

M. FLAMANT

**Une nouvelle caractérisation des anneaux de Prufer**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1977, tome 14, fascicule 4  
, p. 21-25

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1977\\_\\_14\\_4\\_21\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_4_21_0)

© Université de Lyon, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

UNE NOUVELLE CARACTERISATION DES ANNEAUX DE PRUFER

par M. FLAMANT

I. PRÉLIMINAIRES.

Soient  $A$  un anneau intègre,  $K$  son corps des fractions,  $S = A^*$  la partie multiplicative constituée par les éléments non nuls de  $A$ . Pour un  $A$ -module  $M$ , on désigne par  $\iota_M$  l'application  $A$ -linéaire de  $M$  dans  $K \otimes_A M$  définie par  $\iota_M(m) = 1 \otimes m$  pour tout  $m \in M$  (1).

PROPOSITION I.1. - Soient  $A$  un anneau intègre,  $K$  son corps des fractions,  $M$  un  $A$ -module et  $N$  un sous-module de  $M$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- a) Le sous-module  $N$  est saturé pour la partie multiplicative  $S$ .
- b) Le sous-module  $N$  est l'image réciproque par  $\iota_M$  du sous-espace vectoriel  $N_0 = K \otimes_A N$  du  $K$ -espace vectoriel  $K \otimes_A M$ .
- c) Le  $A$ -module quotient  $M/N$  est sans torsion.

a)  $\Rightarrow$  b). Montrons que  $\iota_M^{-1}(N_0) = N$ . Tout d'abord  $N \subset \iota_M^{-1}(N_0)$  car pour tout  $n \in N$  on a  $\iota_M(n) = 1 \otimes n \in K \otimes_A N$ . D'autre part  $\iota_M^{-1}(N_0) \subset N$ , en effet soit  $x \in \iota_M^{-1}(N_0)$ , il existe  $s \in S$  et  $n \in N$  tels que  $1 \otimes x = \frac{1}{s} \otimes n$  donc il existe  $s' \in S$  tel que  $s's.x = s'n$  donc  $s'sx \in N$  et comme  $N$  est saturé pour la partie multiplicative  $S$ ,  $x \in N$ .

b)  $\Rightarrow$  a). Montrons que le sous  $A$ -module  $N = \iota_M^{-1}(N_0)$  vérifie la propriété suivante :

$$s \in S, m \in M, sm \in N \implies m \in N$$

En effet :  $s \in S, m \in M, sm \in N \implies s \otimes m = 1 \otimes sm \in N_0$ , par suite  $\frac{1}{s}(s \otimes m) = 1 \otimes m \in N_0$  donc  $m \in N$ .

c)  $\Rightarrow$  a). Soient  $s \in S$  ;  $m \in M$  tels que  $sm \in N$ . Il vient alors :  
 $\overline{sm} = \overline{s}\overline{m} = 0 \Rightarrow \overline{m} = 0, m \in N$ .

a)  $\Rightarrow$  c). Soient  $m \in M/N$  ,  $s \in S$  tels que  $\overline{sm} = 0$ . Dans ces conditions  
 $\overline{sm} = \overline{s}\overline{m} = 0 \Rightarrow sm \in N$  donc  $m \in N$  et  $\overline{m} = 0$ .

DEFINITION I.1. - On dit qu'un anneau intègre  $A$  est un anneau de Prüfer s'il vérifie la propriété (P) suivante :

(P) : Tout  $A$ -module de type fini sans torsion est projectif.

Nous rappellerons sans démonstration le résultat classique suivant (2)

PROPOSITION I.2. - Pour un anneau intègre  $A$ , les propositions suivantes sont équivalentes :

- a) L'anneau  $A$  est un anneau de Prüfer.
- b) Tout idéal non nul de  $A$  engendré par deux éléments est inversible.

