

RENÉ DUJOLS

**Le théorème de Karp-Myhill comme corollaire du théorème des mariages
Divers aspects de la « non-généralisation » du théorème de Karp-Myhill**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 2
, p. 29-39

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_2_29_0

© Université de Lyon, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE THEOREME DE KARP-MYHILL COMME COROLLAIRE
 DU THEOREME DES MARIAGES
 DIVERS ASPECTS DE LA "NON-GENERALISATION"
 DU THEOREME DE KARP-MYHILL

Par René DUJOLS

1. PRÉLIMINAIRES; - Les notations et définitions de récursivité (non définies ici) sont celles de l'ouvrage de H. Rogers cité en (4).
 \mathbb{N} représente l'ensemble des entiers naturels, n un entier naturel fixe ($n > 2$). $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ désigne un n -uple de fonctions injectives. On pose $[n] = \{1, \dots, n\}$ et $S = \bigcup_{i \in [n]} \alpha_i$. $\text{Dom}(\alpha_i)$, $\text{Im}(\alpha_i)$ désignent respectivement le domaine et l'image de α_i . Un isomorphisme partiel est une fonction (partielle) injective récursive de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , un isomorphisme est une permutation récursive de \mathbb{N} . $\vec{A} = (A_1, \dots, A_n)$ désigne un recouvrement en parties disjointes de $\text{Dom}(S)$, $\vec{B} = (B_1, \dots, B_n)$ désigne un recouvrement en parties disjointes de $\text{Im}(S)$.

DEFINITIONS. - On dira que (\vec{A}, \vec{B}) est un couple de compatibilité pour $\vec{\alpha}$ si on a : $\forall i \in [n], A_i = \alpha_i^{-1}(B_i)$.

- On dira qu'un n -uple $\vec{\alpha}$ d'isomorphismes partiels est uniformisable (respectivement fortement uniformisable) s'il existe une fonction injective α (respectivement un isomorphisme partiel α) vérifiant :

Pour tout couple de compatibilité (\vec{A}, \vec{B}) pour $\vec{\alpha}$ on a :

$$\forall i \in [n] \quad A_i = \alpha^{-1}(B_i).$$

On pose $X-Y = \{x/x \in X \text{ et } x \notin y\}$.

2. INTRODUCTION , - Le théorème de l'appendice de l'ouvrage cité en (1) dû à C. Karp et J. Myhill, peut être réécrit sous la forme un peu plus générale suivante :

THEOREME 1. (Karp-Myhill). - *Tout couple d'isomorphismes partiels admettant un couple de compatibilité est uniformément fortement uniformisable.*

Le théorème des mariages auquel nous nous référons est le suivant :

THEOREME 2 (Théorème des mariages). - *Soit $G \subset U \times V$ un graphe vérifiant $\text{Dom}(G) = U$ et, pour tout $x \in U$ $G(x)$ est fini. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) Il existe une injection $f : U \rightarrow V$ telle que $f \subset G$.*
- (ii) Pour toute partie finie X de U $\text{card}(X) \leq \text{card}(G(X))$.*

Une démonstration par le théorème de compacité de ce résultat est fournie en (5).

Dans une première partie nous montrons que l'existence de couples de compatibilité pour un n -uplet de fonctions injectives est un cas particulier du théorème des mariages, il en suivra que le théorème de Karp-Myhill apparaît comme un corollaire du théorème des mariages.

Dans une seconde partie nous dégageons trois aspects de la non-généralisation du théorème de Karp-Myhill au cas des n -uplets avec $n \geq 3$. Cette seconde partie est l'objet des publications citées en (2) et en (3). Nous montrons notamment qu'il existe des n -uplets (pour tout $n \geq 3$) d'isomorphismes partiels uniformisables et non fortement uniformisables.

3. THÉORÈME DES MARIAGES ET THÉORÈME DE KARP-MYHILL.

PROPOSITION 3. - *Soit $\vec{\alpha}$ un n -uplet de fonctions injectives. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) Il existe une fonction injective f telle que $f \subset S$ et $\text{dom}(f) = \text{dom}(S)$.*
- ii) Il existe une fonction injective g telle que $g \subset S$ et $\text{dom}(g) = \text{dom}(S)$*
et $\bigcap_{i \in [n]} \text{Im}(\alpha_i) \subset \text{Im}(g)$.

