MAURICE POUZET

Quelques remarques sur les résultats de Tutte concernant le problème de Ulam

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 2 , p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_2_1_0>

PUBLICATIONS DU
DEPARTEMENT DE
MATHEMATIQUES
LYON 1977 t. 14-2

QUELQUES REMARQUES SUR LES RESULTATS DE TUTTE CONCERNANT LE PROBLEME DE ULAM

par Maurice POUZET

RESUME. Nous simplifions les techniques de dénombrement utilisées par Tutte, en utilisant essentiellement celles de Kelly. Nous prouvons directement que *si* A *et* A' *sont deux matrices d'ordre* n $(n \geq 3)$ *symétriques et à coefficients dans une algèbre* (*sur* Q) *commutative et unitaire, telles que pour chaque* i $(i=1\ldots n)$ *les matrices* A_{ii} *et* A'_{ii} *(obtenues par suppression de la ligne et colonne* i*) se déduisent l'une de l'autre par une matrice de permutation alors les matrices* A *et* A' *ont même déterminant.*

I - LA METHODE DE DENOMBREMENT DE KELLY.

I-1. Considérations élémentaires.

Soit E un ensemble fini à n éléments. Pour chaque entier p, $p < n$, on a, dans le Q-espace vectoriel engendré par l'ensemble $[E]^p$ des parties P à p éléments de E, l'identité $\sum_{P \in [E]^p} P = \frac{1}{n-p} \sum_{x \in E} \sum_{P \in [E-\{x\}]^p}$.

De ce fait trivial résulte ceci :

I-1. a) *Si* F *est un ensemble fini,* φ *une application de* F *dans un* Q-*espace vectoriel* A *et* r_g *une application de* F *dans* $\mathcal{P}(E)-\{E\}$ *alors la quantité* $\sum_{f \in F} \varphi(f)$, *qui vaut* $\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{r_g f \in [E]^p} \varphi(f)$, *est connue lorsque pour chaque entier* p *la suite* $\left(\sum_{r_g f \in |E-\{x\}|^p} \varphi(f) \right)_{x \in E}$ *est connue à une permutation près.* Dans ce cas nous dirons que cette quantité est *reconstructible.*

Plus généralement considérons q ensembles finis F_i, avec $q \geq 2$, et q applications φ_i de F_i dans une algèbre commutative A (par exemple l'algèbre engendrée par les parties de E) et q applications r_{g_i} de F_i dans $\mathcal{P}(E)-\{E\}$. En développant le produit $\prod_{i=1}^{q} \left(\sum_{f_i \in F_i} \varphi_i(f_i) \right)$ on constate ceci :

I-1. b) *Si les* $\sum_{f_i \in F_i} \varphi_i(f_i)$, *pour* $i=1\ldots q$, *et* $\sum_{(f_1 \ldots f_q) \in \Pi F_i} \prod_{i=1}^{q} \varphi_i(f_i) / \cup r_{g_i} f_i \neq E$

sont reconstructibles alors $\sum_{(f_1 \ldots f_q)/ \cup r_{g_i} f_i = E} \prod_{i=1}^{q} \varphi_i(f_i)$ *est connu.*

I-2. Applications.

I-2.1. Etant donné un graphe G nous notons $V(G)$ l'ensemble de ses sommets et $E(G)$ l'ensemble de ses arêtes. Etant donné un sommet v de G nous notons G_v le sous-graphe de G obtenu en supprimant le sommet v ainsi que les arêtes incidentes à v. Suivant [1] nous appelons *reconstruction* de G tout graphe H ayant mêmes sommets que G et tels que les graphes G_v et H_v soient isomorphes pour tout v. Nous disons que G est *reconstructible* lorsque toute reconstruction de G lui est isomorphe. Nous disons qu'une fonction définie sur la classe des graphes (ou une sous-classe) est *reconstructible* lorsque pour tout graphe elle prend la même valeur sur les reconstructions de ce graphe. Les autres termes non définis ici sont ceux de [1].

I-2.1. a) PROPOSITION. *Soient* n, p, q *trois entiers avec* $p \leq n$, q *classes* $\mathcal{G}_1, \ldots \mathcal{G}_q$ *de graphes ayant moins de* n *sommets, chaque* $\mathcal{G}_i$ *étant stable par isomorphie (i.e. contenant tout graphe isomorphe à un élément de* $\mathcal{G}_i$*). Pour tout graphe* G *à* n *sommets le nombre de suites* $(G_1 \ldots G_q)$ *telles que* $G_i \in \mathcal{G}_i$, $V(G_i) \subseteq V(G)$, $E(G_i) \subseteq E(G)$, $\left| \bigcup_{i=1}^{q} V(G_i) \right| = p$, *est reconstructible.*

PREUVE. Soient $E = V(G)$, F_i l'ensemble des G_i tels que $G_i \in \mathcal{G}_i$ et $V(G_i) \subseteq$

r_{g_i} l'application qui à G_i associe $V(G_i)$ et φ_i l'application qui à G_i associe 1 si $E(G_i) \subseteq E(G)$ et 0 sinon. Si $p < n$ alors la reconstruction du nombre de suites $(G_1 \ldots G_q)$ résulte directement de I-2.a). Si $p=n$ elle résulte de la reconstruction pour tous les $p' < n$ et de I-2.b).