PROPOSITION I.3. - Pour un anneau intègre  $A$ , les propositions suivantes sont équivalentes :

- a) l'anneau  $A$  est un anneau de Prüfer
- b) Pour tout  $A$ -module de type fini  $M$ , l'image réciproque par  $\iota_M$  de tout sous-espace vectoriel du  $K$ -espace vectoriel  $K \otimes_A M$  est un facteur direct de  $M$ .
- c) Pour tout  $A$ -module de type fini sans torsion  $M$ , l'image réciproque par  $\iota_M$  de tout sous-espace vectoriel du  $K$ -espace vectoriel  $K \otimes_A M$  est un facteur direct de  $M$ .

a)  $\Rightarrow$  b). Soit  $N = \iota_M^{-1}(V)$  l'image réciproque par  $\iota_M$  d'un sous-espace vectoriel  $V$  du  $K$ -espace vectoriel  $K \otimes_A M$ . Le sous- $A$ -module  $N$  est saturé dans  $M$  pour la partie multiplicative  $S$  donc le  $A$ -module quotient  $M/N$  est sans torsion, étant de plus de type fini, il est projectif. La suite exacte  $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$  est scindée et  $N$  est un facteur direct de  $M$ .

b)  $\Rightarrow$  c). Evident.

c)  $\Rightarrow$  a). Soit  $P$  un  $A$ -module de type fini sans torsion, il s'écrit sous la forme  $M/N$  où  $M$  est un  $A$ -module libre et  $N$  un sous-module de  $M$ . Le sous- $A$ -module  $N$  est saturé dans  $M$  pour la partie multiplicative  $S$  donc il est facteur direct de  $M$ . La suite  $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$  est scindée donc  $P = M/N$  est un  $A$ -module projectif. L'anneau  $A$  est un anneau de Prüfer.

**DEFINITION I.2.** - On appelle plan hyperbolique sur un anneau  $A$  tout  $A$ -module projectif de rang 2 muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et qui est somme directe de deux sous-modules totalement isotropes.

**PROPOSITION I.4.** - Un plan hyperbolique sur un anneau de Prüfer ne possède que deux facteurs directs totalement isotropes et tout vecteur isotrope et tout vecteur isotrope non nul appartient à l'un d'eux.

Soit  $P$  un plan hyperbolique sur un anneau de Prüfer  $A$ , il existe des facteurs directs totalement isotropes  $M$  et  $N$  tels que  $P = M \oplus N$ . Soit  $u$  un élément isotrope non nul du  $A$ -module  $P$ ,  $s = 1 \otimes u$  est un vecteur isotrope non nul du  $K$ -espace vectoriel  $K \otimes_A P$  et par suite l'une des deux seules directions isotropes de cet espace hyperbolique. Si  $Kt$  désigne l'autre direction isotrope, alors  $P = \iota_P^{-1}(Ks) \oplus \iota_P^{-1}(Kt)$ .

## II. RÉSULTAT FONDAMENTAL.

**THEOREME FONDAMENTAL.** - Soit  $A$  un anneau intègre. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- a) L'anneau  $A$  est un anneau de Prüfer.
- b) Tout élément non nul du  $A$ -module  $M = A \rtimes A$  appartient à un facteur direct propre de  $M$ .
- c) Pour tout élément non nul  $u$  du  $A$ -module  $M = A \rtimes A$ , il existe sur  $M$  une structure de plan hyperbolique pour laquelle  $u$  est un vecteur isotrope.

Démontrons d'abord un lemme intéressant en lui-même.

LEMME. - Soient  $A$  un anneau intègre,  $M$  le  $A$ -module  $A \times A$ ,  $u=(x,y)$  un élément non nul de  $M$  et  $\mathcal{O} = Ax + Ay$  l'idéal de  $A$  engendré par  $x$  et  $y$ .

1) les propositions suivantes sont équivalentes :

a) L'idéal  $\mathcal{O}$  est inversible.

b) L'élément  $u$  appartient à un facteur direct propre du  $A$ -module  $M$ .

2) Si l'une des deux propositions précédentes est satisfaite et si  $N$  est un facteur direct de  $M$  contenant l'élément  $u$ , alors les  $A$ -modules  $M/N$ ,  $N^*$  et  $\mathcal{O}$  sont isomorphes.

1 -

a)  $\implies$  b) L'idéal  $\mathcal{O} = Ax + Ay$  étant inversible, il existe des éléments  $x'$  et  $y'$  de l'idéal fractionnaire  $\mathcal{O}^{-1}$  tels que :  $xx' + yy' = 1$ . Posons  $v=(y', -x')$  et considérons les sous-modules  $N$  et  $P$  de  $M$  respectivement définis par :

$N = M \cap Ku$ ,  $P = M \cap Kv$ . Pour tout élément  $(s,t)$  de  $M$ , le système :

$$\begin{cases} x\lambda + y'\mu = s \\ y\lambda - x'\mu = t \end{cases} \text{ admet une solution et une seule dans } K, \text{ soit } \begin{cases} \lambda = sx' + ty' \\ \mu = sy - tx \end{cases} .$$

Mais  $\lambda(x,y) \in N$  et  $\mu(y', -x') \in P$  par suite  $M = N \oplus P$ .

b)  $\implies$  a). Soit  $N$  un facteur direct propre du  $A$ -module  $M$  contenant l'élément  $u$ . En désignant par  $N_0$  le  $K$ -espace vectoriel  $K \otimes_A N$ , il vient  $N_0 = Ku$  et par suite  $N = M \cap Ku$ . L'homomorphisme  $\theta: N^* \rightarrow \mathcal{O}$  défini par  $\theta(f) = f(u)$  est alors bijectif, en effet :

- l'homomorphisme  $\theta$  est injectif ; supposons  $f(u) = 0$ , le sous-module  $N$  est l'ensemble des éléments  $n$  de  $M$  pour lesquels il existe  $s \in S$  tel que  $sn = \lambda u$ ,  $\lambda \in A$ . Il vient alors :

$$f(sn) = sf(n) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = 0.$$

$$f(n) = 0 \quad \forall n \in N \text{ d'où } f = 0.$$

- l'homomorphisme  $\theta$  est surjectif ; soit  $a = \alpha x + \beta y$  un élément de  $\mathcal{O}$ , la forme linéaire  $f$  sur  $M$  définie par  $f(1,0) = \alpha$ ,  $f(0,1) = \beta$  est telle que  $f(u) = f[x(1,0) + y(0,1)] = a$ . Il s'en suit que  $\theta \left[ \frac{f}{N} \right] = a$ .

Le  $A$ -module  $N^*$  étant projectif et de type fini,  $\alpha$  est un  $A$ -module possédant la même propriété et par suite l'idéal  $\alpha$  est inversible.

2 - Supposons que l'une des propriétés a) ou b) soit satisfaite et soit  $M=N\oplus P$  une décomposition de  $A$ -module  $M$  en somme directe de deux sous-modules dont l'un,  $N$ , contient  $u$ . Si  $x'$  et  $y'$  sont deux éléments de  $\alpha^{-1}$  tels que  $xx'+yy'=1$ , alors  $P$  est isomorphe au sous-module des éléments de la forme  $\mu(y', -x')$ ,  $\mu=sy-tx$ ,  $s, t \in A$ . L'application :  $\mu(y', -x') \mapsto \mu$  est un isomorphisme de  $P$  sur  $\alpha$ .

Revenons à la démonstration du théorème fondamental. Le lemme que nous venons d'étudier montre l'équivalence des assertions a) et b). La proposition I.4 montre que c)  $\implies$  b). Pour terminer il reste à voir que b)  $\implies$  c). Soit  $M=N\oplus P$  une décomposition de  $M$  en somme directe de deux sous-modules dont l'un,  $N$ , contient l'élément  $u$ . Il existe un isomorphisme  $k : P \longrightarrow N^*$ . Soit  $B$  la forme bilinéaire définie sur  $M \times M$  par :

$$B[(n, p), (n', p')] = B^N[(n, k(p)), (n', k(p'))] = k(p') \cdot n + k(p) \cdot n' . \quad (3)$$

Le  $A$ -module bilinéaire  $(M, B)$  est un plan hyperbolique pour lequel  $u$  est un vecteur isotrope.

#### BIBLIOGRAPHIE :

- [1] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, chap. 2, § 2, n° 4.
- [2] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, chap. 7
- [3] M. FLAMANT et L. HADDAD, Espaces hyperboliques, Bull. S.M.F. 97 (1969), p. 299-307.

M. FLAMANT  
 Département de Mathématiques  
 43, bd du 11 novembre 1918  
 69621 VILLEURBANNE