3.1 donne dans le cas où $j \geq m_o + 1$ et $k \geq m_o + 1$

$$(4.2.21) \qquad |A_{jk}(\varepsilon\rho\omega)| \leqslant C \quad \text{pour} \quad \varepsilon\rho \leqslant a \ .$$

Donc comme précédemment on aura

$$(4.2.22) \qquad \| D^q(D_x^p u^1_{jk\varepsilon}(x,y) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon \times \varepsilon^{2j-2-2\beta_o} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\ \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \ldots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\, d\xi \ .$$

Décomposons cette dernière intégrale en introduisant $1 = (1 - \chi(\frac{\rho}{a})) + \chi(\frac{\rho}{a})$

$$(4.2.23) \qquad \| D^q(D_x^p u^1_{jk\varepsilon}(x,y) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C\,\varepsilon \times \varepsilon^{2j-2-2\beta_o} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi(\frac{\rho}{a})\, \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\ \rho^{2|p|+2|q|-2\beta_o}\, |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\ d\xi$$

$$+ \ C\,\varepsilon \times \varepsilon^{2j-2-2\beta_o} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\frac{\rho}{a}))\ \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\ \rho^{2|p|+2|q|-2\beta_o}\, |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\ d\xi$$

Or pour $\rho < a$ on a $\chi(\frac{\rho}{a})\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\ \rho^{2|p|+2|q|-2\beta_o} \leqslant a^{2|p|+2|q|-2\beta_o}$

et comme $j \geqslant m_o + 1$ on a $2j-2-2\beta_o \geqslant 0$ donc $\varepsilon^{2j-2-2\beta_o} \leqslant 1$ $\quad(\varepsilon \leqslant 1)$

$\hat{\varphi}_j(\varepsilon)$ appartenant à $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ le premier terme de (4.2.23) sera majoré par $C\varepsilon$.

Pour le deuxième terme on peut l'écrire comme suit :

$$(4.2.24) \qquad C\,\varepsilon \int (1 - \chi(\frac{\rho}{a}))\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon\rho)^{2j-2-2\beta_o}\ \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2j+2}}{(1+\rho^2)^{\frac{2m_1+2r-2j+1}{2}}}\ (1+\rho^2)^{\frac{2m_1+2r-2j+1}{2}}\ |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\ d\xi \ .$$

Comme $2j-2-2\beta_o \geqslant 0$ et $\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) = 0$ si $\varepsilon\rho \geqslant a$ on a :

$$\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\ (\varepsilon\rho)^{2j-2-2\beta_o} \leqslant a^{2j-2-2\beta_o}$$

et

$$(1 - \chi(\frac{\rho}{a}))\ \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2j+2}}{(1+\rho^2)^{\frac{2m_1+2r-2j+1}{2}}} \leqslant C \quad \text{pour} \quad |q| \leqslant m_o \quad \text{et} \quad |p| \leqslant r \ .$$

Donc le deuxième terme est lui aussi majoré par $C\varepsilon$, d'où :

$$\|u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|_{T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C'\varepsilon \qquad j \geq m_o+1 \quad \text{et} \quad k \geq m_o+1 \quad .$$

Lemme 2.4.- Lorsque $j \geq m_o+1$ et $k \leq m_o$ $u^1_{jk\varepsilon}(x,y)$ converge vers zéro dans $T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et on a l'inégalité :

$$\|u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|_{T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C'\varepsilon \quad . \tag{4.2.25}$$

Preuve : On part toujours de l'égalité (4.2.15), mais ici le théorème 2.3.1 donne

$$|A_{jk}(\varepsilon\rho\omega)| \leq C(\varepsilon\rho)^{-m_o+1} \qquad \text{pour} \quad \varepsilon\rho \leq a \tag{4.2.26}$$

et le lemme (2.5.2) , après modification en introduisant ε , donne :

$$\left| \frac{\partial^{\beta_o}}{\partial y^{\beta_o}} G_k(\varepsilon\rho,\omega,\frac{y}{\varepsilon})\right|^2 \leq C\,\rho^{2\beta_o}\, e^{-2\alpha\rho y} \qquad \text{pour} \quad \varepsilon\rho \leq a \quad . \tag{4.2.27}$$

Donc :

$$\|D^q(D^p\, u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \tag{4.2.28}$$

$$\leq C\,\varepsilon^{2j-2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon\rho)^{-2(m_o-1)}\,\rho^{2\beta_o}\left(\int_0^\infty e^{-2\alpha\rho y}\,dy\right) |\widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi)|^2\, d\xi$$

$$\leq C\,\varepsilon^{2j-2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon\rho)^{-2(m_o-1)}\,\rho^{2\beta_o-1}\,\xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)}\cdots\xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})}\,|\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2\, d\xi \quad .$$

Comme dans la démonstration du lemme précédent on décompose cette dernière intégrale :

$$(4.2.29) \qquad \| D^q (D^p u^1_{jk\varepsilon}(x,y) \|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C\, \varepsilon^{2j-2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi(\tfrac{\rho}{a})\, \chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}) (\varepsilon\rho)^{-2(m_o-1)}\, \rho^{2|p|+2|q|-1}\, |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\, d\xi$$

$$+ C\, \varepsilon^{2j-2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}) (1 - \chi(\tfrac{\rho}{a}) (\varepsilon\rho)^{-2(m_o-1)}\, \rho^{2j-3}$$

$$\frac{\rho^{2|p|+2|q|-2j+2}}{(1+\rho^2)^{m_1+r-j+1/2}}\, (1+\rho^2)^{m_1+r-j+1/2}\, |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\, d\xi$$

On a $\chi(\frac{\rho}{a})\, \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\, \rho^{2|p|+2|q|} \leqslant \chi(\frac{\rho}{a})\, a^{2|p|+2|q|}$

et le premier terme est majoré par

$$C\, \varepsilon^{2j-2m_o} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi(\tfrac{\rho}{a})\, \rho^{-2m_o+1}\, |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\, d\xi \ .$$

Donc intégrale finie à cause de l'hypothèse sur φ_j pour $j \geqslant m_o+1$ et comme $2j - 2m_o \geqslant 2$ on a $\varepsilon^{2j-2m_o} \leqslant \varepsilon^2$ et le premier terme de (4.2.28) est majoré par $C\, \varepsilon^2$.

Pour le deuxième terme, on met en évidence $\varepsilon\rho$ qui donnera le ε cherché pour la majoration et le ρ introduit multiplié avec ρ^{2j-3} donnera ρ^{2j-2}. Il reste alors :

$$(\varepsilon\rho)^{2j-2-2m_o+1} = (\varepsilon\rho)^{2j-2m_o-1} \ .$$

L'exposant est positif puisque $j \geqslant m_o+1$, donc :

$$\chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})\, (\varepsilon\rho)^{2j-2m_o-1} \leqslant a^{2j-2m_o-1}$$

et

$$(1 - \chi(\tfrac{\rho}{a}))\, \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2j+2}}{(1+\rho^2)^{m_1+r-j+1/2}} \leqslant C$$

donc le deuxième terme est majoré par $C\, \varepsilon$ et

$$\| u^{1}_{jk\varepsilon}(x,y) \|^{2}_{T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\,\varepsilon \qquad j \geqslant m_o+1 \quad \text{et} \quad k \leqslant m_o \quad .$$

Lemme 2.5.- Lorsque $j \leqslant m_o$ et $k \leqslant m_o$, $u^{1}_{jk\varepsilon}(x,y)$ converge vers $u_{jk}(x,y)$ (donnée par (3.3.17)) dans $T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et on a l'inégalité :

$$(4.2.30) \qquad \| u^{1}_{jk\varepsilon}(x,y) - u_{jk}(x,y) \|^{2}_{T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\,\varepsilon \quad .$$

Preuve : On commence par décomposer $u_{jk}(x,y)$ en deux parties en introduisant $\chi(\frac{\varepsilon\rho}{a})$ et $1-\chi(\frac{\varepsilon\rho}{a})$ et on note ces termes respectivement $u_{jk\varepsilon}$ et $w_{jk\varepsilon}$. Etudions d'abord $w_{jk\varepsilon}$, on a :

$$(4.2.31) \qquad \| D^{q}(D^{p}\, w_{jk\varepsilon}(x,y)) \|^{2}_{L^{2}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[1-\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})\right]^{2} \rho^{-2j+2}\, \rho^{2\beta_o} \left(\int_0^\infty e^{-2\alpha\rho y} dy\right) \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \cdots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} |\hat{\varphi}_j(\xi)|^{2}\, d\xi$$

$$\leqslant C\,\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[1-\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})\right]^{2} (\varepsilon\rho)^{-1}\, \rho^{2|p|+2|q|+2-2j}\, |\hat{\varphi}_j(\xi)|^{2}\, d\xi$$

et comme $1-\chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}) = 0$ si $\varepsilon\rho \leqslant \frac{a}{2}$ on aura la majoration :

$$\left[1-\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})\right]^{2} (\varepsilon\rho)^{-1} \leqslant \left[1-\chi(\tfrac{\rho}{a})\right] (\tfrac{a}{2})^{-1} \qquad (\varepsilon \leqslant 1)$$

et $|p| \leqslant r$, $|q| \leqslant m_o$, $m_1 \geqslant m_o+1$ entraînent que $2|p|+2|q|+2-2j < 2m_1+2r-2j+$

D'où :

$$(4.2.32) \qquad \| w_{jk\varepsilon}(x,y) \|^{2}_{T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\,\varepsilon \qquad j,k \leqslant m_o \quad .$$

Il reste alors à montrer que $u^{1}_{jk\varepsilon}(x,y)$ converge vers $v_{jk\varepsilon}(x,y)$ dans $T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)$ pour $j,k \leqslant m_o$.