DEMONSTRATION. - Il suffit d'établir $i) \Rightarrow ii)$. Soit f une fonction injective vérifiant (i). Posons $R = \bigcap_{i \in [n]} \text{Im}(\alpha_i)$.
 et $R' = (\bigcap_{i \in [n]} \text{Im}(\alpha_i)) - \text{Im}(f)$

On peut supposer $R' \neq \emptyset$, sinon f répond à la question.

Pour tout $b \in R'$ on définit par récurrence la fonction \hat{b} par

$$\begin{aligned} \hat{b}(0) &= \alpha_1^{-1}(b) \\ \hat{b}(k+1) &= \begin{cases} \alpha_1^{-1}(f(\hat{b}(k))) & \text{si } f(\hat{b}(k)) \in R \\ \text{non défini} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \alpha_1(x) & \text{Si } \exists b \in R', \exists k \in \mathbb{N}, x = \hat{b}(k) \\ f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

g est une fonction répondant à la question.

COROLLAIRE 4. critère de compatibilité . - Soit $\vec{\alpha}$ un n -uple de fonctions injectives les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $\vec{\alpha}$ admet un couple de compatibilité.
- ii) Pour toute partie finie X de $\text{Dom}(S)$ $\text{card}(X) \leq \text{card}(S(X))$.

DEMONSTRATION. - Il suffit d'établir $ii) \Rightarrow i)$. De la proposition (3) et du théorème des mariages il résulte l'existence d'une fonction f vérifiant $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(S)$ et $f \subset S$ et $\bigcap_{i \in [n]} \text{Im}(\alpha_i) \subset \text{Im}(f)$.

Soit, pour $i \in [n]$, $A_i = \{x / f(x) = \alpha_i(x) \text{ et } \forall j (0 < j < i \Rightarrow x \notin A_j)\}$

Posons $i_0(x) = \text{Min} \{i \in [n] / x \notin \text{Im}(\alpha_i)\}$.

$$B_i^! = \{x \in \text{Im}(S) - \text{Im}(f) / i_0(x) = i\}$$

$$B_i = f(A_i) \cup B_i^!.$$

$((A_1, \dots, A_n), (B_1, \dots, B_n))$ est un couple de compatibilité pour $\vec{\alpha}$.

COROLLAIRE 5. (Théorème de Karp-Myhill). $\underline{=}$ *Tout couple d'isomorphismes partiels admettant un couple de compatibilité est uniformément fortement uniformisable.*

DEMONSTRATION. - Soit (α_1, α_2) un couple d'isomorphismes partiels admettant un couple de compatibilité.

Pour tout $x \in \text{Dom}(S)$ soit $L(x)$ l'ensemble des x' tels qu'il existe une suite finie x_0, \dots, x_p , sans répétition, vérifiant

$$i) \ x = x_0 \text{ et } x' = x_p$$

$$ii) \ \forall k < p \ \exists i, j \in [2] \ \alpha_i(x_k) = \alpha_j(x_{k+1}).$$

Les ensembles $L(x)$ sont des classes d'équivalence.

$L(x)$ et $S(L(x))$ sont des ensembles r.e.

Pour tout couple (\vec{A}, \vec{B}) de compatibilité pour $\vec{\alpha}$ on a :

$$\begin{aligned} \forall i \in [2] \quad x \in A_i &\Leftrightarrow L(x) \subset A_i \\ \text{et } \forall i \in [2] \quad x \in A_i &\Leftrightarrow S(L(x)) \subset B_i \end{aligned} \quad (1).$$

Pour établir ceci, il suffit de remarquer que l'on a : $\forall i \in [2], x \in A_i \Leftrightarrow S(x) \subset B_i$.

Soit x_0, \dots, x_q, \dots une énumération effective sans répétition de $\text{Dom}(S)$.

On définit par récurrence :

$\alpha(x_0)$ premier élément d'une énumération effective de $S(L(x_0))$

$\alpha(x_{q+1})$: premier élément d'une énumération effective de

$$S(L(x_{q+1})) - \{\alpha(x_0), \dots, \alpha(x_q)\}.$$

Montrons que, pour tout q , $\alpha(x_q)$ converge.