I-2.1. b) <u>Cas particulier important</u>.

1) Chaque $\mathcal{G}_i$ est la classe des graphes isomorphes à un graphe Γ_i

2) Pour tout graphe G à n sommets qui est réunion d'au moins une suite $G_1 \ldots G_q$ avec $G_i \in \mathcal{G}_i$, le nombre de telles suites dont la réunion est G est indépendant de G.

Sous ces conditions, pour chaque graphe G' à n sommets, le nombre de sous-graphes G de G' tels que $G = \cup G_i$ avec $G_i \in \mathcal{G}_i$ est reconstructible.

La condition (2) est remplie lorsque la donnée d'un graphe G réunion d'une suite G_i détermine l'ensemble des G_i.

<u>EXEMPLE</u>. Si chaque Γ_i est un graphe connexe (*) à r_i sommets, respectivement un block à r_i+1 sommets, et si $\Sigma\, r_i = n$, respectivement $(\Sigma\, r_i)+1=n$, alors pour tout graphe G' à n sommets le nombre de sous-graphes disconnexes, respectivement non séparables, de G' ayant n sommets et dont les composantes connexes, respectivement les blocs, sont isomorphes aux Γ_i est reconstructible.

Ceci constitue les propositions 6.7 et 6.8 p.27,28 de Tutte.

(*)
Un graphe G est connexe lorsque deux sommets quelconques sont liés par un chemin il est non séparable lorsque chaque sous-graphe G_v est connexe : ses composantes connexes sont ses sous-graphes connexes maximaux, ses blocs sont ses sous-graphes non séparables maximaux.

I-2.2. Tout ceci reste encore valable en considérant par exemple des **relations** d'arité quelconque. En particulier le fait que les graphes considérés **ci-dessus soi** simples ou non, orientés ou non, n'est d'aucune importance. Mais alors **que la propo**tion 6.7. de Tutte suffit à redonner la solution positive du problè**me de Ulam** pour les graphes non connexes, nous ignorons si formulée pour les digraph**es elle pe**met de retrouver la "reconnaissance"* des digraphes non disconnexes (obten**ue par** B.Manvel 1975). Plus fortement nous ignorons si ces derniers sont recons**tructibles**.

Donnons deux applications formulées dans la terminologie des **matrices, e** considérant comme reconstruction d'une matrice A d'ordre n toute **matrice A'** d'ordre n telle que pour chaque i les matrices A_{ii} et A'_{ii} (obtenues **par** suppression de la ligne et colonne i) se déduisent l'une de l'autre par **une même** permutation des lignes et colonnes (i.e. $A'_{ii} = P_i^{-1} A_{ii} P_i$ par une **matrice de** permutation P_i).

I-2.2. a) *Si* A *est une matrice d'ordre* n *alors la somme* $\sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, *où* σ *décrit les permutations* σ *se décomposant en* q *cycles* $(q > 1)$ *de longueurs* $n_1 \dots n_q$, *est reconstructible.*

<u>PREUVE</u>. Prendre $E = 1,2 \dots n$, puis $F_{i\, n_i}$ égal à l'ensemble des permutations σ_i n_i éléments quelconques de E, $\varphi_i(\sigma_i) = \prod_{j=1}^{n_i} a_{j,\sigma_i(j)}$ et $r_{g_i}(\sigma_i)$ égal au dernier

I-2.2. b) Plus généralement, mais en supposant A symétrique d'ordre n, si Γ_i pour $i=1\dots q$, $q > 1$ est un graphe connexe à r_i sommets avec $\sum_{i=1}^{q} r_i = n$ (respectivement un bloc à r_i+1 sommets avec $(\sum_{i=1}^{q} r_i)+1=n$) alors la somme $\sum_{G} \prod_{u \in E(G)} a_u$ où G décrit l'ensemble des graphes sur $1,2\dots n$ qui s'écrivent $G = \bigcup_{i=1}^{q} G_i$ avec G_i isomorphe à Γ_i, est reconstructible.

---

* Une classe G de graphes, ou ici de digraphes, est "reconnaissable" lorsque toute reconstruction d'un élément de G est G.

II - UNE RELATION ENTRE LES NOMBRES DE CYCLES D'UNE MATRICE SYMETRIQUE.