Le lemme 2.1.1 donne le développement pour $\varepsilon\rho \leqslant a$

$$\eta_i(\varepsilon\rho\omega) = \varepsilon\rho\ \alpha_i(\omega) + (\varepsilon\rho)^2\ A_i(\varepsilon\rho\omega) \quad \text{où} \quad |A_i(\varepsilon\rho\omega)| \leqslant C \quad .$$

Ce qui entraîne en utilisant le théorème des résidus :

$$(4.2.33) \qquad \frac{\partial^{\beta_o}}{\partial y^{\beta_o}} G_k(\varepsilon\rho,\omega,\ \frac{y}{\varepsilon}) = \rho^{\beta_o} \Bigg[\int_C \frac{z^{\beta_o+k-1}\ e^{\rho y z}}{\sum\limits_{i=1}^{m_o} (z+\alpha_i(\omega))} dz\ + $$

$$+ (\varepsilon\rho) \sum_{i=1}^{m_o} B_{ik}(\varepsilon\rho,\omega,\rho y)\ e^{-\alpha_i(\omega)\rho y} \Bigg]$$

où $B_{ik}(\varepsilon\rho,\omega,\rho y) = P_{ik\varepsilon}(\rho y) + \varepsilon\rho\ Q_{ik\varepsilon}(\rho y)\ e^{-A_i(\varepsilon\rho\omega)\rho y}$.

$P_{ik\varepsilon}(\rho y)$ et $Q_{ik\varepsilon}(\rho y)$ sont des polynômes en ρy dont les coefficients sont bornés pour $\varepsilon\rho \leqslant a$.

De même le théorème 2.3.1 donne le développement pour $j,k \leqslant m_o$

$$(4.2.34) \qquad A_{jk}(\varepsilon\rho\omega) = \beta_{jk}(\omega)(\varepsilon\rho)^{-(j-1)} + (\varepsilon\rho)^{-(j-2)}\ C_{jk}(\varepsilon\rho\omega) \quad \text{où} \quad |C_{jk}(\varepsilon\rho\omega)| \leqslant C \ .$$

Or (4.2.9) et (3.3.17) donnent :

$$(4.2.35) \quad D^q(D^p(u^1_{jk\varepsilon}(x,y) - v_{jk\varepsilon}(x,y))) = \overline{\mathcal{F}}_\xi \Big[\chi(\frac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon^{j-1}\ A_{jk}(\varepsilon\rho\omega)\ \frac{\partial^{\beta_o}}{\partial y^{\beta_o}} G_k(\varepsilon\rho,\omega,\ \frac{y}{\varepsilon}) -$$

$$- \rho^{-j+1}\ \beta_{jk}(\omega)\ \frac{\partial^{\beta_o}}{\partial y^{\beta_o}} G'_k(\rho,\omega,y)\ \widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi) \Big] (x)$$

et en tenant compte de (4.2.33) et (4.2.34)

$$(4.2.36) \quad D^q(D^p(u^1_{jk\varepsilon}(x,y) - v_{jk\varepsilon}(x,y))) = \overline{\mathcal{F}}_\xi \Big[\chi(\frac{\varepsilon\rho}{a})\ \rho^{\beta_o-j+1}(\varepsilon\rho)$$

$$(C_{jk}(\varepsilon\rho\omega)\ \frac{\partial^{\beta_o}}{\partial y^{\beta_o}} G'_k(\rho,\omega,y) + \beta_{jk}(\omega) \sum_{i=1}^{m_o} B_{ik}(\varepsilon\rho,\omega,\rho y)\ e^{-\alpha_i(\omega)\rho y} \ +$$

$$+ (\varepsilon\rho)\ C_{jk}(\varepsilon\rho\omega) \sum_{i=1}^{m_o} B_{ik}(\varepsilon\rho,\omega,\rho y))\ \widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi) \Big] (x) \quad .$$

Or $\dfrac{\partial^{\beta_o}}{\partial y^{\beta_o}} G'(\rho,\omega,y) = \sum_{i=1}^{m_o} E_{ik}(\rho y,\rho\omega)\ e^{-\alpha_i(\omega)\rho y}$ (Théorème des résidus).

Donc (4.2.36) devient :

$$(4.2.37)\quad D^q(D^p(u^1_{jk\varepsilon}(x,y) - v_{jk\varepsilon}(x,y))) = \overline{\mathcal{F}}_\xi \Big[\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})\ \rho^{\beta_o-j+1}\ (\varepsilon\rho) \Big(\sum_{i=1}^{m_o} F_{ik}(\rho y,\varepsilon\rho\omega)\ e^{-\alpha_i(\omega)\rho y}\Big)\ \widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi)\Big](x)$$

où les $F_{ik}(\rho y,\rho\omega)$ sont des polynômes en ρy dont les coefficients sont **bornés** pour $\varepsilon\rho \leqslant a$.

Montrons qu'alors chacun des termes composant (4.2.37) converge vers **zéro pour** $|q| \leqslant m_o$ et $|p| \leqslant r$ dans $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Or d'après la formule de Plancherel la norme L^2 de chacun de ces termes au carré est majoré par :

$$C\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})\ \rho^{2\beta_o-2j+2}\ (\varepsilon\rho)^2 \int_0^\infty |F_{ik}(\rho y,\varepsilon\rho\omega)|^2\ e^{-2\alpha_i(\omega)\rho y}\ dy\ |\widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi)|^2\ d\xi$$

$$(4.2.38)\quad \leqslant C\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varepsilon\ \chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon\rho)\ \rho^{-2j+1}\ \rho^{1+2|p|+2|q|}\ |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\ d\xi\ .$$

Et comme $\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon\rho) \leqslant a$ et $\dfrac{\rho^{2|p|+2|q|+1}}{(1+\rho^2)^{m_1+r}} \leqslant C$ pour $|p| \leqslant r$ et $|q| \leqslant m_o$.

D'où :

$$(4.2.39)\quad \|D^q(D^p(u^1_{jk\varepsilon} - v_{jk\varepsilon}))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\,\varepsilon\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^{-2j+1}(1+\rho^2)^{m_1+r}\ |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\ d\xi\ .$$

Et comme l'intégrale est finie par hypothèse :

$$(4.2.40)\quad \|u^1_{jk\varepsilon} - v_{jk\varepsilon}\|^2_{T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\,\varepsilon\ .$$

Donc si l'on réunit les résultats donnés par les lemmes (2.1) à (2.5) on a la première affirmation du théorème avec l'inégalité (4.2.7) .

Montrons maintenant la deuxième inégalité. Pour cela il suffit de reprendre les lemmes précédents en introduisant ε^{m_1} .

Du résultat du lemme 2.1 il est clair que l'on a :

$$(4.2.41) \qquad \| \varepsilon^{m_1} u^2_{j\varepsilon}(x,y) \|^2_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\, \varepsilon^{2m_1} \qquad j \leqslant m_1 \quad .$$

Lorsque $j \leqslant m_o$ et $k \geqslant m_o+1$, l'inégalité (4.2.19) donne :

$$\varepsilon^{2m_1} \| D^q(D^p u^1_{jk\varepsilon}(x,y) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\, \varepsilon^{2m_1+2m_o+1-2\beta_o} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\, \rho \times \rho^{-2j+1}$$

$$\frac{\rho^{2|p|+2|q|-2\beta_o+2m_o}}{(1+\rho^2)^{m_1+r}} \left[(1+\rho^2)^{m_1+r} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 \; d\xi \quad .\right.$$

Comme $2m_o+1 \geqslant 0$ on a $\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\; (\varepsilon\rho)^{2m_o+1} \leqslant a^{2m_o+1}$. De plus $2m_1-2\beta_o \geqslant 0$ si $\beta_o \leqslant m_1$ et $0 \leqslant 2|q| - 2\beta_o \leqslant 2m_1$ donc :

$$\frac{\rho^{2|p|+2|q|-2\beta_o}}{(1+\rho^2)^{m_1+r}} \leqslant C \quad \text{et on aura :}$$

$$(4.2.42) \qquad \varepsilon^{2m_1} \| u^1_{jk\varepsilon}(x,y) \|^2_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^{-2j+1} \; (1+\rho^2)^{m_1+r} \; |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 \; d\xi \quad .$$

Lorsque $j \geqslant m_o+1$ et $k \geqslant m_o+1$, l'inégalité (4.2.22) donne :

$$\varepsilon^{2m_1} \| D^q(D^p u^1_{jk\varepsilon}(x,y) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\varepsilon \times \varepsilon^{2j-2+2m_1-2\beta_o} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) \rho^{2|p|+2|q|-2\beta_o} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 \, d\xi$$

On introduit alors $\chi(\frac{\rho}{a})$ et $1 - \chi(\frac{\rho}{a})$ et comme pour $\rho < a$

$$\chi(\frac{\rho}{a})\; \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\; \rho^{2|p|+2|q|-2\beta_o} \leqslant a^{2|p|+2|q|-2\beta_o}$$

et $\qquad \varepsilon^{2j-2+2m_1-2\beta_o} \leqslant 1 \quad .$

Le premier terme de la décomposition sera majoré par $C\,\varepsilon$ et le deuxième terme peut s'écrire :

$$C\, \varepsilon^{2j-1+2m_1-2\beta_o} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\frac{\rho}{a}))\; \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\; \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2\beta_o-2j+1}}{(1+\rho^2)^{m_1+r-j+m_o}} \times \rho^{2j-1} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 \; d\xi \; .$$

Or $\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\ (\varepsilon\rho)^{2j-1} \leqslant a^{2j-1}$ et $2m_1 - 2\beta_o \geqslant 0$ et

$$(1 - \chi(\frac{\rho}{a})\ \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2j+2m_o-2\beta_o}}{(1+\rho^2)^{m_1+r-j+m_o}} \leqslant C \quad .$$

D'où :

$$\varepsilon^{2m_1}\ \| u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|^2_{T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \quad . \tag{4.2.43}$$

Lorsque $j \geqslant m_o+1$ et $k \leqslant m_o$, l'inégalité (4.2.28) donne, en **introduisant** $\chi(\frac{\rho}{a})$ et $(1 - \chi(\frac{\rho}{a}))$:

$$\varepsilon^{2m_1}\ \| D^q(D^p\ u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C\ \varepsilon^{2m_1+2j-2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi(\frac{\rho}{a})\ \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon\rho)^{-2m_o+2}\ \rho^{2\beta_o-1}\ \rho^{2|p|+2|q|-2\beta_o}\ |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\ d\xi$$

$$+ C\ ^{2m_1+2j-2m_o} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\frac{\rho}{a}))\ \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\rho^{2j-2m_o}\ \rho^{-2m_o+1}\ \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2j+2m_o}}{(1+\rho^2)^{m_1+r-j+m_o}}$$

$$(1+\rho^2)^{m_1+r-j+m_o}\ |\varphi_j(\xi)|^2\ d\xi \quad .$$

Comme $2j - 2m_o > 0$, $\varepsilon^{2j-2m_o} \leqslant 1$ et $\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon\rho)^{2j-2m_o} \leqslant a^{2j-2m_o}$

$$\varepsilon^{2m_1}\ \| u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|^2_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\ \varepsilon^{2m_1} \quad . \tag{4.2.44}$$

Et finalement lorsque $j \leqslant m_o$ et $k \leqslant m_o$, on a :

$$\varepsilon^{2m_1}\ \| D^q(D^p\ u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C\ \varepsilon^{2j+2m_1-2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon\rho)^{-2j+2}\ \rho^{-1+2\beta_o}\ \rho^{2|p|+2|q|-2\beta_o}\ |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\ d\xi$$

$$\leqslant C\ \varepsilon^{2m_1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^{-2j+1}\ \frac{\rho^{|p|+2|q|}}{(1+\rho^2)^{m_1+r}}\ (1+\rho^2)^{m_1+r}\ |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\ d\xi$$

et donc :

$$(4.2.45) \qquad \varepsilon^{2m_1} \| u^1_{jk\varepsilon}(x,y) \|^2_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\, \varepsilon^{2m_1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^{-2j+1} \, (1+\rho^2)^{m_1+r} \, |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2 \, d\xi \; .$$

Ce qui achève ainsi la démonstration du théorème.

Remarque 4.2.1.- La démonstration précédente montre que la convergence a lieu dans l'espace de la solution du problème perturbé et qu'en général on ne peut pas avoir mieux. Et pourtant les hypothèses sur les $\varphi_j(x)$ entraînent à cause du corollaire 3.3.2 que la solution du problème limite appartient à $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$.

De même on voit que la convergence n'est pas la même pour tous les termes composant la solution du problème perturbé. Le lemme 2.1 montre que la partie au voisinage de l'infini converge faiblement dans $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$. De même lorsque $j,k \leqslant m_o$ on montre en raffinant un peu les majorations de la démonstration du lemme 2.5 que les $u^1_{jk\varepsilon}(x,y)$ convergent faiblement dans $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ vers $u_{jk}(x,y)$. En effet de (4.2.38) on tire :

$$\|D^q(D^p(u^1_{jk\varepsilon}-v_{jk\varepsilon}))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right)(\varepsilon\rho)^2 \, \rho^{-2j+1} \, \rho^{2\beta_o+2|p|+2|q|-2\beta_o} \, |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2 \, d\xi$$

et

$$\chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \, (\varepsilon\rho)^2 \leqslant a^2 \, \chi\left(\frac{\rho}{a}\right); \; \frac{\rho^{2|p|+2|q|}}{(1+\rho^2)^{m_1+r}} \leqslant C \quad \text{si} \quad |q| \leqslant m_1 \quad \text{et} \quad |q| \leqslant r$$

donc

$$(4.2.46) \qquad \|u^1_{jk\varepsilon}(x,y) - v_{jk\varepsilon}(x,y)\|^2_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \quad .$$

De plus (4.2.31) donne :

$$\|D^q(D^p \, w_{jk\varepsilon}(x,y)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 - \chi\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right)\right)^2 \, \rho^{2|p|+2|q|+1-2j} \, |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2 \, d\xi$$

et $2|p| + 2|q| - 2j + 1 \leqslant 2m_1 + 2r - 2j + 1$ entraîne que :

$$(4.2.47) \qquad \|w_{jk\varepsilon}(x,y)\|^2_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \quad .$$

(4.2.46) et (4.2.47) montre donc que $u^1_{jk\varepsilon}(x,y) - u_{jk}(x,y)$ est borné **dans** $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$, donc on peut extraire une sous suite que l'on note pareil qui convergera faiblement dans $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$, cette limite ne pouvant être que **zéro** puisque l'on a déjà la convergence forte vers zéro dans $T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)$.

On peut remarquer que si l'on ajoute une hypothèse de régularité à l'**infini** soit $\varphi_j(x) \in H^{m_1+r-j+1}(\mathbb{R}^{n-1})$ $(j \leqslant m_o)$ on a convergence forte dans $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et

$$\|u^1_{jk\varepsilon}(x,y) - u_{jk}(x,y)\|_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\,\varepsilon^{1/2} \quad .$$

Si l'on considère le cas où $j \geqslant m_o+1$ et $k \leqslant m_o$. On réécrit (4.2.29) **comme** suit :

$$\|D^q(D^p u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi(\tfrac{\rho}{a})\,\chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})\,(\varepsilon\rho)^{2j-2m_o}\,\rho^{-2j+1}\,\rho^{2|p|+2|q|}\,|\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\,d\xi$$

$$+ C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1-\chi(\tfrac{\rho}{a}))\,\chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon\rho)^{2j-2m_o}\,\rho^{-2j+1}\,\rho^{2|p|+2|q|}\,|\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\,d\xi \quad .$$

On peut alors majorer le premier terme en tenant compte que :

$$\chi(\tfrac{\rho}{a})\,\chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})\,\rho^{2|p|+2|q|} \leqslant a^{2|p|+2|q|}\,\chi(\tfrac{\rho}{a})$$

par :

$$C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi(\tfrac{\rho}{a})\,\varepsilon^{2j-2m_o}\,\rho^{-2m_o+1}\,|\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\,d\xi < \infty \quad \text{par hypothèse et le}$$

deuxième terme est majoré en tenant compte que

$$(1-\chi(\tfrac{\rho}{a}))\,\chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})\,(\varepsilon\rho)^{2j-2m_o} \leqslant (1-\chi(\tfrac{\rho}{a}))\,a^{2j-2m_o}$$

par :

$$C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1-\chi(\tfrac{\rho}{a}))\,(1+\rho^2)^{m_1+r-2j+1}\,|\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\,d\xi < \infty \quad \text{par hypothèse.}$$

Donc $\|u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C$ et comme précédemment on peut extraire une sous suite convergeant vers zéro dans $T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)$, la convergence étant forte si l'on suppose pour $j \geqslant m_o+1$ $\varphi_j(x) \in H^{m_1+r-j+1}(\mathbb{R}^{n-1})$ et l'on a alors :

(4.2.48) $$\|u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|_{T^{m_1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\,\varepsilon^{1/2} \quad .$$

Par contre lorsque $j \leqslant m_o$ et $k \geqslant m_o+1$ d'une part et $j \geqslant m_o+1$ et $k \geqslant m_o+1$ d'autre part, c'est-à-dire les termes dits frontières, il n'y a pas d'espoir en général d'avoir une convergence dans un espace plus régulier que $T^{m_o,r}(\mathbb{R}^n_+)$, car ces termes contiennent des facteurs du type $e^{-\beta_i \frac{y}{\varepsilon}}$ et chaque dérivation en y introduit un facteur $\frac{1}{\varepsilon}$. Ce phénomène est dû au fait que la solution du problème limite a des dérivées en y qui sur la frontière $y = 0$ sont égales à $\varphi_j(x)$ pour $j \leqslant m_o$ mais en général sont différentes de $\varphi_j(x)$ pour $m_o+1 \leqslant j \leqslant m_1$. On verra sur des exemples dans le chapitre suivant que les termes frontières pour $j \leqslant m_o$ correspondent aux $\frac{\partial^{j-1}}{\partial u^{j-1}}(x,0)$ pour $j \geqslant m_o+1$ et les termes frontières pour $j \geqslant m_o+1$ correspondent aux $\varphi_j(x)$ pour $j \geqslant m_o+1$.

CHAPITRE V

Exemples

Exemple 1.- On considère le problème :

$$(5.1.1)\qquad \begin{cases} -\Delta u + u = 0 & y > 0 \\ \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique associé à l'opérateur $-\Delta + I$ est, avec les notations du chapitre II :

$$(5.1.2)\qquad \mathbb{L}(\bar{\xi}) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 + 1 \quad .$$

Ici $2m_1 = 2$ et $2m_o = 0$ c'est-à-dire $m_1 = 1$ et $m_o = 0$. Nous sommes donc dans le cas traité dans le paragraphe 3.2 du chapitre III.

Vérifions les différentes hypothèses I, II, III, IV

H 1.- $\qquad \mathrm{Re}\ \mathbb{L}(\bar{\xi}) = \mathbb{L}(\bar{\xi}) = |\bar{\xi}|^{2m_1} + |\bar{\xi}|^{o} \qquad \forall\ \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$.

On a toujours avec les notations du chapitre II :

$$\mathbb{L}_1(\bar{\xi}) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{L}_o(\bar{\xi}) = 1$$

et en posant $L(\xi,\eta) = \mathbb{L}(\xi, i\eta)$

$$(5.1.3)\qquad L(\xi,\eta) = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2 - \eta^2 + 1$$

$$(5.1.4)\qquad L_1(\xi,\eta) = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2 - \eta^2$$

$$(5.1.5)\qquad L_o(\xi,\eta) = 1 \ .$$

H 2.- Soit $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ avec $|\omega| = 1$, on a $L_o(\omega,\alpha) = 1$ et $L_1(\omega,\gamma) = 1 - \gamma^2$.
Il existe donc bien de manière évidente $m_1 = 1$ racine , $\gamma(\omega) = 1$ de $L_1(\omega,\gamma) = 0$
avec partie réelle positive et exactement $m_o = 0$ racine $\alpha_i(\omega)$ de $L_o(\omega,\alpha) = 0$

H 3.- La racine $\eta(\xi)$ de $L(\xi,\eta) = 0$ est donnée par

$$\eta(\xi) = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2} \in \mathbb{R}_*^+ \qquad \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \quad . \tag{5.1.6}$$

Cette racine est analytique en tout $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$.

<u>Opérateur frontière</u>.-

Il est clair que $B(\xi,\eta) = 1$ c'est-à-dire $\mu = d° B = 0$ et donc :

H 4.- $L^+(\xi,\tau) \equiv \tau + \eta(\xi)$ et $L_1^+(\xi,\tau) \equiv \tau + \gamma \equiv \tau + 1$, donc :

$B(\xi,-\tau) = 1 = [\tau + \eta(\xi)] \times 0 + 1$ c'est-à-dire

$B(\xi, -\tau) \neq 0 \mod (L_1^+(\xi,\tau))$.

Comme il n'y a qu'une seule racine nous sommes bien dans le cas de racines simples traité au chapitre II paragraphe 6. D'autre part comme $m_o = 0$, il n'y aura pas de discontinuité à l'origine et donc le noyau associé au problème (5.1.1) sera donné par :

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-y\sqrt{\rho^2+1}} \, e^{ix\xi} \, d\xi \quad . \tag{5.1.7}$$

Il lui correspond alors la solution du problème (5.1.1), par exemple avec $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$:

$$u(x,y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-y\sqrt{\rho^2+1}} \, e^{i(x-\tau)\xi} \, \varphi(\tau) \, d\tau \, d\xi \quad . \tag{5.1.8}$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$u(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi}(e^{-y\sqrt{1+\rho^2}}\,\hat{\varphi}(\xi))\ (x) \quad . \tag{5.1.9}$$

Comme $m_o = 0$, on aura, pour $\varphi \in H^{r+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, le théorème 3.2.1 c'est-à-dire que $u(x,y) \in T^{1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ donnée par (5.1.9) est l'unique solution du problème (5.1.1). De plus un calcul direct dans cet exemple particulier donne l'égalité :

$$\| u(x,y) \|_{T^{1,r}(\mathbb{R}^n_+)} = (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \| \varphi \|_{H^{1/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})} \quad . \tag{5.1.10}$$

Considérons alors le problème perturbé associé, à savoir :

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = 0 \\ u_\varepsilon(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{5.1.11}$$

dont une solution est donnée par :

$$u_\varepsilon(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi}(e^{-y/\varepsilon\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}}\ \hat{\varphi}(\xi))\ (x) \quad . \tag{5.1.12}$$

On suppose $\varphi \in H^{1/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})$, on a alors les résultats du théorème 4.2.1 à savoir :

$u_\varepsilon(x,y) \to 0$ dans $T^{o,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et on a les inégalités :

$$\| u_\varepsilon(x,y) \|_{T^{o,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\ \varepsilon^{1/2} \tag{5.1.13}$$

$$\| \varepsilon\ u_\varepsilon(x,y) \|_{T^{1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \quad . \tag{5.1.14}$$

Par contre on n'aura pas la convergence vers zéro dans $T^{1,r}(\mathbb{R}^n_+)$, mais on aura un correcteur en prenant le premier terme du développement de $u_\varepsilon(x,y)$ et ceci seulement pour $\varepsilon\rho \leqslant a$ où a est un réel positif. On pose

$$(5.1.16) \qquad \theta_\varepsilon(x,y) = (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-y/\varepsilon} \chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}) e^{ix\xi} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi \quad .$$

Remarque 1.1.- Le plus souvent on omettra le terme $\chi(\frac{\varepsilon\rho}{a})$, mais il faudra **faire** des hypothèses supplémentaires de régularité à l'infini sur $\varphi(x)$. **Dans ce cas** $\theta_\varepsilon(x,y) = \varphi(x)\, e^{-y/\varepsilon}$.

Théorème 1.1.- Si $\varphi(x) \in H^{1/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})$, $u_\varepsilon(x,y) - \theta_\varepsilon(x,y)$ converge **faiblement** vers zéro dans $T^{1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et si $\varphi \in H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1})$ on a alors la **convergence** forte dans $T^{1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ avec l'inégalité $\|u_\varepsilon - \theta_\varepsilon\|_{T^{1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\, \varepsilon^{1/2}$.

Preuve :

$$(5.1.16)' \qquad u_\varepsilon(x,y) - \theta_\varepsilon(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_\xi\left[\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})(e^{-y/\varepsilon\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}} - e^{-y/\varepsilon})\hat{\varphi}(\xi)\right](x)$$
$$+ \overline{\mathcal{F}}_\xi\left[((1-\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}))\, e^{-y/\varepsilon\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}}\ \hat{\varphi}(\xi)\right](x)$$

Nous allons nous placer dans le cas le plus défavorable pour la **convergence** c'est-à-dire la dérivation maximum en y qui sera ici d'ordre 1 . Soit :

$$(5.1.17) \qquad D^p \frac{\partial}{\partial y}(u^1_\varepsilon - \theta_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\ \overline{\mathcal{F}}_\xi\left[\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})(-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}\, e^{-y/\varepsilon\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}} + e^{-y/\varepsilon})\widehat{D^p\varphi(\xi)}\right](x$$

où $p = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$ et $|p| < r$.

Le théorème de Plancherel entraîne donc :

$$(5.1.18) \qquad \|D^p \frac{\partial}{\partial y}(u^1_\varepsilon - \theta_\varepsilon)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} =$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})\left[\int_0^\infty\left(-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}\, e^{-y/\varepsilon\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}} + e^{-y/\varepsilon}\right)^2 dy\ |\widehat{D^p\varphi(\xi)}|^2\, d\xi\right.$$

Calculons déjà l'intégrale en y , en développant le carré, on obtient :

$$\varepsilon(2 + (\varepsilon\rho)^2 - 2\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}) = \varepsilon(\varepsilon\rho)^2\, C(\varepsilon\rho) \quad .$$

Où $C(\varepsilon\rho) = O(\varepsilon\rho)$ et donc bornée au voisinage de 0 c'est-à-dire $\varepsilon\rho < a$.