Soit $m < q$. Si $x_m \notin L(x_q)$ on a $\alpha(x_m) \notin S(L(x_q))$.

Soit $X = \{x_m / m < q \text{ et } x_m \in L(x_q)\}$.

$X \cup \{x_q\} \subset L(x_q)$. En raison du critère de compatibilité on a $\text{card}(S(L(x_q))) > \text{card}(X \cup \{x_q\}) > \text{card}(\alpha(X))$.

Donc $S(L(x_q)) - \{\alpha(x_0), \dots, \alpha(x_{q-1})\} \neq \emptyset$ et $\alpha(x_q)$ converge.

α est injective par construction, α est récursive car $\text{Dom}(S)$ et les $S(L(x))$ sont r.e. α est obtenu uniformément à partir de $\vec{\alpha}$. α uniformise $\vec{\alpha}$ en raison de (1).

4. DIVERS ASPECTS DE LA "NON-GÉNÉRALISATION" DU THÉORÈME DE KARP-MYHILL.

Soit f un isomorphisme partiel, on rappelle

$$A \cong B \text{ via } f \iff f(A) = B.$$

et $A \cong B$ si et seulement si $A \cong B$ via au moins un isomorphisme.

PROPOSITION 6. - Il existe des isomorphismes f_1, f_2 et des ensembles $A_1, A_2,$

B_1, B_2 vérifiant

$$1^\circ) A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset \text{ et } A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$$

$$2^\circ) \forall i \in [2], A_i \cong B_i \text{ via } f_i.$$

$$3^\circ) \text{ Pour aucun isomorphisme partiel } h \text{ on a } \forall i \in [2], A_i \cong B_i \text{ via } h.$$

DEMONSTRATION. - Soit f_1, f_2 des isomorphismes vérifiant $f_1(2\mathbb{N}) = 4\mathbb{N}+1$,
 $f_1(4\mathbb{N}+1) = 4\mathbb{N}+3$, $f_2(2\mathbb{N}) = 4\mathbb{N}$ et $f_2(4\mathbb{N}+3) = 4\mathbb{N}+2$. Soit h_1, h_2, \dots une énumé-
 ration de tous les isomorphismes h partiels vérifiant $h(2\mathbb{N}) \cap (4\mathbb{N})$ est infini.

On construit par récurrence une suite infinie a_0, a_1, \dots ,

Etape 0 : $a_0 = 0$.

$$\text{Soit } U_n = h_n^{-1}(h_n(2\mathbb{N}) \cap 4\mathbb{N}).$$

$$\text{Etape } n+1 : a_{n+1} = \mu x [x \in U_{n+1} - \{0, \dots, a_n + 2\}].$$

$$\text{Soit } A_1 = \{a_0, \dots, a_n, \dots\} \cup (4\mathbb{N}+3) \quad A_2 = \mathbb{N} - A_1.$$

$$B_1 = f_1(A_1) \quad B_2 = f_2(A_2).$$

On a $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et $A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$ et $A_2 \cap 2\mathbb{N}$ est infini.

$$B_1 \subset (4\mathbb{N}+1) \cup (4\mathbb{N}+3) \text{ et } B_2 \subset 4\mathbb{N} \cup (4\mathbb{N}+2) - \text{ donc } B_1 \cap B_2 = \emptyset.$$

Supposons que h est un isomorphisme tel que $\forall i \in [2], h(A_i) = B_i$.

On a $f_2(A_2 \cap 2\mathbb{N}) \subset h(2\mathbb{N}) \cap (4\mathbb{N})$, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $h_k = h$. Par suite
 $h(a_k) = h_k(a_k)$ et $h(a_k) \in 4\mathbb{N}$ ce qui contredit $h(A_1) = B_1$. Ce qui achève la
 démonstration de la proposition.

COROLLAIRE. 7. - Il existe \aleph_0 couples d'isomorphismes (f_1, f_2) tels que
 pour chaque couple (f_1, f_2) il existe 2^{\aleph_0} couples d'ensembles (A_1, A_2) et
 (B_1, B_2) et satisfaisant aux conditions i), ii) et iii) de la proposition 6.