II-1. Reprenons comme suit la méthode de Tutte ; soit E un ensemble fini à e éléments ; f une application de E dans une algèbre commutative et unitaire A et soit π_f l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans A définie somme suit : $\pi_f(\emptyset) = 1$ et $\pi_f(X) = \prod_{x \in X} f(x)$. Soit r une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant seulement $r(X) \leq |X|$ et soit $P_{f,r}(t,z)$ le polynôme $\sum_{X \subseteq E} \pi_f(X)\, t^{r(X)}\, z^{|X|-r(X)}$. On a :

$$P_f(t,t) = \sum_{X \subseteq E} \pi_f(X)\, t^{|X|} = \sum_{m=0}^{e} \sum_{|X|=m} \pi_f(X)\, t^m = \prod_{x \in X} (f(x)+t) = \prod_{y \in \mathrm{Im} f} (y+t)^{|f^{-1}(y)|}.$$

Ce polynôme est donc connu dès que sont connus Imf et la suite $(|f^{-1}(y)|)_{y \in \mathrm{Imf}}$. Ceux-ci étant supposés connus *alors* $P_{f,r}$ *est connu dès que sont connus les coefficient de* $t^k z^{m-k}$ *pour* $k > 1$ (procéder comme Tutte, page 31, proposition 7.3. :

$$P_{f,r}(t,z) = R_1(t,z) + \sum_{m=0}^{e} b_m\, tz^{m-1} \quad \text{donc} \quad \sum_{m=0}^{e} b_m\, t^m = P_{f,r}(t,t) - R_1(t,t)$$

comme les deux polynômes du membre de droite sont connus, celui de gauche et donc les b_m sont connus).

II-2.

II-2. a) PROPOSITION. *Soit* A *une matrice d'ordre* n, *avec* $n \geq 3$ *symétrique, à coefficients dans une algèbre commutative et unitaire. Alors* $\sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ *où* σ *parcourt toutes les permutations cycliques sur* n *éléments (le "nombre" de cycles hamiltoniens de* A) *est reconstructible.*

PREUVE. Prendre pour E l'ensemble $[E]^2$ des parties à deux éléments de $E=\{1,2...n\}$ pour f l'application qui à $\{i,j\}$ associe a_{ij}, pour r l'application qui à X considéré comme graphe associe le nombre de ses blocs. Voyons que le coefficient de $t^k z^{m-k}$ est reconstructible : ce coefficient se décompose en :

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{|X|=m,\ r(X)=k,\ |V(X)|=p} \pi_f(X)$$

. Chaque terme de la somme pour $p < n$ est reconstructible d'après le lemme de Kelly. Pour $p=n$ le terme correspondant se décompose en :

$$\sum_{q=1}^{m} \quad \sum_{|X|=m,\ r(X)=k,\ |V(X)|=n\ C(V(X))=q} \pi_f(X)$$

dans laquelle $C(V(X))$ est le nombre de composantes connexes de $V(X)$. D'après I-2.2.b) tous les termes pour $q > 1$ sont reconstructibles et si $k > 1$ alors le terme pour $q=1$ est reconstructible. Donc pour $k > 1$ le coefficient de $t^k z^{m-k}$ reconstructible. Or puisque $n \geqslant 3$, Imf et la suite $(|f^{-1}(y)|)_{y \in \mathrm{Imf}}$ sont recuetructibles (ceci via le lemme de Kelly). Donc compte tenu de II-1 le coefficient de tz^{m-1} est reconstructible. Avec ce que l'on vient de voir il en résulte que le terme pour $k=1$, $q=1$ figurant dans la somme ci-dessus, i.e. le terme $\Sigma\,\{\pi_f(X)\ /\ |X|=m,\ V(X)=n,\ r(X)=1,\ C(V(X))=1\}$ est reconstructible. Pour $m=n$ le graphe X définit une permutation cyclique sur n éléments, donc dans ce cas ce terme est à un facteur près (égal à 1/2) la somme cherchée.

II-2.2. c) <u>COROLLAIRE</u>. *Le déterminant de* $A+\lambda I$, *i.e. le polynôme caractéristique de* A, *et plus généralement le déterminant de* $A+\lambda I + \mu U$, *où* U *est la matrice ne comportant que des* 1, *sont reconstructibles.*

II-2.2. d) <u>COROLLAIRE</u>. *Le nombre de chemins hamiltoniens de* A, $\sum_C \prod_{u \in C} a_u$ *où* C *décrit tous les chemins de longueur* n *sur* $1,2\ldots n$, *est reconstructibles.*

<u>PREUVE</u>. Calculer le nombre de cycles hamiltoniens de $A+U$ et utiliser II-2.2.c) et le lemme de Kelly.