D'où en reportant dans (5.1.18)

$$(5.1.19) \qquad \| D^p \frac{\partial}{\partial y} (u_\varepsilon^1 - \theta_\varepsilon) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varepsilon \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) (\varepsilon\rho)^2 \; C(\varepsilon\rho) \; |\widehat{D^p\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi$$

et comme $\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})$ $\varepsilon\rho < a$ on aura :

$$(5.1.20) \qquad \| D^p \frac{\partial}{\partial y} (u_\varepsilon^1 - \theta_\varepsilon) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} < C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho \; |\widehat{D^p\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi < C'$$

(par hypothèse sur φ) et donc $u_\varepsilon^1 - \theta_\varepsilon$ est borné dans $T^{1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ donc admet une sous suite faiblement convergente et sa limite ne peut être que zéro.

Ce qui donne le premier résultat puisque le terme

$$u_\varepsilon^2(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[(1 - \chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}) \quad e^{-y/\varepsilon\sqrt{1+(\varepsilon \;)^2}} \; \hat{\varphi}(\xi) \right] (x)$$

est borné dans $T^{1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ d'après le lemme (4.2.1) .

Le second résultat vient de ce que si $\varphi \in H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1})$, (5.1.19) donne :

$$(5.1.21) \qquad \| D^p \frac{\partial}{\partial y} (u_\varepsilon^1 - \theta_\varepsilon) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \; \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^2 \; |\widehat{D^p\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi < C'\varepsilon \quad .$$

<u>**Remarque**</u> 1.2.- On voit aussi que le correcteur donné par (5.1.16) est un correcteur comme il est défini dans le chapitre I , définition (1.4.10). En effet

$$(5.1.22) \qquad \begin{cases} - \varepsilon^2 \, \Delta_{\;\varepsilon} + \theta_\varepsilon = - \varepsilon^2 \, \Delta_x \, \theta_\varepsilon(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} \; \theta_\varepsilon(x,y) = \ell^\varepsilon(x) = (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix\xi} \; \chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}) \; \hat{\varphi}(x) \; d\xi \quad . \end{cases}$$

Posons donc $G_{\varepsilon 1} = - \Delta_x \, \theta_\varepsilon(x,y)$ et $G_{\varepsilon 2} = 0$, on aura :

$$\| G_{\varepsilon 1} \|^2_{T^{-1,r}(\mathbb{R}^n_+)} = \sum_{|p|\leqslant r} \int_0^\infty e^{-2y/\varepsilon} \, dy \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) \; \frac{\rho^4}{(1+\rho^2)} \; |\widehat{D^p\varphi}(\xi)|^2 \; d\xi \quad .$$

Comme $\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon\rho) \leqslant a$ et $\varphi \in H^{r+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, on aura après **intégration** en y

(5.1.23) a) $\|G_{\varepsilon 1}\|^2_{T^{-1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C$ ou si $\varphi \in H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1})$

b) $\|G_{\varepsilon 1}\|^2_{T^{-1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\,\varepsilon$.

Considérons alors

$$\|\ell^\varepsilon - \varphi\|_{H^{r+1/2}} = \|(2\pi)^{\frac{-n+1}{2}}\,\overline{\mathcal{F}}_\xi((1-\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}))\,\hat{\varphi}(\xi))(x)\|^2_{H^{r+1/2}}$$

$$= \sum_{|p|\leqslant r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1-\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}))^2\,(1+\rho^2)^{r+1/2}\,|\widehat{D\varphi}(\xi)|^2\,d\xi\,.$$

On voit que cette quantité tend vers zéro quand $\varepsilon \to 0$ (théorème de **convergence** dominée de Lebesgue).

Mais pour avoir l'hypothèse du théorème 4.2, il faut que cette **quantité soit** $O(\varepsilon^{1/2})$, ce que l'on aura dès que l'on suppose $\varphi(x) \in H^{1+r}(\mathbb{R}^n_+)$ **, car :**

$$\|\ell^\varepsilon - \varphi\|^2_{H^{r+1/2}} = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1-\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}))^2\,(\varepsilon\rho)^{-1}\rho\,(1+\rho^2)^{r+1/2}\,|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi$$

et comme $(1-\chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}))^2\,(\varepsilon\rho)^{-1} < (\frac{a}{2})^{-1}$ on a $\|\ell^\varepsilon - \varphi\|^2_{H^{r+1/2}} \leqslant C\,\varepsilon$.

Dans ce cas puisque l'on a (5.1.23) b), on est dans les hypothèses **de la** remarque 1.4.2 et on la convergence forte du $u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon)$ vers zéro **dans** $T^{1,r}(\mathbb{R}^n_+)$. Le théorème 1.1 ci-dessus est donc un peut plus fort.

<u>Exemple 2</u>.- On considère le problème :

$$(5.2.1)\quad \begin{cases} \Delta^2 u - \Delta u = 0 & (x,y) \in \mathbb{R}^n_+ \\ u(x,0) = \varphi_1(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \varphi_2(x)\,. & \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique associé à l'opérateur $\Delta^2 - \Delta$ est alors :

$$(5.2.2) \qquad \mathbb{L}(\bar{\xi}) = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2)^2 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + 1\right] .$$

Le degré de ce polynôme est donc $2m_1 = 4$ et le degré d'ordre le plus petit est $2m_o = 2$. Donc ici $m_1 = 2$ et $m_o = 1$.

Vérifions les différentes hypothèses I, II, III, IV

H 1.- $\mathrm{Re}\,\mathbb{L}(\bar{\xi}) = \mathbb{L}(\bar{\xi}) = |\bar{\xi}|^4 + |\bar{\xi}|^2 \quad \forall \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$ donc bien vérifié.

Posons $\mathbb{L}_1(\bar{\xi}) = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2)^2$ et $L_o(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$

On écrit alors :

$$(5.2.3) \qquad L(\xi,\eta) \equiv \mathbb{L}(\xi, i\eta) = (\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2 - \eta^2) \left[\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 + 1 - \eta^2\right]$$

$$(5.2.4) \qquad L_1(\xi,\eta) \equiv (\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2 - \eta^2)^2$$

$$(5.2.5) \qquad L_o(\xi,\eta) \equiv \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2 - \eta^2 \quad .$$

H 2.- Soit $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ avec $|\omega| = 1$. $L_o(\omega,\alpha) = 1 - \alpha^2$ et $L_1(\omega,\gamma) = (1 - \gamma^2)^2$. Il existe donc bien exactement 2 racines $\gamma(\omega) = 1$ (racine double) de $L_1(\omega,\gamma) = 0$ avec partie réelle positive et exactement 1 racine $\alpha(\omega) = 1$ de $L_o(\omega,\alpha) = 0$ avec partie réelle positive.

H 3.- Les racines $\eta_i(\xi)$ de $L(\xi,\eta) = 0$ sont données par :

$$(5.2.6) \qquad \eta_1(\xi) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2} \quad \text{et} \quad \eta_2(\xi) = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2} \qquad \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \quad .$$

Elles sont manifestement analytiques en $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Opérateurs frontières.

Ce sont les opérateurs de Dirichlet, donc :

$$(5.2.7)\qquad \begin{cases} B_1(\xi,\eta) = 1 & \mu_1 = d^\circ\, B_1 = 0 \\ B_2(\xi,\eta) = -\eta & \mu_2 = d^\circ\, B_2 = 1 \end{cases} .$$

H 4.- Nous définissons :

$$(5.2.8)\qquad L^+(\xi,\tau) = \Big(\tau + \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2}\Big)\ \Big(\tau + \sqrt{1 + \xi_j^2}\Big)$$

$$(5.2.9)\qquad L^+(\omega,\tau) = (\tau + 1)^2$$

Comme $B_1(\xi, -\tau) = 1 = 0 \times L^+(\xi,\tau) + 1$

$B_2(\xi, -\tau) = \tau = 0 \times L^+(\xi,\tau) + \tau$.

$$d(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Donc les $B_j(\xi,\tau)$ comme polynômes en τ sont linéairement indépendants modulo $L^+(\xi,\tau)$.

Nous sommes encore dans le cas où les racines du polynôme caractéristique sont simples et où les $A_{jk}(\rho\omega)$ sont sans singularités à l'origine. On peut donc écrire les noyaux de Poisson associés à $\Delta^2 - \Delta$ en utilisant la formule (2.6.6)

$$(5.2.10)\qquad K_1(x,y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sqrt{1+\rho^2}\, (\sqrt{1+\rho^2} + \rho)\, e^{-\rho y}\, e^{ix\xi}\, d\xi\ -$$
$$- (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\sqrt{1+\rho^2} + \rho)\, e^{-\sqrt{1+\rho^2}\,y}\, e^{ix\xi}\, d\xi .$$

$$(5.2.11)\qquad K_2(x,y) = (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\sqrt{1+\rho^2} + \rho)\, e^{-\rho y}\, e^{ix\xi}\, d\xi\ -$$
$$- (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\sqrt{1+\rho^2} + \rho)\, e^{-\sqrt{1+\rho^2}\,y}\, e^{ix\xi}\, d\xi .$$

Il leur correspond alors la solution du problème (5.2.1) , par exemple pour $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$

$$(5.2.12)\qquad u(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_\xi\Big[(\sqrt{1+\rho^2}+\rho)\Big[(\sqrt{1+\rho^2}\, e^{-\rho y} - \rho\, e^{-\sqrt{1+\rho^2}y})\,\hat{\varphi}_1(\xi) + (e^{-\rho y} - e^{-\sqrt{1+\rho^2}y})\,\hat{\varphi}_2(\xi)\Big]\Big](x) \quad .$$

Le théorème 3.1.3 donne alors :

Si $|\varphi_1|^*_{-1/2,H^{2+r}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty$ et $|\varphi_2|^*_{-1/2,H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty$

$u(x,y) \in T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)$ est solution du problème (5.2.1).

Considérons alors le problème perturbé associé, à savoir :

$$(5.2.13)\qquad \begin{cases} \varepsilon^2\,\Delta^2\, u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = 0 \\ u_\varepsilon(x,0) = \varphi_1(x) \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,0) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

On a une solution de ce problème donnée par :

$$u_\varepsilon(x,y) = \sum_{i=1,2}\ \sum_{k=1,2} u_{ik\varepsilon}(x,y) \qquad \text{où}$$

$$(5.2.14)\qquad u_{11\varepsilon}(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_\xi\Big[\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}\,(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}+\varepsilon\rho)\, e^{-\rho y}\,\hat{\varphi}_1(\xi)\Big](x)$$

$$(5.2.15)\qquad u_{12\varepsilon}(x,y) = -\overline{\mathcal{F}}_\xi\Big[\varepsilon\rho(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}+\varepsilon\rho)\quad e^{-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}\,\frac{y}{\varepsilon}}\quad \hat{\varphi}_1(\xi)\Big](x)$$

$$(5.2.16)\qquad u_{21\varepsilon}(x,y) = \varepsilon\,\overline{\mathcal{F}}_\xi\Big[(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}+\varepsilon\rho)\, e^{-\rho y}\,\hat{\varphi}_2(\xi)\Big](x)$$

$$(5.2.17)\qquad u_{22\varepsilon}(x,y) = -\varepsilon\,\overline{\mathcal{F}}_\xi\Big[(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}+\varepsilon\rho)\, e^{-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}\,\frac{y}{\varepsilon}}\quad \hat{\varphi}_2(\xi)\Big](x)$$

Dans les hypothèses sur φ_1 et φ_2 ci-dessus, on a le théorème 4.2.1, à savoir :

$u_\varepsilon(x,y) \to u(x,y)$ dans $T^{1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et on a les inégalités :

$$\|u_\varepsilon(x,y) - u(x,y)\|_{T^{1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\,\varepsilon^{1/2} \tag{5.2.18}$$

$$\|\varepsilon^2\, u_\varepsilon(x,y)\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \tag{5.2.19}$$

où $u(x,y)$ est la solution du problème limite :

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \\ u(x,0) = \varphi_1(x) \end{cases} \tag{5.2.20}$$

donnée par :

$$u(x,y) = \overline{\mathcal{F}}_\xi(e^{-\rho y}\,\widehat{\varphi}_1(\xi))(x) \qquad \text{(cf. 3.3.7)} \tag{5.2.21}$$

Par contre nous n'aurons pas l'Alsace-Lorraine dans $T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)$, on sera obligé pour cela d'introduire des correcteurs. On prendra le premier terme du développement de $u_{\varepsilon j 2}(x,y)$ et ceci seulement pour $\varepsilon\rho < a$ où a est un réel positif arbitraire et pour $j = 1,2,\ldots$ On pose donc :

$$\theta_\varepsilon(x,y) = -\,\overline{\mathcal{F}}_\xi\Big[\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon\rho)\; e^{-y/\varepsilon}\,\widehat{\varphi}_1(\xi)\Big](x) - \\ -\,\varepsilon\,\overline{\mathcal{F}}_\xi\Big[\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})\; e^{-y/\varepsilon}\,\widehat{\varphi}_2(\xi)\Big](x) . \tag{5.2.22}$$

Remarque 2.1.- Le plus souvent on omettra $\chi(\frac{\varepsilon\rho}{a})$, mais il faudra faire des hypothèses supplémentaires de régularité à l'infini sur $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$. Dans ce cas là le correcteur prend la forme :

(5.2.23) $$\theta_\varepsilon(x,y) = \varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) - \varphi_2(x)\right] e^{-y/\varepsilon} \quad .$$

On voit donc que l'on corrige la perte de la condition aux limites $u_2(x,0) = \varphi_2(x)$; la correction n'ayant plus lieu si $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \varphi_2(x)$.

Théorème 2.1.- Si $|\varphi_1|^*_{-1/2,H^{2+r}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty$ et $|\varphi_2|^*_{-1/2,H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty$, $u_\varepsilon(x,y) - (u(x,y) + \theta_\varepsilon(x,y))$ converge faiblement vers zéro dans $T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et si de plus $\varphi_1 \in H^{2+r}(\mathbb{R}^{n-1})$ et $\varphi_2 \in H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1})$ on a convergence forte vers zéro dans $T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)$ avec l'inégalité :

$$\|u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon)\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\, \varepsilon^{1/2} \quad .$$

Preuve : Décomposons d'abord $u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon)$ comme suit :

(5.2.24) $$u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon) = (u_{11\varepsilon} - u) + u_{21\varepsilon} + (u^1_{12\varepsilon} - \theta^1_\varepsilon) + (u^1_{22\varepsilon} - \theta^2_\varepsilon) + u^2_{12\varepsilon} + u^2_{22\varepsilon}$$

où $u^1_{j2\varepsilon}$ et $u^2_{j2\varepsilon}$ pour $j = 1, 2$ correspondent respectivement à l'introduction de $1 = \chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}) + (1 - \chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}))$ dans $u_{j2\varepsilon}$.

La remarque 4.2.1 nous donne déjà les inégalités :

(5.2.25) $$\|u_{11\varepsilon} - u\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C$$

(5.2.26) $$\|u_{21\varepsilon}\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C$$

et le lemme 4.2.1

(5.2.27) $$\|u^2_{12\varepsilon}\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C$$

(5.2.28) $\qquad \| u^2_{22\varepsilon} \|_{T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C$.

Il reste donc deux termes à évaluer dans $T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)$. Pour cela plaçons-nous dans le cas le plus défavorable à savoir pour des dérivations du second ordre en y . On a d'une part :

(5.2.29) $$u^1_{12\varepsilon} - \theta^1_\varepsilon = - \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}) (\varepsilon\rho(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho) \quad e^{-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}\,\frac{y}{\varepsilon}} - \varepsilon\rho\, e^{-y/\varepsilon} \right.$$
$$\left. \widehat{\varphi}_1(\xi) \right] (x) \quad .$$

Donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} D^p(u^1_{12\varepsilon} - \theta^1_\varepsilon) = - \frac{1}{\varepsilon} \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}) ((1+(\varepsilon\rho)^2) \;\rho(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho) \right.$$
$$\left. e^{-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}\,\frac{y}{\varepsilon}} - \rho\, e^{-y/\varepsilon}) \widehat{D^p\varphi_1}(\xi) \right] (x)$$

Le théorème de Plancherel entraîne :

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial y^2} \; D^p(u^1_{12\varepsilon} - \theta^1_\varepsilon) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = \frac{2^{n+1}}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) \quad (\ldots)^2 \;|\widehat{D^p\varphi_1}(\xi)|^2 \,d\xi dy$$

or :

$$\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} \leq 1 + (\frac{\varepsilon\rho}{a})^2 \quad \text{et} \quad e^{-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}\,\frac{y}{\varepsilon}} \leq e^{-y/\varepsilon} \quad \text{donne :}$$

$$(\ldots)^2 \leq \varepsilon^2 \rho^4 \, P(\varepsilon\rho)\, e^{-y/\varepsilon} \quad \text{où } P(\varepsilon\rho) \text{ est un polynôme en } \varepsilon\rho \; .$$

Et après intégration en y on aura :

(5.2.29)' $$\left\| \frac{\partial^2}{\partial y^2} D^p(u^1_{12\varepsilon} - \theta^1_\varepsilon) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon\rho)\; P(\varepsilon\rho)\; \rho^3 \;|\widehat{D^p\varphi_1}(\xi)|^2 \,d\xi \; .$$

Et comme $\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\;(\varepsilon\rho)\;P(\varepsilon\rho) \leq a\;\; P(a)$ et $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^3 \;|\widehat{D^p\,\varphi_1}(\xi)|^2 \,d\xi < \infty$ pour $|p| \leq r$ par hypothèse, on a finalement :

(5.2.30) $\qquad \| u^1_{12\varepsilon} - \theta^1_\varepsilon \|_{T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C$.

On a d'autre part :

$$(5.2.31) \qquad u^1_{22\varepsilon} - \theta^2_\varepsilon = -\varepsilon\, \overline{\mathcal{F}}_\xi\Big[\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}) \Big[(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho)\, e^{-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}\,\frac{y}{\varepsilon}} - e^{-y/\varepsilon}\Big]\, \widehat{D\varphi_2}(\xi)\Big](x)$$

donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} D^p(u^1_{22\varepsilon} - \theta^2_\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\, \overline{\mathcal{F}}_\xi\Big[\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})(1+(\varepsilon\rho)^2)(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho)\, e^{-\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}\,\frac{y}{\varepsilon}} - e^{-y/\varepsilon})\, \widehat{D\varphi_2}(\xi)\Big](x) \quad .$$

Le théorème de Plancherel entraîne :

$$\Big\|\frac{\partial^2}{\partial y^2} D^p(u^1_{22\varepsilon} - \theta^2_\varepsilon)\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = \frac{2^{n+1}}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})\ (\ldots)^2\ |\widehat{D^p\varphi_2}(\xi)|^2\ d\xi\, dy \quad .$$

Et comme précédemment on a la majoration :

$$(\ldots)^2 \leqslant \varepsilon^2 \rho^2\ P'(\varepsilon\rho)\ e^{-y/\varepsilon}$$

et après intégration en y :

$$(5.2.31)' \qquad \Big\|\frac{\partial^2}{\partial y^2} D^p(u^1_{22\varepsilon} - \theta^2_\varepsilon)\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon\rho)\ P'(\varepsilon\rho)\ \rho\ |\widehat{D\varphi_2}(\xi)|^2\ d\xi \ .$$

Comme :

$$\chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon\rho)\ P'(\varepsilon\rho) \leqslant a\ P'(a) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho\ |\widehat{D\varphi_2}(\xi)|^2\ d\xi < \infty$$

on aura finalement :

$$(5.2.32) \qquad \|u^1_{22\varepsilon} - {}^2_\varepsilon\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \quad .$$

On réunit alors les résultats (5.2.25) (5.2.26) (5.2.27) (5.2.28) (5.2.30) et (5.2.32), ce qui donne :

$$\|u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon)\|_{T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \quad .$$

Donc on peut en extraire une sous suite convergeant faiblement dans $T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)$ vers une limite qui ne peut être que zéro.

Si l'on ajoute les hypothèses de régularité $\varphi_1 \in H^{2+r}(\mathbb{R}^{n-1})$ et $\varphi_2 \in H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1})$ la remarque 4.2.1 entraîne la convergence forte vers zéro dans $T^{2,r}(\mathbb{R}^n_+)$ des deux premièrs termes de la somme (5.2.24). Celle des deux derniers termes étant donnée par (5.2.27) et (5.2.28). Quant aux autres termes il suffit de reprendre les inégalités (5.2.29)' et (5.2.31)' en conservant alors le terme $\varepsilon\rho$ donnant ainsi un ε pour la convergence et le ρ ajouté ne gêne pas la convergence de l'intégrale à l'infini à cause de l'hypothèse de régularité supplémentaire des $\varphi_j(x)$. On voit aussi que dans ce cas on peut supprimer $\chi(\frac{\varepsilon\rho}{a})$ dans $\theta_\varepsilon(x,y)$ et donc prendre l'expression (5.2.23).

Remarque 2.2.- Si l'on considère $\theta_\varepsilon(x,y)$ défini en (5.2.22) , on voit que c'est une solution du problème aux limites :

$$(5.2.33)\qquad \begin{aligned} &\varepsilon^2 \Delta^2 \theta_\varepsilon - \Delta\theta_\varepsilon = \varepsilon^2 G_{\varepsilon 1} + \varepsilon G_{\varepsilon 2} \\ &\theta_\varepsilon(x,0) = -\varepsilon \overline{\mathcal{F}}_\xi\left[\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})(\rho\hat{\varphi}_1(\xi) + \hat{\varphi}_2(\xi))\right](x) = \ell_{o\varepsilon}(x) \\ &\frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial y}(x,0) = \overline{\mathcal{F}}_\xi\left[\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})(\rho\hat{\varphi}_1(\xi) + \hat{\varphi}_2(\xi))\right](x) = \ell_{1\varepsilon}(x) \end{aligned}$$

où

$$(5.2.34)\qquad G_{\varepsilon 1} = -e^{-y/\varepsilon}\,\overline{\mathcal{F}}_\xi\left[\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})\ \rho^4\ (\varepsilon\rho\hat{\varphi}_1(\xi) + \hat{\varphi}_2(\xi))\right](x)$$

$$(5.2.35)\qquad G_{\varepsilon 2} = e^{-y/\varepsilon}\,\overline{\mathcal{F}}_\xi\left[\chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a})\ \rho^2\ (\rho\hat{\varphi}_1(\xi) + \hat{\varphi}_2(\xi))\right](x) \quad .$$

Regardons maitenant si nous sommes dans les hypothèses du théorème 1.4.2 pour θ_ε .

a) $\|G_{\varepsilon 1}\|_{T^{-2,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq M$.

(5.2.36) $$\|G_{\varepsilon 1}\|^2_{T^{-2,r}(\mathbb{R}^n_+)} = \sum_{|p|\leq r} \|(1+\rho^2)^{-1} \mathcal{F}_x D^p G_{\varepsilon 1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$\leq \sum_{|p|\leq r} \int_0^\infty e^{-2y/\varepsilon} dy \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) \frac{\rho^8}{(1+\rho^2)^2} (\varepsilon\rho)^2 |\widehat{D^p\varphi_1}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\sum_{|p|\leq r} \int_0^\infty e^{-2y/\varepsilon} dy \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) \frac{\rho^8}{(1+\rho^2)^2} \varepsilon^2 |D^p\varphi_2(\xi)|^2 d\xi \quad .$$

Lorsqu'on intègre en y, il s'introduit un ε en facteur et on peut majorer **dans** chacune des intégrales $\varepsilon^3 \rho^3 \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})$ par a^3 et l'on obtient :

$$\|G_{\varepsilon 1}\|^2_{T^{-2,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{|p|\leq r} \rho^3 |\widehat{D^p\varphi_1}(\xi)|^2 d\xi \; +$$

$$C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{|p|\leq r} \rho |\widehat{D^p\varphi_2}(\xi)|^2 d\xi = M \quad .$$

b) $\|G_{\varepsilon 2}\|_{T^{-1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq M'$

(5.2.37) $$\|G_{\varepsilon 1}\|^2_{T^{-1,r}(\mathbb{R}^n_+)} = \sum_{|p|\leq r} \|(1+\rho^2)^{-1/2} \mathcal{F}_x D^p G_{\varepsilon 2}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-2y/\varepsilon} dy \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) \frac{\rho^4}{(1+\rho^2)} \rho^2 |\widehat{D^p\varphi_1}(\xi)|^2 d\xi$$

$$+ \int_0^\infty e^{-2y/\varepsilon} dy \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) \frac{\rho^4}{(1+\rho^2)} |\widehat{D^p\varphi_2}(\xi)|^2 d\xi \quad .$$

Lorsqu'on intègre en y, il s'introduit un ε en facteur et on peut **majorer** $\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\,\varepsilon\rho$ par a dans les deux intégrales et on obtient

$$\|G_{\varepsilon 1}\|^2_{T^{-1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^3 |\widehat{D^p\varphi_1}(\xi)|^2 d\xi \; +$$

$$C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho |\widehat{D^p\varphi_2}(\xi)|^2 d\xi = M' \quad .$$

c) $\ell_{o\varepsilon} \in H^{3/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})$

$$\|\ell_{o\varepsilon}\|^2_{H^{3/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})} = \sum_{|p|\leq r} \|(1+\rho^2)^{3/4} \mathcal{F}_x D^p \ell_{o\varepsilon}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$\leq \sum_{|p|\leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho^2)^{3/2} \varepsilon^2 \rho^2 \chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}) |\widehat{D^p\varphi_1}(\xi)|^2 d\xi$$

$$+ \sum_{|p|\leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho^2)^{3/2} \frac{\varepsilon^2(\rho^2+1)}{(1+\rho^2)} \chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}) |\widehat{D^p\varphi_2}(\xi)|^2 d\xi$$

et on majore $(\varepsilon\rho)^2 \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})$ par a^2 et donc $(\varepsilon \leq 1)$

$$\|\ell_{o\varepsilon}\|^2_{H^{3/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \sum_{|p|\leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho^2)^{3/2} |\widehat{D^p\varphi_1}(\xi)|^2 d\xi$$

$$+ C \sum_{|p|\leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho^2)^{1/2} |\widehat{D^p\varphi_2}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

d) $\ell_{1\varepsilon} \in H^{1/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})$

$$\|\ell_{1\varepsilon}\|^2_{H^{1/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})} = \sum_{|p|\leq r} \|(1+\rho^2)^{1/4} \mathcal{F}_x D^p \ell_{1\varepsilon}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$\leq \sum_{|p|\leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}) (1+\rho^2)^{1/2} \rho^2 |\widehat{D^p\varphi_1}(\xi)|^2 d\xi$$

$$+ \sum_{|p|\leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}) (1+\rho^2)^{1/2} |\widehat{D^p\varphi_1}(\xi)|^2 d\xi \quad .$$

Cette quantité est manifestement finie par hypothèse.

e) Evaluons la quantité (1.4.8) c'est-à-dire :

$$\|\ell_{1\varepsilon} - (\varphi_2(x) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0))\|^2_{H^{1/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq$$

$$\leq \sum_{|p|\leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}))^2 (1+\rho^2)^{1/2} \rho^2 |\widehat{D^p\varphi_1}(\xi)|^2 d\xi$$

$$+ \sum_{|p|\leq r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}))^2 (1+\rho^2)^{1/2} |\widehat{D^p\varphi_1}(\xi)|^2 d\xi \quad .$$

On peut alors introduire dans les intégrales ci-dessus $(\varepsilon\rho)^{\alpha}$ en tenant compte que $(1-\chi(\frac{\varepsilon\rho}{a}))^2\ (\varepsilon\rho)^{-\alpha} < (a)^{-\alpha}$, on obtient alors :

$$\|\ell_{1\varepsilon} - |\varphi_2(x) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)\|^2_{H^{1/2+r}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant$$

$$\leqslant C\,\varepsilon^{\alpha} \sum_{|p|\leqslant r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho^2)^{1/2}\ \rho^{2+\alpha}\ |\widehat{D^p\varphi_1}(\xi)|^2\ d\xi$$

$$+\ C\,\varepsilon^{\alpha} \sum_{|p|\leqslant r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho^2)^{1/2}\ \rho^{\alpha}\ |\widehat{D^p\varphi_1}(\xi)|^2\ d\xi$$

et donc on aura l'hypothèse (1.4.8) pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire

$$\varphi_1(x) \in H^{2+r}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) \in H^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad .$$

Bien que cet exemple ne satisfait pas exactement aux hypothèses du chapitre I. (Il faudrait au moins prendre un ouvert borné au lieu de $\mathbb{R}^n_+$), on peut voir que le calcul direct sur la forme explicite d'une solution permet d'avoir un correcteur en conservant les hypothèses initiales, mais ce correcteur n'est pas un correcteur au sens du chapitre I. Pour ce faire il faut prendre comme dans Lions [1] les dérivations normales c'est-à-dire en y pour définir une fonction dont on vérifie ensuite qu'elle satisfait aux conditions des correcteurs. Soit donc θ'_ε défini par :

$$(5.2.38)\quad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^2 \partial^4 \theta'_\varepsilon}{\partial y^4} - \dfrac{\partial^2 \theta'_\varepsilon}{\partial y^2} = 0 & y > 0 \\[2ex] \theta'_\varepsilon(x,0) = 0 & \\[2ex] \dfrac{\partial \theta'_\varepsilon}{\partial y}(x,0) = \varphi_2(x) - \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) & \end{cases}$$

On a alors la solution, si l'on prend celle qui décroit le plus rapidement possible à l'infini en y :

$$(5.2.39) \qquad \theta'_\varepsilon(x,y) = \varepsilon\,[\,\varphi_2(x) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)]\,(1 - e^{-y/\varepsilon}) \quad .$$

On retrouve ainsi une partie de $\theta'_\varepsilon(x,y)$ qui est justement $\theta_\varepsilon(x,y)$ **défini** en (5.2.23), l'autre partie étant tout simplement les premiers termes du **développement** en ε de $u_{11\varepsilon}(x,y) - u(x,y)$ et de $u_{21\varepsilon}(x,y)$ pris en $y = 0$. **En effet** :

$$u_{11\varepsilon} - u = \overline{\mathcal{F}}_\xi[\,(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}\ (\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho) - 1)\ e^{-\rho y}\,\hat{\varphi}_1(\xi)]\ (x) \ .$$

Or $\quad \sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}\ (\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2} + \varepsilon\rho) - 1 \ = \ \varepsilon\rho + O(\varepsilon\rho) \quad .$

Donc :

$$u_{11\varepsilon} - u = \overline{\mathcal{F}}_\xi\,(\varepsilon\,\rho\,e^{-\rho y}\,\hat{\varphi}_1(\xi))(x) + \overline{\mathcal{F}}_\xi\,(O(\varepsilon\rho)\ e^{-\rho y}\,\hat{\varphi}_1(\xi))\ (x)$$

et

$$u_{11\varepsilon}(x,0) - u(x,0) = \varepsilon\ \overline{\mathcal{F}}_x\,(\rho\,\hat{\varphi}_1(\xi))\ (x) = -\,\varepsilon\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) + O(\varepsilon) \ .$$

D'autre part :

$$u_{21\varepsilon}(x,y) = \varepsilon\,\overline{\mathcal{F}}[\,(\sqrt{1+(\varepsilon\rho)^2}) + \varepsilon\rho)\ e^{-\rho y}\,\hat{\varphi}_2(\xi)\ ]\,(x)$$

$$= \varepsilon\,\overline{\mathcal{F}}[\,(1 + O(\varepsilon\rho))\ e^{-\rho y}\,\hat{\varphi}_2(\xi)\ ]\,(x)$$

$$u_{21\varepsilon}(x,0) = \varepsilon\,\varphi_2(x) + O(\varepsilon) \quad .$$

Donc un correcteur défini comme en (5.2.39) ne corrige non seulement **les termes** frontières, mais aussi les termes intérieurs.

On peut alors vérifier les hypothèses du chapitre I pour $\theta'_\varepsilon(x,y)$. **En tenant** compte de (5.2.38) on a :

$$\begin{cases} \varepsilon^2\,\Delta^2\,\theta_\varepsilon - \Delta\theta_\varepsilon = \varepsilon^2\,G'_{\varepsilon 1} + \varepsilon G'_{\varepsilon 2} \\ \theta'_\varepsilon(x,0) \ = \ 0 \\ \dfrac{\partial\theta'_\varepsilon}{\partial y}(x,0) = \varphi_2(x) - \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) \end{cases}$$

où $\qquad G'_{\varepsilon 1} = \varepsilon\Delta_x^2(\varphi_2(x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0))\,(1 - e^{-y/\varepsilon})$

et $\qquad G'_{\varepsilon 2} = -\,\varepsilon\Delta_x(\varphi_2(x) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0))\,(1 - e^{-y/\varepsilon})$.

Et pour avoir les hypothèses du chapitre I sur $G'_{\varepsilon 1}$ et $G'_{\varepsilon 2}$, il faut déjà se limiter à y au voisinage de zéro par exemple $0 < y < 1$ et d'autre part imposer $\varphi_1(x) \in H^{2+r}(\mathbb{R}^{n-1})$ et $\varphi_2(x) \in H^{1+r}$. On est alors dans les hypothèses du théorème 1.4.1.

Par contre si l'on considère la solution approchée définie par Vishik et Ljusternik et repris par P. Fife [1] , on aura en se référant aux notations et définitions de ce dernier que le premier terme frontière $v_o(x)$ qu'il définit est donné : (lemme p. 107, P. Fife [1])

$$v_o(x,\zeta) \equiv \int_C \frac{g_{o1}(x,z)\,e^{\zeta z}}{z+1}\,dz$$

où $g_{o1}(x,z) = a_o(x)$ avec $a_o(x)\,C_{o2} = \psi_{o2}(x)$

et $C_{o2} = \int_C \frac{\Gamma_{2o}(z)dz}{(z+1)} = -\,2i\pi$

donc $\qquad a_o = \frac{1}{2i\pi}\,\psi_{2o} = -\,\frac{1}{2i\pi}\,(\varphi_2(x) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0))$.

D'où :

$$v_o(x,\zeta) \equiv \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) - \varphi_2(x)\right] e^{-\zeta} .$$

Et en tenant compte que $\zeta = \frac{y}{\varepsilon}$ et que le terme $v_k(x,y)$ est multiplié par ε dans le développement de $u_\varepsilon(x,y)$ donné par Vishik et Ljusternik, on retrouve exactement l'expression du correcteur donné en (5.2.23).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon, A. Douglis et L. Niremberg : Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I, Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), pp 623-727.

[1] P. C. Fife : Singulary perturbed elliptic boundary value problems.I Poisson Kernels and potential theory, Annali. Mat. Pura ed Appl. 1972, pp 99-147.

[1] W. Greenlee : Rate of convergence in singular perturbations, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 18 (1968), fasc. 2, pp 135-191.

[1] D. Huet : Décomposition spectrale et opérateurs, Presses Universitaires de de France.

[2] D. Huet : Perturbations singulières relatives au problème de Dirichlet dans un demi-espace, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Scienze Fisiche a Mathematiche, Série III, Vol. XVIII, fasc. IV (1964).

[1] J.L. Lions : Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal, Lectures notes in Mathematics, Springer-Verlag.

[1] J.L. Lions et E. Magénès : Problemi ai limiti non omogenei (I), Ann. Scu. Norm. Pisa, 14, 1960, pp 269-308.

[1] M. Schmitt : C.R. Acad. Sc. Paris, t. 284 (1977) p. 1271-1273.

Michel GUEUGNON
Université des Sciences Exactes
Université de METZ