PROPOSITION 8. - Il existe des partitions $(A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3)$ de \mathbb{N} telles que :

i) $\forall i \in [3], A_i \cong B_i.$

ii) Pour aucun isomorphisme h on a $\forall i \in [3], A_i \cong B_i$ via $h.$

DEMONSTRATION. - Soit f_1, f_2, f_3 les isomorphismes définis par

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \notin 4\mathbb{N}+3 \\ x-3 & \text{si } x \in 4\mathbb{N}+3. \end{cases}$$

$$f_2(x) = x.$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \notin 4\mathbb{N} \\ x+3 & \text{si } x \in 4\mathbb{N}. \end{cases} \quad f_3 \text{ est la réciproque de } f_1.$$

On dira : $f \neq h$ un peu partout si $\{x/f(x) \neq h(x)\}$ est infini.

Soit k_0, k_1, \dots une énumération de tous les isomorphismes k vérifiant $k \neq f_1$ un peu partout.

Soit l_0, l_1, \dots une énumération de tous les isomorphismes l vérifiant $l \neq f_3$ un peu partout.

Par récurrence nous construisons trois chaînes croissantes d'ensembles finis $X_0 \subset X_1 \dots, Y_0 \subset Y_1 \dots, Z_0 \subset Z_1 \dots$ telles que pour tout n

$$U_n = X_n \cup Y_n \cup Z_n = f_1(X_n) \cup f_2(Y_n) \cup f_3(Z_n).$$

Etape 0 : $X_0 = Y_0 = Z_0 = \emptyset.$

Etape $2s+1$: Il existe $a \notin U_{2s}$ tel que $k_s(a) \neq f_1(a)$ et $k_s(a) \notin Z_{2s}$

On pose $X_{2s+1} = X_{2s} \cup \{a\}$

$$Z_{2s+1} = \begin{cases} Z_{2s} \cup \{a+1\} & \text{si } a \notin 4\mathbb{N}+3. \\ Z_{2s} \cup \{a-3\} & \text{si } a \in 4\mathbb{N}+3. \end{cases} \quad \text{On a } Z_{2s+1} = f_1(X_{2s+1})$$

Soit $u = \text{Max.}\{4i+3/4_i \leq a \leq 4_{i+3} \text{ ou } 4_i \leq k_s(a) \leq 4_{i+3}\}$

$$Y_{2s+1} = \{0, \dots, u\} - (X_{2s+1} \cup Z_{2s+1}). \quad \text{On a } k(a) \in X_{2s+1} \cup Y_{2s+1}.$$

Etape $2s+2$. Il existe $c \notin U_{2s+1}$ tel que $l_s(c) \neq f_3(c)$ et $l_z(c) \notin X_{2s+1}$

On pose $Z_{2s+2} = Z_{2s+1} \cup \{c\}$

$$X_{2s+2} = \begin{cases} X_{2s+1} \cup \{c-1\} & \text{si } c \notin 4\mathbb{N} \\ X_{2s+1} \cup \{c+3\} & \text{si } c \in 4\mathbb{N} \end{cases} \quad . \text{ On a } X_{2s+2} = f_3(Z_{2s+2}).$$

Soit $v = \text{Max}\{4i+3/4i \leq c \leq 4i+3 \text{ ou } 4i \leq l_s(c) \leq 4i+3\}$

$$Y_{2s+2} = \{0, \dots, v\} - (X_{2s+2} \cup Z_{2s+2}) \quad . \text{ On a } l_s(c) \in Y_{2s+2} \cup Z_{2s+2} \quad .$$

Soit $A_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, $A_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$, $A_3 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$.

$$B_1 = f_1(A_1), \quad B_2 = f_2(A_2), \quad B_3 = f_3(A_3)$$

(A_1, A_2, A_3) est une partition de \mathbb{N} et U_n est un segment initial de \mathbb{N} .

Par récurrence sur n on vérifie :

- i) les ensembles $f_1(X_n)$, $f_2(Y_n)$, $f_3(Z_n)$ sont disjoints deux à deux.
- ii) $U_n = f_1(X_n) \cup f_2(Y_n) \cup f_3(Z_n)$.

Par suite (B_1, B_2, B_3) est une partition de \mathbb{N} .

Supposons que h est un isomorphisme vérifiant

$$\forall i \in [3], \quad h(A_i) = B_i.$$

1°) Si $h \neq f_1$ un peu partout, $h = k_s$ pour un entier s . A l'étape $2s+1$, la récurrence introduit un élément a vérifiant :

$$a \in A_1 \text{ et } k_s(a) \notin B_1 \quad . \text{ Ce qui contredit } h(A_1) = B_1.$$

2°) Sinon $h \neq f_3$ un peu partout, car $f_1 \neq f_3$ un peu partout. Alors $h = l_s$ pour un $s \in \mathbb{N}$. A l'étape $2s+2$, la récurrence introduit un élément c vérifiant :

$$c \in A_3 \text{ et } l_s(c) \notin B_3 \quad . \text{ Ce qui contredit } h(A_3) = B_3.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

La proposition précédente se généralise clairement au cas des n -uples avec $n \geq 3$.

COROLLAIRE 9. - Pour tout $n \geq 3$, il existe χ_0 n-uples d'isomorphismes (f_1, \dots, f_n) tels que pour chaque n-uple (f_1, \dots, f_n) il existe 2^{χ_0} partitions (A_1, \dots, A_n) et (B_1, \dots, B_n) de \mathbb{N} vérifiant :

- i) $\forall i \in [n] \quad A_i \cong B_i$ via f_i .
- ii) Pour aucun isomorphisme h on a : $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad A_i \cong B_i$ via h .

THEOREME 10. - Pour tout $n \geq 3$ il existe un n-uple d'isomorphismes partiels uniformisable et non fortement uniformisable.

DEMONSTRATION. - Nous avons ici une démonstration pour $n = 3$ qui se généralise clairement au cas $n \geq 3$.

Soit $\varphi_0, \dots, \varphi_x, \dots$ une énumération de Gödel des fonctions partielles récursives. Considérons les ensembles r e définis par :

$$U_i = \{4x/\varphi_x(x+1) \text{ converge ou } \varphi_x(0) = i-1\} \quad (\text{avec } i \in [3]).$$

$$\text{Posons } U = \{4x/\varphi_x(x+1) \text{ converge}\} \text{ et } 4\mathbb{N} = \{4x/x \in \mathbb{N}\}.$$

$$\text{On a i) } U_1 \cup U_2 \cup U_3 = 4\mathbb{N}$$

$$\text{ii) } U_1 \cap U_2 = U_2 \cap U_3 = U_3 \cap U_1 = U_1 \cap U_2 \cap U_3 = U.$$

$$\text{iii) } U_1 - (U_2 \cup U_3) = U_1 - U, \quad U_2 - (U_3 \cup U_1) = U_2 - U, \quad U_3 - (U_1 \cup U_2) = U_3 - U.$$

Considérons l'ensemble créatif $K = \{x/\varphi_x(x) \text{ converge}\}$.

Pour $i \in [3]$ soit f_i la fonction récursive définie par

$$\varphi_{f_i(x)}(0) = \begin{cases} i-1 & \text{Si } \varphi_x(x) \text{ ne converge pas en } x \text{ étapes} \\ \text{diverge} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\varphi_{f_i(x)}(y+1) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{si } x \in K \\ \text{diverge} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème de Karp-Myhill comme corollaire ...

On a $K \xleftarrow{m} N - (U_i - U)$ via $4f_i$ (1).

En effet, si $x \in K$, $\varphi_{f_i(x)}(f_i(x)+1) = \varphi_x(x)$ et par suite

$\varphi_{f_i(x)}(f_i(x)+1)$ converge ou $\varphi_{f_i(x)}(0) \neq (-1$ et $4f_i(x) \notin U_i - U$.

Si $x \notin K$, $\varphi_{f_i(x)}(0) = i-1$ et $\varphi_{f_i(x)}(f_i(x)+1)$ diverge donc $4f_i(x) \in U_i - U$.

De (1) il résulte les ensembles $U_i - U$ sont productifs, donc non r.e. .

Pour $i \in [3]$ on définit :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i(4x) = 4x+i \text{ si } 4x \in U_i \\ \alpha_1(4x+i) = 4x \\ \alpha_1(4x+3) = 4x+3 \\ \alpha_2(4x+1) = 4x+1 \\ \alpha_3(4x+2) = 4x+2 \end{array} \right\} \text{ si } 4x \in U$$

$\alpha(x)$ diverge si l'on n'est pas dans un des cas ci-dessus.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des isomorphismes partiels.

Soit $A'_1 = U_1 \cup (U+1) \cup (U+3)$, $A'_2 = U_2 - U$, $A'_3 = (U_3 - U) \cup (U+2)$ où $U+i = \{x+i/x \in U\}$.

$B'_i = \alpha_i(A'_i)$.

On a : (A'_1, A'_2, A'_3) est un recouvrement en parties disjointes de $\text{Dom}(S)$.

(B'_1, B'_2, B'_3) est un recouvrement en parties disjointes de $\text{Im}(S)$.

De plus $A'_i = \alpha_i^{-1}(B'_i)$.

Les recouvrements en parties disjointes (A_1, A_2, A_3) de $\text{Dom}(S)$ et (B_1, B_2, B_3) de $\text{Im}(S)$ sont caractérisés par

- (1) $\forall i \in [3] U_i - U \subset A_i$ et $\{4x+i/4x \in U_i - U\} \subset B_i$
- (2) Pour tout $x \in U$ et pour tout $i \in [3]$ les conditions suivantes sont équivalentes

- . $4x \in A_i$
- . $4x \in B_i$
- . $4x+i \in A_i$
- . $4x+i \in B_i$
- . $\forall j \in [3] - \{i\}, 4x+j \notin A_j$
- . $\forall j \in [3] - \{i\}, 4x+j \notin B_j$

(1) résulte de ce que pour tout $i \in [3]$ $U_i - U \subset \text{Dom}(\alpha_i)$ et pour tout $j \in [3] - \{i\}$ $(U_i - U) \cap \text{Dom}(\alpha_j) = \emptyset$.

(2) résulte de la construction de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ pour $4x \in U$.

Soit α' la fonction définie par

$$\forall k \in \{0, 1, 2, 3\}, \alpha'(4x+k) = 4x+k \text{ si } 4x \in U$$

$$\text{et } \alpha'(4x) = 4x+i \text{ si } \exists i \in [3] \ 4x \in U_i - U$$

α' est une fonction injective vérifiant :

- i) $\alpha'(U_i - U) = \alpha_i(U_i - U)$.
- ii) $\alpha'(U+k) = U+k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

De (1) et (2) il résulte que α' est une fonction qui uniformise $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.
On a donc $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est un n-uple uniformisable.

En raison de (1) et (2) les fonctions injectives α uniformisant $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont les fonctions injectives vérifiant :

$$(S) \quad \begin{cases} \text{i) } \forall i \in [3], \alpha(U_i - U) = \alpha_i(U_i - U) \\ \text{ii) } \forall k \in \{0, 1, 2, 3\}, \alpha(4x+k) = 4x+k \text{ si } 4x \in U \end{cases}$$

$$\text{On a } 4x \in U_1 - U \Rightarrow \alpha(4x) \in 4N+1$$

$$4x \in U \Rightarrow \alpha(4x) \in 4N.$$

$$\text{D'où } 4x \in U_1 - U \iff \alpha(4x) \in 4N+1.$$

Par suite si α est une fonction récursive, $U_1 - U$ est un ensemble r.e.

Ce qui contredit la construction de $U_1 - U$.

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ n'est donc pas fortement uniformisable.

COROLLAIRE 11. - Pour tout $n \geq 3$, il y a \aleph_0 n-uples d'isomorphismes partiels uniformisables et non fortement uniformisables admettant chacun 2^{\aleph_0} fonctions d'uniformisation.

BIBLIOGRAPHIE. -

- (1) J.C.E. DEKKER et J. MYHILL, *Recursive Equivalence types*. University of California, Publications in Mathematics, n.s., 3, 1960, p. 76-213.
- (2) R. DUJOLS, *Le résultat de Karp-Myhill est en un sens le meilleur possible*, Contribution libre au Séminaire international et Congrès international de Logique. Clermont-Ferrand 1975. N° 60 F.13 aux Annales Scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand. 1976.
- (3) R. DUJOLS, *Quelques remarques sur le théorème de Karp-Myhill*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1976. 282.
- (4) H. ROGERS, Jr., *Theory of Recursive functions and effective computability*, Mc Graw-Hill Book Company, 1967.
- (5) J.L. BELL et A.B. SLOMSON, *Models and ultra products*, North Holland Publishing Company p. 47-48, 1969.