<u>REMARQUE</u> : W.Tutte a d'abord obtenu la reconstruction du déterminant pour des mots ces formées de 0 et 1 et l'a étendue aux matrices ayant des coefficients entiers Naturellement cela suffit pour l'étendre à des matrices à coefficients quelconque

III - RAPPORT AVEC UNE VERSION GEOMETRICO-ALGEBRIQUE DU PROBLEME DE RECONSTRUCTION.

En toute généralité le problème de reconstruction des matrices peut se formuler ainsi :

Etant données deux matrices *symétriques* A et A' d'ordre $n \geqslant 3$ y-a-t-il équivalence entre :

(i) A et A' se déduisent l'une de l'autre par une permutation

(ii) il existe une permutation σ de $1,2\ldots n$ telle que pour chaque i, A_{ii} et $A'_{\sigma(i)\sigma(i)}$ se déduisent l'une de l'autre par une permutation.

Pour des matrices à coefficients réels ceci équivaut au problème suivant :

Etant donnés deux ensembles S et S' de n points $(n \geqslant 3)$ d'un espace euclidien V, y-a-til équivalence entre :

(i') S et S' se déduisent l'une de l'autre par une isométrie linéaire

(i'i') il existe une bijection σ de S sur S' telle que pour chaque X de S les ensembles $S-\{X\}$ et $S'-\{\sigma(X)\}$ se déduisent l'une de l'autre par une isométrie linéaire.

__PREUVE__. Partant de A et A' prendre λ assez grand pour que $A+\lambda I$ et $A'+\lambda I$ soient respectivement les matrices des produits scalaires de n vecteurs $X_1 \ldots X_n$, et $X'_1 \ldots X'_n$. Le reste est évident.

Cela équivaut encore à reconstruire les matrices ayant même coefficient sur la diagonale principale. (Remplacer A par une matrice dont les coefficients sont algébriquement indépendants et lui associer la matrice B dans laquelle b_{ij} représente la distance entre X_i et X_j).

La condition (i') revient à dire que S et S' donnent les mêmes valeurs aux fonctions $(Z_1, \ldots Z_n) \hookrightarrow f(Z_1 \ldots Z_n)$, de V^n dans R qui sont polynomiales en les produits scalaires $\langle Z_i | Z_j \rangle$ et symétriques par rapport aux Z_i. La condition (i'i') revient à dire que S et S' donnent la même valeur aux fonctions $(Z_1 \dots Z_n) \hookrightarrow g(Z_1 \dots Z_n)$ qui s'écrivent $g(Z_1 \dots Z_n) = h(Z_2 + \dots Z_n) + h(Z_1, Z_3 + \dots Z_n) + \dots h(Z_1, \dots Z_{n-1})$ avec h fonction symétrique de $n-1$ variables $Y_1 \dots Y_{n-1}$ et polynomiale en les $\langle Y_i | Y_j \rangle$

PROBLEME. L'anneau A_n formé de ces f est-il égal à l'anneau $D(A_{n-1})$ engendré par ces g ? (ceci pour $n \geqslant 3$). C'est vrai lorsque $V = R$, tout simplement parce que les fonctions symétriques sont engendrées par les fonctions symétriques élémentaires $Z_1^k + \dots Z_n^k$.

PROPOSITION. *Etant donnés un entier* n, $n \geqslant 3$, *un entier* q, *et* q *entiers* $n_1 \dots n_q$ *avec* $\sum_{i=1}^{q} n_i = n$, *l'application* $(Z_1 \dots Z_n) \hookrightarrow \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{n} \langle Z_i | Z_{\sigma(i)} \rangle$ *où* σ *décrit toutes les permutations de* $1,2 \dots n$ *qui se décomposent en* q *cycles de longueur* $n_1, \dots, n_q$ *est dans* $D(A_{n-1})$. *Par suite l'application* $(Z_1 \dots Z_n) \hookrightarrow \operatorname{Det} \langle Z_i | Z_j \rangle_{i,j}$ *est dans* $D(A_{n-1})$.

PREUVE. Si $q > 1$ c'est tout simplement la méthode du I. Si $q=1$ il suffit de voir que les coefficients de $P_{f,r}$ sont dans $D(A_{n-1})$. Ceux de R_1 y sont via le lemme de Kelly, pour les autres cela se ramène à voir que ceux de $t \hookrightarrow P_{f,r}(t,t)$ y sont, fait qui est évident en utilisant les fonctions symétriques des racines.

B I B L I O G R A P H I E.

J.A.BONDY - R.L.HEMMINGER : Graph Reconstruction. A Survey. Research Report CORR 76-4 1976, Dept of Combinatorics and Optimization - Faculty of Math. University of Waterloo, Waterloo, Ontario, CANADA. à paraître au Journal of Combinatorial Theory.

W.T.TUTTE : All the king's horse. Research report. CORR 76-37 - Septembre 76. Ibid.

Manuscrit remis en septembre 1977.

M. POUZET
Departement de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE