PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JEAN MAUMUS

Précontinuité et topologie de Mackey sur un espace vectoriel topologique ; espaces prétonnelés

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 1 , p. 55-95

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_1_55_0>

[Pu]blications du
[Dé]partement de
[Ma]thématiques
[Ly]on 1977 t.14-1

PRECONTINUITE ET TOPOLOGIE DE MACKEY SUR UN ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE ; ESPACES PRETONNELES

par Jean MAUMUS

On sait que pour les fonctions convexes sur un espace vectoriel topologique (en abrégé, e.v.t.), la continuité est héréditaire pour la relation d'ordre $\leqslant$. On peut se poser les deux questions suivantes à ce propos.

1) Peut-on remplacer "continuité" par "continuité uniforme" ?
2) Peut-on remplacer "continuité" par "semi-continuité inférieure" ?

La réponse à la première est affirmative, elle est négative pour la seconde (Remarque 1.5.5 et exemple 2.1.2).

La deuxième question contuit à la notion de *précontinuité* pour les fonctions convexes (définition 2.1 et Théorème 2.2) et à celle *d'espace prétonnelé* (définition 3.2 et théorème 3.7).

Un espace prétonnelé est un evt pour lequel la réponse à la deuxième question est affirmative (Remarque 3.2.2).

Le paragraphe I est consacré à la continuité uniforme des fonctions convexes sur un evt. On y étudie la fonction asymptotique θ_f d'une fonction convexe f (cf. [4]) et on y introduit la fonction f, qui est la plus petite fonction convexe, homogène et positive qui majore f-f(o) Pour que cette fonction f soit une semi-norme (que l'espace soit réel ou complexe , remarque 1-6) il faut et il suffit que la fonction θ_f soit finie.

Le paragraphe II introduit la précontinuité ; la précontinuité est équivalente équivalente à la continuité pour la topologie de Mackey. Enfin, les espaces prétonnelés sont définis et étudiés le paragraphe III. Les propriétés de stabilité des espaces tonnelés sont conservées par les espaces prétonnelés.

NOTATIONS ET CONVENTIONS

Sauf mention du contraire, on désignera par E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera E^* le dual de E et $E^*_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des formes linéaires réelles sur E (qui coïncide avec E^* si $K = \mathbb{R}$). On notera E^*_σ l'e.l.c. obtenu en munissant E^* de la topologie $\sigma(E^*,E)$. Lorsque E est muni d'une topologie d'e.v.t., son dual topologique sera noté E' et son dual faible E'_σ (E' muni de la topologie $\sigma(E',E)$.

Pour toutes les questions relatives à la dualité, nous nous référons à [4], p. 77 et [5] , p. 245.

Nous appelerons *forme sous-linéaire* sur E, toute fonction f convexe et positivement homogène sur E.

Toute fonction f, positivement homogène sur E, qui est sous-additive, c'est-à-dire qui vérifie la propriété :

$$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y) \ , \ \forall x \in E \ , \ \forall y \in E.$$

Sauf mention du contraire, toutes les fonctions convexes considérées sont finies (à valeurs dans $\mathbb{R}$). Pour les fonctions convexes à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ on se reportera à [6].

On notera que dans l'algèbre des fonctions réelles sur E, l'ensemble des formes sous-linéaires sur E.(resp. des fonctions convexes sur E) est un cône convexe contenant $E^*_{\mathbb{R}}$, stable par enveloppe supérieure partout finie.

Enfin nous appelerons *disque* de E tout ensemble convexe, équilibré, non vide de E.

§ 1 LA CONTINUITE UNIFORME DES FONCTIONS CONVEXES SUR UN E.V.T.

PROPOSITION 1.1 (Théorème de Hahn-Banach). - *Soient* E *un espace vectoriel réel,* F *un sous-espace de* E*,* g *une fonction convexe sur* E *et* f *une fonction linéaire affine sur* F. *On suppose que* $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in F$. *Alors il existe une fonction linéaire affine* $\bar{f}$ *sur* E *qui prolonge* f *et qui est majorée par* g*, sur* E.

En effet, on remarque d'abord qu'il suffit d'établir la proposition dans le cas où f est linéaire, car si $f = a+f_1$, $a \in \mathbb{R}$ et $f_1 \in E^*$, la relation $f(x) \leq g(x)$ est équivalente à $f_1(x) \leq g_1(x)$, où $g_1 = g-a$ est aussi convexe; il suffit donc de pouvoir prolonger f_1. Supposons donc f linéaire, si l'on se reporte à la démonstration du théorème de Hahn-Banach donnée dans [7], p. 267-268, on voit qu'il suffit de prouver que le lemme de prolongement linéaire est encore valable lorsque l'on remplace la semi-norme p par la fonction convexe g. En définitive tout se ramène à prouver que la proposition est vraie lorsque F est un hyperplan de E et f une forme linéaire sur F. Le problème revient alors au choix d'un scalaire t, tel qu'ayant fixé un point x_1 de E-F, on ait, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $y \in F$:

$$f(y) + t.\lambda \leq g(y+\lambda.x_1).$$

Comme cette dernière relation est vérifiée quel que soit y dès que $\lambda = o$, on voit que la condition imposée à t peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} t \leqslant \frac{1}{\lambda}\, g(y+\lambda . x_1) - \frac{1}{\lambda}\, f(y) & , \forall \lambda > o \ , \ \forall\, y \in F \\ -t \leqslant \frac{1}{\lambda}\, g(y'-\lambda' . x_1) - \frac{1}{\lambda} . f(y') & , \forall \lambda' > o \ , \ \forall y' \in F , \end{cases}$$

qui se transforme, en posant $z = y/\lambda$ et $z' = y'/\lambda'$:

$$\begin{cases} f(z') - \frac{1}{\lambda'} . g[\lambda'(z'-x_1)] \leqslant t \leqslant \frac{1}{\lambda} . g[\lambda(z+x_1)] - f(z) , \\ \forall \lambda > o \ , \ \forall \lambda' > o \ , \ \forall z \in F \ , \ \forall z \in F . \end{cases}$$

Ainsi le choix de t est possible si et seulement si, on a :

(1) $\quad f(z) + f(z') \leqslant \frac{1}{\lambda}\, g[\lambda(z+x_1)] + \frac{1}{\lambda}\, g[\lambda'(z'-x_1)] \quad , \ \forall \lambda, \lambda' > o, \forall z, z' \in F .$

Posons alors : $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda'}$; $\alpha' = \frac{\lambda'}{\lambda+\lambda}$; $X = \lambda(z+x_1)$; $X' = \lambda'(z-x_1)$.

La convexité de g permet d'écrire, pour $\lambda, \lambda' > o$:

$g(\alpha' X + \alpha X') \leqslant \alpha' g(X) + \alpha g(X')$, c'est-à-dire :

(2) $\quad g[\frac{\lambda\lambda'}{\lambda+\lambda}(z+z')] \leqslant \frac{\lambda'}{\lambda+\lambda}\, g[\lambda(z+x_1)] + \frac{\lambda}{\lambda+\lambda}\, g[\lambda'(z'-x_1)] , \quad \forall \lambda, \lambda' > o.$

Si on suppose en outre que z et z' sont dans F , il en est de même de $z+z'$ et $\frac{\lambda\lambda'}{\lambda+\lambda}\,(z+z')$; on peut alors écrire, par hypothèse :

$$\frac{\lambda\lambda'}{\lambda+\lambda'}\, f(z+z') = f[\frac{\lambda\lambda'}{\lambda+\lambda'}\,(z+z')] \leqslant g[\frac{\lambda\lambda}{\lambda+\lambda}\,(z+z')] ,$$

Si l'on tient compte maintenant de (2), on voit que (1) est vrai.

COROLLAIRE 1.1.1. - *Soient* M *une variété linéaire affine de* E, *espace vectoriel réel* , g *une fonction convexe sur* E, f *une fonction affine sur* M. *Si* $f(x) \leqslant g(x)$ *pour tout* $x \in M$, *alors il existe un prolongement affine* $\bar{f}$ *de* f *à* E *tout entier, qui est majoré par* g *sur* E.

En effet, on se ramène au théorème de Hahn -Banach en écrivant $M = \alpha + F$ où F est un sous-espace de E et $f(x) = A + f_1(x-\alpha)$, où f_1 est une forme linéaire sur F, puis en remarquant que la relation $f(x) \leqslant g(x), \forall x \in M$ peut se mettre sous la forme $f_1(y) \leqslant g_1(y)$, $\forall y \in F$, où l'on a posé $g_1(y) = g(\alpha+y)-a$.

Il suffit alors de poser $\bar{f}(x) = a + \bar{f}_1(x-\alpha)$.

COROLLAIRE 1.1.2. - *Soit* f *une fonction convexe sur* E *réel, pour tout* $x_o \in E$ *il existe une fonction linéaire affine sur* E, *qui est majorée par* f *et qui prend au point* x_o *la même valeur que* f.

En effet, on applique le corollaire 1.1.1 à la fonction convexe f et à la fonction affine constante, égale à $f(x_o)$, définie sur la variété de dimension o, formée du seul point $\{x_o\}$.

REMARQUE 1.1.3. - Dans les conditions du corollaire 1.1.2, si on suppose, en outre, que f est une forme sous-linéaire, alors la fonction linéaire affine est une forme linéaire.

En effet, si $a+\phi \leqslant f$, $a+\phi(x_o) = f(x_o)$, où $\phi \in E^*$ et f sous-linéaire, on a aussi pour tout $k > o$:

$a + \phi(k.x_o) \leqslant f(hx_o) = k.f(x_o) = k.a + k.\phi(x_o)$, ce qui entraine $a \leqslant k.a$ et donc $a = o$. D'où la conclusion .

DEFINITION 1.2. - *Soit* f *une fonction convexe sur un espace vectoriel réel* E. *On désigne par* Λ_f, Ω_f, Ω^*_f *les ensembles suivants :*

$$\Lambda_f = \{\Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{R}\times E^*) \text{ tel que } f(x) = \sup_{(a,\phi)\in\Omega} \left\{a+\phi(x) \mid \text{pour tout } x \in E\right\} ,$$

$$\Omega_f = \{ (a,\phi) \in \mathbb{R}\times E^* \text{ tel que } a+ \phi \leqslant f\} ,$$

$$\Omega^*_f = \{(a,\phi) \in \Omega_f \text{ tel qu'il existe } x_o \in E \text{ vérifiant } a+\phi(x_o) = f(x_o)\} .$$

Le corollaire 1.1.2. prouve que $\Omega_f^* \in \Lambda_f$. D'autre part, on a évidemment $\Omega_f^* \subset \Omega_f$; d'ailleurs Ω_f est le plus grand élément de Λ_f (pour l'inclusion).

REMARQUE 1.2.1. - L'ensemble $pr_2\, \Omega_f$ n'est autre que le domaine effectif de la fonction convexe f^*, conjuguée de f, définie sur E^* et à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ [6] :

$$x^* \longmapsto f^*(x^*) = \sup_{x \in E} \left[\langle x, x^* \rangle - f(x) \right].$$

En effet, $\phi \in pr_2\, \Omega_f$ si et seulement si, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a+\phi$ minore f, c'est-à-dire $\phi(x) - f(x) \leqslant -a$, ce qui revient à dire que $f^*(\phi) \leqslant -a < +\infty$.

REMARQUE 1.2.2. - Si E est un *e.l.c.* réel et si f est une fonction convexe *s.c.i.* sur E, alors Λ_f contient l'ensemble :

$$\Omega'_f = \{(a,\phi) \in \mathbb{R} \times E' \ / \ a + \phi \leqslant f\} = \Omega_f \cap (\mathbb{R} \times E')$$

([2] page 87).

REMARQUE 1.2.3. - Si f est sous-linéaire, un raisonnement analogue à celui de la remarque 1.1.3 prouve que $a+\phi \leqslant f$ est équivalent à $a \leqslant o$ et $\phi \leqslant f$. En particulier, Λ_f contient l'ensemble des (o,ϕ) où $\phi \in E^*$ et $\phi \leqslant f$; c'est-à-dire que $f = \sup_{\phi \in pr_2 \Omega_f} \phi = \sup\{\phi \in E^* / \phi \leqslant f\}$.

REMARQUE 1.2.4. - Si f est une forme sous-linéaire s.c.i. sur un e.l.c. réel E, alors Λ_f contient l'ensemble des $(0,\phi)$ où $\phi \in E'$ et $\phi \leqslant f$ et l'on a :

$$f = \sup_{\phi \in pr_2\, \Omega'_f} \phi = \sup\{\phi \in E' / \phi \leqslant f\}.$$

PROPOSITION 1.3. - *Pour tout élément Ω de Λ_f, associé à une fonction convexe f sur E, réel, l'enveloppe supérieure θ_f de la famille des $\phi \in pr_2\Omega$ est indépendante du choix de Ω dans Λ_f et l'on a pour tout $x \in E$:*

$$\theta_f(x) = \sup_{\phi \in pr_2\, \Omega_f} \phi(x) = \sup_{u \in E} \left[f(x+u) - f(u) \right].$$

En effet, pour tout $x \in E$, tout $u \in E$, tout $\varepsilon < o$, il existe $a \in \mathbb{R}$ et $\phi \in pr_2\Omega$ tels que $a+\phi \leqslant f$ et $a+\phi(x+u) \geqslant f(x+u)-\varepsilon$. Or en déduit que :

$$\phi(x) = a + \phi(x+u) - [a + \phi(u)] \geqslant f(x+u) - f(u) - \varepsilon ,$$

de sorte que $\sup\limits_{\phi \in pr_2\Omega} \phi(x) \geqslant \sup\limits_{u \in E} [f(x+u)-f(u)]$, $\forall x \in E$.

Inversement, pour tout $\phi \in pr_2\Omega$, l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ tels que $a+ \phi \leqslant f$ n'est pas vide; c'est un intervalle de la forme $]-\infty , b]$ et, pour tout $\varepsilon > o$, la définition de b prouve qu'il existe $u \in E$ tel que $b + \phi(u) > f(u) - \varepsilon$. On déduit de là que, pour tout $x \in E$, on peut écrire :

$$\phi(x) = b + \phi(x+u) - [b+ \phi(u)] \leqslant f(x+u) - f(u) + \varepsilon$$

et donc $\phi(x) \leqslant \sup\limits_{u \in E} [f(x+u)-f(u)]$. D'où la conclusion.

REMARQUE 1.3.1. - La fonction θ_f ainsi axxociée à une fonction convexe f est une fonction convexe positivement homogène à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ (en fait dans $]-\infty , +\infty]$). Si l'on se reporte à [6], p. 51 et 52, et si l'on tient compte de la remarque 1.2.1, on voit que θ_f n'est autre que la *fonction asymptote* de f et que l'on a donc aussi, pour tout $x_o \in E$:

$$\theta_f(x) = \sup_{\lambda > o} \frac{f(x_o + \lambda x) - f(x_o)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{f(x_o+\lambda x)-f(x_o)}{\lambda} .$$

La fonction θ_f est une forme sous-linéaire si et seulement si elle est partout finie.

REMARQUE 1.3.2. - Pour tout $x \in E$ on a :

$$\inf_{\phi \in pr_2\Omega} \phi(x) = -\sup_{\phi \in pr_2\Omega} - \phi(x) = -\sup_{\phi \in pr_2\Omega} \phi(-x) = - \theta_f(-x).$$

On peut encore compléter ces égalités par :

$$-\theta_f(-x) = -\sup_{u \in E}[f(-x+u)-f(u)] = -\sup_{v \in E}[f(v)-f(x+v)] = \inf_{v \in E}[f(x+v)-f(v)] .$$

On conclut de là que, pour tout $\Omega \in \Lambda f$, on a :

$$\sup_{\phi \in pr_2\Omega} |\phi(x)| = \max[\theta_f(x),\ \theta_f(-x)] = \sup_{u \in E} |f(x+u)-f(u)|.$$

L'enveloppe supérieure des $|\phi|$, pour $\phi \in pr_2\Omega$, est donc indépendante du choix de Ω dans Λ_f; c'est une fonction convexe homogène à valeurs dans $[0,+\infty]$, nous la désignerons par $\check{f}$; elle est nulle en o. La fonction $\check{f}$ est une semi-norme si, et seu lement si, elle est partout finie.

REMARQUE 1.3.3. - Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions convexes sur E, réel, dont l'enveloppe supérieure f est partout finie. Posons $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega f_i$; on voit immédiatement que $\Omega \in \Lambda_f$ et on en déduit aussitôt que les applications $f \mapsto \theta_f$ et $f \mapsto \check{f}$ commutent avec l'enveloppe supérieure dans ce cas. En particulier on a $\theta_{f^+} = (\theta_f)^+$ et $(f^+)^\vee = \check{f}$.

REMARQUE 1.3.4. - Soient α et λ deux scalaires réels, f une fonction convexe sur E, réel. Posons $g(x) = \alpha + f(\lambda.x+u)$ où u est un point de E. Les définitions montrent immédiatement que $\phi \in pr_2\ \Omega_f$ si et seulement si $\lambda.\phi \in pr_2\ \Omega_g$. On en déduit que $\theta_g = \lambda.\theta_f$ et $\check{g} = |\lambda|.\check{f}$.

REMARQUE 1.3.5. - Soient f et g deux fonctions convexes sur E, réel, On voit immédiatement que $f \leq g$ est équivalent à $\Omega_f \subset \Omega_g$. On en déduit que $f \leq g$ entraine $\theta_f \leq \theta_g$ et $\check{f} \leq \check{g}$

REMARQUE 1.3.6. - La relation $f = \theta_f$ (resp. $f = \check{f}$) caractérise les formes sous-linéaires (resp. les semi-normes).

REMARQUE 1.3.7. - Il résulte immédiatement de l'égalité des sup qui définissent θ_f et $\check{f}$, que pour tout $x \in E$, tout $x' \in E$ on a :

$$f(x)-f(x') \leq \theta_f(x-x') \quad \text{et} \quad |f(x)-f(x')| \leq \check{f}(x-x').$$

REMARQUE 1.3.8. - Soient f et g deux fonctions convexes sur E. On vérifie immediatement que $\Omega_f + \Omega_g \subset \Lambda_{f+g}$; on en déduit que $\theta_{f+g} = \theta_f + \theta_g$ et $(f+g)^{\vee} \leq \check{f} + \check{g}$.

PROPOSITION 1.4. - *Soient* f *une fonction convexe sur* E, *réel,* $a \in \mathbb{R}$ *et* h *une fonction convexe positivement homogène (resp. homogène) nulle en* o *et à valeurs dans* $]-\infty, +\infty]$. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

i) on a $f \leq a + h$,

ii) on a $f(o) \leq a$ *et* $\theta_f \leq h$ [*resp.* $\check{f} \leq h$] .

En effet, la remarque 1.3.7 prouve que ii) $\Rightarrow$ i). Réciproquement i) entraine évidemment $f(o) \leq a$; de plus si $f \leq a + h$, pour tout $\phi \in pr_2\ \Omega_f$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha + \phi \leq a + h$, donc $\phi \leq a - \alpha + h$; il résulte de l'hypothèse sur h, que pour tout scalaire positif λ on a :

$$\phi \leq \frac{a-\alpha}{\lambda} + h \text{ , donc } \quad \phi \leq h \quad \text{et donc } \theta_f \leq h .$$

Si de plus h est symétrique, on a aussi $\theta_f(-x) \leq h(x)$ pour tout $x \in E$ et donc $f < h$. (Remarque 1.3.2).

REMARQUE 1.4.1. - Cette proposition exprime le fait que $f(o) + \theta_f$ (resp. $f(o) + \check{f}$) est une majoration minimale de f, parmi les majorations de la forme a + h, où h est une fonction convexe du type envisagé dans 1-4.

REMARQUE 1.4.2. La fonction $\check{f}$ (Remarque 1.3.2) est une fonction jauge (VI page 13), c'est la jauge de l'ensemble Δ_f :

$\Delta_f = \{x \in E / \check{f}(x) \leq 1\} = \{x \in E \ / \ |f(x+u) - f(u)| \leq 1 \text{ pour tout } u \in E\}$.
L'ensemble Δ_f est toujours un convexe symétrique contenant 0, de plus $\check{f}$ est une semi-norme si et seulement si Δ_f est *absorbant*.

REMARQUE 1.4.3. - Si l'on pose, pour toute fonction convexe f sur E réel,

$$\Delta'_f = \{x \in E \ / \ f(x+u) - f(u) \leq 1 \text{ pour tout } u \in E\},$$

on vérifie immédiatement que $\Delta_f = \Delta'_f \cap (-\Delta'_f)$. On notera d'ailleurs que $\Delta'_f = \{x \in E \ / \ \theta_f(x) \leq 1\}$.

THEOREME 1.5. - *Soit* f *une fonction convexe sur un* e.v.t. *réel* E. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. L'ensemble $\Delta'_f = \{x \in E \ / \ f(x+u) - f(u) \leq 1, \ \forall u \in E\}$ *est un voisinage de* o.

2. L'ensemble $\Delta_f = \{x \in E \ / \ |f(x+u) - f(u)| \leq 1, \ \forall u \in E\}$ *est un voisinage de* o.

3. Il existe une majorate de f *de la forme* a+p*, où* $a \in \mathbb{R}$ *et* p *est une semi-norme (resp. forme sous-linéaire) continue.*

4. La fonction θ_f *(resp.* $\check{f}$*) est partout finie et elle est continue.*

5. Il existe $\Omega \in \Lambda_f$ *tel que* $pr_2\Omega$ *soit une partie équicontinue de* E!

6. La fonction f *(resp.* f^+*) (resp.* $|f|$*) est* uniformément continue.

En effet , la relation $\Delta_f = \Delta'_f \cap (-\Delta'_f)$, de la remarque 1.4.3, prouve l'équivalence de 1. et 2. Si 2. est vérifié, Δ_f est absorbant et $\check{f}$ est une semi-norme continue (Remarque 1.4.2). La relation $f \leq f(o) + \check{f}$, de la proposition 1-4, prouve qu'il existe une majorante de f de la forme a+p, où $a \in \mathbb{R}$ et p est une semi-norme continue. On achève de montrer que 2 $\Rightarrow$ 3 en remarquant que les deux propositions de 3. sont équivalentes entre elles, compte tenu de la relation $\check{f}(x) = \operatorname{Max}[\theta_f(x), \theta_f(-x)]$ (Remarque 1.3.2), de la proposition 1-4 et de la remarque 1.3.1. On prouve d'ailleurs ainsi l'équivalence de 3 et 4.

La relation $\check{f} = \sup_{\phi \in pr_2\Omega} |\phi|$ (Remarque 1.3.2) prouve l'équivalence de 4 et 5, compte tenu de ce qui a été dit sur $\check{f}$ et θ_f.

La relation $|f(x)-f(x'))| \leq \check{f}(x-x')$ (Remarque 1.3.7), prouve que 4 $\Rightarrow$ la continuité uniforme de f. Comme la continuité uniforme de f entraine 2, on voit qu'il suffit maintenant d'établir l'équivalence de la continuité uniforme pour f, f^+, $|f|$. Or si f est uniformément continue, il en est de même de f^+ et $|f|$.

Inversement, la continuité uniforme de f^+, qui est une fonction convexe, entraine que $(f^+)^v$ (en vertu de ce qui vient d'être déjà établi) est partout finie et continue ; comme $(f^+)^v = f$ (Remarque 1.3.3), on en déduit que, si f^+ est uniformément continue, 4 est vérifié; donc f est uniformément continue. Il reste à prouver que la continuité uniforme de $|f|$ entraine celle de f. A tout $\varepsilon > 0$, on peut associer un voisinage V de 0 dans E tel que $u \in V \Rightarrow ||f(x+u)|-|f(x)|| < \varepsilon/2$, pour tout $x \in E$. On peut choisir V équilibré. Montrons, ce qui suffira, que l'on a aussi :
$u \in V \Rightarrow |f(x+u) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in E$. On peut supposer que f(x+u) et f(x) sont de signes contraires (sinon c'est évident); la fonction convexe f prend alors la valeur 0 sur le segment d'extrémités x et x+u; il existe donc $t \in]0,1]$ tel que $f(x+tu) = 0$. Posons $y = x+t.u$; nous avons

$$|f(x+u) - f(x)| = |f(x+u)| + |f(x)| = ||f(x+u)|-|f(y)|| + ||f(x)|-|f(y)||$$

puisque $f(y) = 0$. Comme $x+u-y = (1-t).u \in V$ ainsi que $y-x = t.u \in V$, on en déduit que $|f(x+u)-f(x)| < \varepsilon$.

COROLLAIRE 1.5.1. - *Soit* f *une fonction convexe sur un espace vectoriel réel* E. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. L'ensemble Δ_f *(resp.* Δ'_f *) est absorbant.*

2. Il existe une majorante de f *de la forme* a+p , *où* $a \in \mathbb{R}$ *et où* p *est une semi-norme (resp. une forme sous-linéaire)* .

3. La fonction θ_f *(resp.* $\check{f}$*) est partout finie.*

4. La fonction f *(resp.* f^+ *) (resp.* $|f|$ *) est uniformément continue pour la topologie localement convexe la plus fine sur* E.

REMARQUE 1.5.2. - Toute fonction convexe, uniformément continue pour une topologie d'e.v.t. (non nécessairement localement convexe) est également uniformément continue pour la topologie localement convexe la plus fine.

COROLLAIRE 1.5.3. - *Soit* E *un e.l.c. réel* , F *un sous-espace de* E, f *une fonction convexe définie et uniformément continue sur* F. *Alors, il existe une fonction convexe* $\bar{f}$ *définie sur* E *et uniformément continue, qui prolonge* f.

En effet, le théorème 1.5 prouve l'existence d'un réel a et d'une semi-norme p définie et continue sur F, tels que a+p majore f. Or p étant continue sur F, il existe q telle que $q|F$ majore p, q étant une semi-norme continue sur E. A tout élément (α,ϕ) de Ω_f est associé une fonction linéaire affine $\alpha + \phi$ majorée par f sur F, donc majorée par $a+q|F$; on peut donc lui associer une fonction linéaire affine $\overline{\alpha + \phi}$ définie sur E, qui prolonge $\alpha + \phi$ et qui est majorée par a+q (Proposition 1.1). Si l'on pose alors :

$\bar{f} = \sup_{(\alpha,\phi)\in\Omega_{fg}} \overline{\alpha+\phi}$, on définit une fonction convexe $\bar{f}$ qui est majorée par a+q sur E, donc qui répond à la question, en vertu des définitions 1-2 et du théorème 1.5.

REMARQUE 1.5.4. Soit f une forme sous-linéaire continue sur F, sous-espace d'un e.l.c. E, réel. Le théorème 1.5 (3) prouve que f est uniformément continue et le corollaire 1.5.3 montre que f possède un prolongement convexe uniformément continu $\bar{f}$ à E tout entier. En fait, si dans la démonstration précédente,on choisit Ω^*_f au lieu de Ω_f et si l'on tient compte de la remarque 1.1.3., on voit que l'on peut prendre partout $\alpha = o$, de sorte que $\overline{\alpha + \phi}$, pour $(\alpha,\phi) \in \Omega^*_f$,est une forme linéaire sur E majorée par a+q. On en déduit que le prolongement $\bar{f}$ ainsi construit est une forme sous-linéaire continue sur E. De plus,si f est une semi-norme, on a $f = \check{f}$ (Remarque 1.3.6); en prenant alors $g = \sup_{(o,\phi) \in \Omega^*_{\check{f}}} |\bar{\phi}|$, on définit une semi-norme continue g sur E, qui prolonge $\check{f}$, c'est-à-dire f.

REMARQUE 1.5.5. - Il résulte du théorème 1-5 que la continuité uniforme tout comme la continuité sur un e.v.t. E,est héréditaire à gauche pour la relation $\leqslant$ entre les fonctions convexes sur E.

REMARQUE 1.6. - Soit E un espace vectoriel *complexe* et soit f une fonction convexe sur E. On peut appliquer à f les résultats précédents en se plaçant dans $E_{\mathbb{R}}$. En particulier on peut définir les fonctions θ_f et $\check{f}^{\mathbb{R}}$ en introduisant l'ensemble $\Lambda_f = \{ \Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times E^*) \ / \ f = \sup_{(a,\phi)\in\Omega} (a+\mathcal{R}e\phi)\}$

puisque l'application $\phi \mapsto \mathcal{R}e\phi$ est une bijection de E^* sur $E^*_{\mathbb{R}}$. (VII p. 274).
La fonction $\check{f}^{\mathbb{R}} = \sup_{(a,\phi)\in\Omega} |\mathcal{R}e\ \phi|$, pour tout $\Omega \in \Lambda_f$, est convexe, à valeurs dans $[o,+\infty]$, positivement homogène, symétrique, nulle en o. C'est la plus petite fonction de ce type qui majore f-f(o) (Proposition 1.4). Etudions alors le sup des $|\phi|$ pour les $(a,\phi)\in\Omega$. Pour cela, on remarque d'abord que si $\phi \in E^*$, on a pour tout $x \in E$:

$$|\phi(x)| = \sup_{|\lambda| = 1} \mathcal{R}e\phi(\lambda x) \qquad \text{(VII p. 274).}$$

On en déduit : $\sup_{\phi\in pr_2\Omega} |\phi| = \sup_{|\lambda| = 1} (\sup_{\phi\in pr_2\Omega} \mathcal{R}e\ \phi(\lambda x)) = \sup_{|\lambda| = 1} \theta_f(\lambda x)$.

Ainsi ce sup est encore indépendant du choix de Ω dans Λ_f; nous le désignerons par f; c'est une fonction convexe, à valeurs dans $[o+\infty]$, homogène, nulle en 0. C'est une semi-norme si et seulement si elle est partout finie. Nous avons $\check{f}(x) = \sup_{|\lambda| = 1} \theta_f(\lambda x)$ tandis que $\check{f}^{\mathbb{R}}(x) = \sup_{\lambda\in\{1,-1\}} \theta_f(\lambda x)$ et donc : $\qquad \theta_f \leq \check{f}^{\mathbb{R}} \leq \check{f}$.

Etablissons les deux propriétés suivantes :

1.6.1. - La fonction $\check{f}$ est la plus petite fonction convexe homogène, nulle en 0, à valeurs dans $[0,+\infty]$, qui majore f - f(o).

1.6.2. On a : $\check{f}(x) \leq \sqrt{2} \sup_{\lambda \in \{1,-1,i,-i\}} \theta_f(\lambda x)$.

Pour la première, on remarque qu'une fonction convexe p, du type défini dans 1.6.1, qui majore f-f(o), majore aussi θ_f d'après la proposition 1-4, on a donc pour tout λ de module 1 :

$\theta_f(\lambda x) \leq p(\lambda x) = |\lambda|\ p(x) = p(x)$; donc $\check{f} \leq p$. La réciproque est évidente puisque $\check{f}$ majore θ_f qui majore f-f(o). Pour la seconde, on note que pour tout $\phi \in E$, on a pour tout $x \in E$: $\phi(x) = \mathcal{R}e\ \phi(x) - i\ \mathcal{R}e\ \phi(ix)$
(VII p. 274); d'où l'on déduit $|\phi(x)| \leq \sqrt{2} \sup\{\mathcal{R}e\phi(x), \mathcal{R}e\ \phi(-x), \mathcal{R}e\phi(i-x), \mathcal{R}e\phi(-ix)\}$.
Ce qui entraine la conclusion.

On déduit de 1.6.2 des relations liant $\check{f}^{\mathbb{R}}$ et $\check{f}$ à θ_f :

1.6.3. Soit f une fonction convexe sur E, espace vectoriel complexe.

i) Si l'une des fonctions θ_f , $\check{f}^{\mathbb{R}}$, $\check{f}$ est partout finie, il en est de même des deux autres. De plus, si l'une de ces fonctions, partout finie, est continue pour une topologie d'e.v.t. sur E, il en est de même pour les deux autres.

ii) Sur toute partie équilibrée de E, les trois fonctions θ_f , $\check{f}^{\mathbb{R}}$ et $\check{f}$ ont exactement le même sup.

On déduit immédiatement de là que l'énoncé du théorème 1-5 reste valable lorsque l'on y remplace E *réel par* E *complexe.*

(Pour le point 5, on note que la fbijection $\phi \mapsto \mathcal{R}e\,\phi$ de E^* sur $E^*_{\mathbb{R}}$ définit un isomorphisme de E' sur $E'_{\mathbb{R}}$ qui échange les parties équicontinues). Même remarque pour le corollaire 1.5.1. On notera également que l'égalité $f = \check{f}$ caractérise toujours les *semi-normes*.

1.7. EXEMPLE. - Les sous-normes (VII p. 255).

On appelle sous-norme sur E toute forme sous-linéaire positive ou nulle. Une telle fonction p est la jauge de l'un quelconque des ensembles convexes contenus dans $p^{-1}([0,1])$ et qui contiennent $p^{-1}([0,1[)$. Réciproquement, la jauge p_A d'un ensemble *convexe absorbant* A, dans $E_{\mathbb{R}}$, est une sous-norme et l'on a

$$p_A^{-1}([0,1[) \subset A \subset p_A^{-1}([0,1]) \,.$$

On vérifie immédiatement que pour deux sous-normes p et q on a la règle suivante de comparaison .

1.7.1. - Si p et q sont deux sous-normes, $p \leqslant q$ si et seulement si $q(x) \leqslant 1$ implique $p(x) \leqslant 1$.

En particulier, si A est un ensemble convexe absorbant de $E_{\mathbb{R}}$ et ψ une forme linéaire réelle $[\psi \in E^*_{\mathbb{R}}]$, on a :

$$\psi \leqslant p_A \iff \psi^+ \leqslant p_A \iff \psi(x) \leqslant 1 \text{ dès que } x \in A.$$

Appliquons ce dernier résultat; posons (en accord avec la remarque 1-6 pour le cas où $K = \mathbb{C}$) pour toute fonction convexe f :

$$\Omega_f = \{(a,\phi) \in \mathbb{R} \times E^* \text{ tel que } a + \mathcal{R}e\,\phi \leq f\}.$$

D'autre part, dans le système dual (E,E^*), appelons polaire d'une partie A de E, la partie A° de E^* telle que :

$$A^\circ = \{y \in E^* \ / \ \mathcal{R}e < x,y > \leq 1, \text{ quel que soit } x \in A\}.$$

On définit de même la polaire d'une partie de E^* (V p. 245). Ces ensembles sont les symétriques de ceux définis dans (IV p. 81), sous le même nom. Nous avons alors, en tenant compte de 1.2.3 :

1.7.2. - Pour tout ensemble convexe absorbant A de $E_{\mathbb{R}}$, l'ensemble $pr_2\,\Omega p_{p_A} = \{\phi \in E^* \ / \ \mathcal{R}e\,\phi \leq p_A\}$ est le polaire de A dans la polarité définie par le système dual (E,E^*).

On en déduit que $p_A^{-1}(]0,1]) = A^{\circ\circ}$ = adhérence de A pour la topologie localement convexe la plus fine sur E.

La fonction $\check{p}_A^{\mathbb{R}}$ est la jauge de $A \cap (-A)$; $\check{p}_A$ est une semi-norme de E, c'est la plus petite semi-norme majorant p_A et c'est la jauge du noyau équilibré de a (qui est absorbant dans E).

Nous avons aussi :

1.7.3. - Soit (E,E') un système dual séparé en E' et soit A un ensemble convexe absorbant de $E_{\mathbb{R}}$. Les énoncés suivants sont équivalents (E' est identifié à un sous-espace de E^*) :

i) Le polaire A° de A, dans la polarité définie par le système dual (E,E^*), est contenu dans E'.

ii) L'ensemble A est un voisinage de o pour la topologie de Mackey $\tau(E,E')$.

En effet, le polaire A° de A est un ensemble convexe, fermé de E^*_σ ; il est aussi borné dans E^*_σ, puisque A est absorbant dans $E_{\mathbb{R}}$ (ou parce que $\check{p}_A(x) = \sup\limits_{\phi \in A^\circ} |\phi(x)|$, d'après 1.7.2. et 1-6, et que $\check{p}_A$ est partout finie).

On en déduit que A° est compact dans E^*_σ (car, dans E^*_σ, il y a équivalence entre partie bornée et partie précompacte et, de plus, E^*_σ est séparé et complet). Comme $\check{p}_A = \sup\limits_{\phi \in A^\circ} |\phi|$, on a aussi $\check{p}_A = \sup\limits_{\phi \in \Delta(A^\circ)} |\phi|$ où $\Delta(A^\circ)$ est l'enveloppe disquée fermée de A° dans E^*_σ ; on obtient cette enveloppe en prenant d'abord l'enveloppe équilibrée qui reste compacte, puis l'enveloppe convexe fermée qui est encore compacte (II p. 69) puisque E^*_σ est séparé et complet. On en déduit que $\check{p}_A$ est continue pour la topologie de Mackey sur E (IV p. 94), dès que l'on suppose i) vrai. Donc i) $\Rightarrow$ ii). La réciproque est triviale en tenant compte de 1.7.2.

REMARQUE 1.7.4. La condition i) s'exprime aussi sous la forme suivante : toute forme linéaire réelle de E, majorée par 1 sur A, est continue pour la topologie $\sigma(E,E')$.

REMARQUE 1.7.5. - On déduit de la démonstration de 1.7.3 que, pour toute sous-norme p, l'ensemble $pr_2\ \Omega_p$ est un convexe compact de E^*_σ.

§ II. LA PRECONTINUITE DES FONCTIONS CONVEXES SUR UN E.V.T.

Soit f une fonction convexe sur un e.v.t. E (sur K). Le théorème 1-5 et la remarque 1-6-3 prouvent que, si l'un des ensembles $pr_2\Omega$, pour un $\Omega \in \Delta_f$, est une partie équicontinue de E', alors cette propriété est vraie pour tous les $\Omega \in \Delta_f$. Cela caractérise la continuité uniforme de f sur E et cela entraine d'ailleurs la remarque 1.5.5. Etudions ce que l'on obtient en ne gardant de cette condition que l'inclusion de $pr_2\Omega$ dans E'.
Soient donc :

(A) $\exists\, \Omega \in \Lambda_f$ tel que $pr_2\Omega \subset E'$;

(B) $\exists\, \Omega \in \Lambda_f$, $pr_2\Omega \subset E'$.

L'énoncé (B) est d'ailleurs équivalent à

(B') $\quad pr_2\ \Omega_f \subset E'$, où $\Omega_f = \{(a,\phi) \in \mathbb{R}\times E^{*}$ tel que $a + \mathcal{R}e\phi \leq f\}$.

La définition de Λ_f prouve que (A) entraine que f est s.c.i.

La remarque 1.2.2 montre que, dans le cas où E est un <u>e.l.c.</u> , alors (A) est équivalent à <u>f est s.c.i.</u> . Nous verrons dans l'exemple 2.1.3 que cela est faux dans le cas d'un e.v.t. quelconque. Si les conditions (A) et (B) étaient équivalentes entre elles, cela entrainerait que, dans le cas d'un e.l.c, toute fonction convexe majorée par une fonction convexe s.c.i. serait elle-même s.c.i; nous verrons dans l'exemple 2.1.2 que cela est faux. Nous retiendrons donc : (B) $\Rightarrow$ (A) $\Rightarrow$ f est s.c.i. et nous remarquerons que : f continue $\Rightarrow$ (B) ; de sorte (A) et (B) caractérisent des qualités pour f, intermédiaires entre la continuité et la semi-continuité inférieure.
Nous poserons :

DEFINITION 2-1 . - *Soit* E *un e.v.t. On dit qu'une fonction convexe* f *sur* E *est* précontinue *si elle satisfait à* (B) *c'est-à-dire si* $pr_2\ \Omega_f \subset E'$.

EXEMPLE 2.1.1. - Les propriétés 1.7.2 et 1.7.3 montrent que, si p est une sous-norme sur E, alors p est précontinue si et seulement si p est continue pour la topologie de Mackey $\tau(E,E')$ sur E.

EXEMPLE 2.1.2. - Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$, muni de la norme de $||f|| = \int_0^1 |f(t)|dt$. Posons, pour tout $f \in E$, $r(f) = \mathrm{Max}\left[\,|f(o)|\ ;\ \sup_{x\in[0,1]} f^+(x)\right]$ et $s(f) = \mathrm{Max}\left[\frac{1}{2}f(o), \sup_{x\in[o,1]} f(x)\right]$.

Il est clair que s et r sont des formes sous-linéaires sur E et d'ailleurs que r est une sous-norme. Nous avons donc $\theta_r = r$ et $\theta_s = s$. (Remarque 1.3.6) et

$$\check{r}(f) = \mathrm{Max}\,[r(f)\ ,\ r(-f)] = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \text{(Remarque 1.3.2),}$$

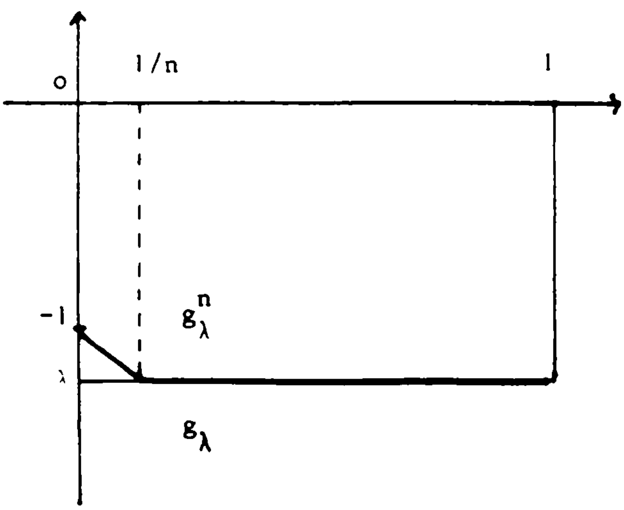
$s^+(f) = \mathrm{Max}\,[0, s(f)] = \sup\limits_{x \in [0,1]} f^+(x)$. D'où l'on déduit :

$\check{s} = (s^+)^\vee = \check{r}$ (Remarques 1.3.3 et 1.3.2).

Montrons que s^+ et $\check{r}$ sont s.c.i. Le raisonnement est classique (VII page 323); il s'agit de montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ les ensembles $A = \{ f \in E / f^+ \leqslant a\}$ et $B = \{f \in E / |f| \leqslant a\}$ sont fermés dans E. En effet, si $g \notin A$ [resp : B] la continuité de f^+ [resp . $|f|$] prouve l'existence d'un réel $\alpha >$ et d'un intervalle $[u,v]$ de $[0,1]$, de longueur non nulle, sur lequel $g^+ > \alpha$ (resp. $|g| > \alpha$). Pour tout $f \in A$ [resp . B] on a alors :

$$\int_0^1 |f-g|(t)dt \geq \int_u^v |f-g|(t)dt \geqslant (\alpha-a)(v-u),$$ de sorte que $g \notin \bar{A}$ [resp. $\bar{B}$]

Ce qui suffit. Montrons maintenant que r et s ne sont pas s.c.i.. Pour cela posons $A' = \{f \in E \,/\, r(f) \leqslant 1\}$ et $B' = \{ f \in E / s(f) \leqslant -1\}$.

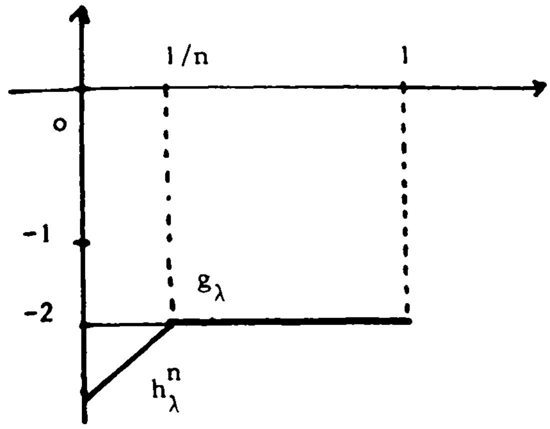


A tout scalaire $\lambda < -1$, associons la fonction g_λ de E, constante et égale à λ . On a évidemment $r(g_\lambda) = |\lambda| > 1$; donc $g_\lambda \notin A'$. Mais, à tout entier $n > 1$, on peut associer la fonction g_λ^n obtenue en "modifiant affinement" g_λ sur $[0,\frac{1}{n}]$, de façon à ce que g_λ^n reste continue, soit égale à -1 au point 0 et coïncide avec g_λ sur $[\frac{1}{n}, 1]$.

On a alors pour tout n : $r(g_\lambda^n) = 1$, de sorte que $g_\lambda^n \in A'$ et, comme

$$\int_0^1 |g_\lambda - g_\lambda^n|(t)dt = \frac{|\lambda|-1}{2n},$$ on en déduit que $g_\lambda \in \bar{A}'$. Donc A' n'est pas fermé dans E et r n'est pas s.c.i.

On peut refaire un raisonnement analogue pour B'. Supposons cette fois que $\lambda \in]-2, -1[$; nous avons $s(g_\lambda) = \frac{\lambda}{2} > -1$,



donc $g_\lambda \notin B'$. Modifions cette fois g_λ en h^n_λ de façon que h^n_λ prenne en o la valeur -2. On a alors $s(h^n_\lambda) = -1$, donc $h^n_\lambda \in B'$ et $\int_0^1 |g_\lambda - h^n_\lambda|(t)dt = \frac{2-|\lambda|}{2n}$.

On en déduit de même que B' n'est pas fermé et s n'est pas s.c.i.

En conclusion, nous avons sur un espace vectoriel normé :

a/ une forme sous-linéaire s qui n'est pas s.c.i. bien que la sous-norme s^+ le soit.

b/ Une sous-norme r non s.c.i., bien que r soit s.c.i.

Alors que :

a/ pour toute fonction convexe f sur un e.v.t. E on a :

$$f \text{ s.c.i. } \Rightarrow f^+ \text{ s.c.i.}$$

b/ pour toute forme sous-linarier f sur un e.v.t. E on a :

$$f \text{ s.c.i. } \Rightarrow \check{f} \text{ s.c.i.}$$

Le a/ est trivial et b/ résulte de la remarque 1.3.6 et de la relation $\check{f}(x) = \sup_{|\lambda|=1} \theta_f(\lambda x)$ (Remarque 1-6).

Enfin, l'existence de r (ou de s) suffit à prouver la non équivalence des énoncés (A) et (B), puisque E est un e.l.c. et que $r \leq \check{r}$. Bien entendu ni $\check{r}$, ni s^+ ne sont précontinues.

EXEMPLE 2.1.3. - Reprenons l'espace vectoriel E de l'exemple précédent mais cette fois muni de la distance d définie par

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|^{1/2}\,dx$$

On obtient un e.v.t. métrisable sur lequel la seule semi-norme continue est O (VII, p. 266-267) . Or, le raisonnement qui a été fait pour l'ensemble B de l'exemple 2.1.2 peut être repris et avec les mêmes notations on obtient ici :

$$g \notin B \quad , \; f \in B \Rightarrow f \; d(f,g) \geq (\alpha-a)^{1/2}(v-u).$$

On en déduit que la norme de la convergence uniforme (qui est $\check{r}$) sur E est s.c.i. Or $\check{r}$ ne peut vérifier (A) puisque $pr_2\Omega \subset E' \Rightarrow pr_2\Omega = \{0\}$, ce qui entraine $\sup_{\phi \in pr_2\Omega} |\phi| = 0$.

Il existe donc sur E des normes s.c.i qui ne vérifient pas (A), ce qui n'est pas le cas sur un e.l.c.

Ce qui précède prouve également que, sur E, les seules fonctions convexes précontinues sont les constantes, en particulier 0 est la seule semi-norme précontinue.

THEOREME 2.2. - *Soit* f *une fonction convexe sur un e.v.t.* E *réel ou complexe. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *La fonction* f *est précontinue.*
2. *La fonction* f *est continue pour la topologie de Mackey* $\tau(E,E')$.
3. *Toute fonction convexe sur* E, *majorée par* f, *est s.c.i.*
4. *La fonction* f^+ *est précontinue.*
5. *Toute fonction convexe positive majorée par* f^+, *est s.c.i.*

Commençons par quelques lemmes .

LEMME 2.2.1. - *Soit* g *une fonction convexe sur un espace vectoriel* E. *Pour tout scalaire* $\lambda \in [0,1]$ *et tout* $x \in E$, *on a :* $g(\lambda x)-g(o) \leq \lambda[g(x)-g(o)]$.

En effet, il suffit d'écrire l'inégalité de convexité aux points x et o affectés des coefficients λ et $(1-\lambda)$.

LEMME 2.2.2. - *Soit* f *une fonction convexe sur un espace vectoriel* E. *L'ensemble* $Q'_f = \{x \in E \ / \ f(x)-f(o) \leq 1\}$ *est convexe et absorbant.*

En effet, la convexité de Q'_f est évidente et le lemme 2.2.1 prouve que Q'_f est absorbant dans $E_{\mathbb{R}}$; c'est un voisinage de 0 pour la topologie localement convexe la plus fine sur E; il est donc aussi absorbant dans le cas où $K = \mathbb{C}$.

LEMME 2.2.3. - *Soit* f *une fonction convexe sur un e.v.t.* E . *Pour que* f *soit continue, il faut et il suffit que* Q'_f *soit un voisinage de* 0.

C'est immédiat.

Etablissons le théorème. Remarquons d'abord que, sur E, les formes linéaires qui sont continues pour l'une des trois topologies suivantes : celle de E ; $\sigma(E,E')$, $\tau(E,E')$, sont exactement les mêmes [IV].

La remarque 1.7.4 et les lemmes 2.2.2, 2.2.3 prouvent que $1 \Rightarrow 2$, si l'on démontre que 1 entraine la propriété suivante :

Toute forme linéaire réelle de E, majorée par 1 sur Q'_f, est continue.

Soit donc $\phi \in E^*$ telle que $\mathcal{R}e\phi$ soit majorée par 1 sur Q'_f.
Pour tout $x \in E \setminus Q'_f$ on a $f(x)-f(o) > 1$; posons $\lambda.[f(x)-f(o)] = 1$, ce qui définit $\lambda \in]0,1]$; le lemme 2.2.1. prouve que $f(\lambda x)-f(o) \leqslant 1$, c'est-à-dire que $\lambda x \in Q'_f$ et donc $\mathcal{R}e\, \phi(x) \leqslant \frac{1}{\lambda} = f(x)-f(o)$, soit

(1) $f(o) + \mathcal{R}e\, \phi(x) \leqslant f(x)$.

Pour tout $x \in Q'_f$, on a $f(x)-1+ \mathcal{R}e\, \phi(x) \leqslant f(x)$.

Faisons provisoirement l'hypothèse supplémentaire que f est minorée.
Cela nous donne, pour tout $x \in Q'_f$:

(2) $a-1 + \mathcal{R}e\, \phi(x) \leqslant f(x)$, où a minore f.

Comme $a \leqslant f(o)$, les relations (1) et (2) montrent que, pour tout $x \in E$, on a :
$a-1+ \mathcal{R}e\, \phi(x) \leqslant f(x)$, c'est-à-dire que ϕ $pr_2\, \Omega_f$ et donc ϕ est continue, par définition de la précontinuité, si 1 est vrai.
Revenons maintenant au cas général (f non nécessairement minorée, mais précontinue).
Soit $(a,\phi) \in \Omega_f$, donc ϕ continue par hypothèse. Nous avons $a \leqslant f_1$, où $f_1 = f - \mathcal{R}e\, \phi$. La fonction f_1 est une fonction convexe précontinue car on voit immédiatement que $pr_2\, \Omega_{f_1} = pr_2\, \Omega_f - \phi$ et donc que $pr_2\, \Omega_{f_1} \subset E'$.
On en déduit que f_1 est précontinue et minorée par a; on peut lui appliquer le résultat déjà établi, donc f_1 est continue pour la topologie de Mackey, ce qui entraine que $f = f_1 + \phi$ l'est aussi. Donc $1 \Rightarrow 2$.

Soit g une fonction convexe sur E, majorée par f. Si 2 est vérifié, alors $\Omega_g \subset \mathbb{R} \times E'$; donc g est précontinue et à fortiori s.c.i. Donc 2 $\Rightarrow$ 3. Par ailleurs 3 $\Rightarrow$ 1, car une fonction linéaire affine réelle s.c.i. est continue (parce que son opposée est une fonction convexe s.c.s.).

Donc 1,2,3 sont équivalents entre eux. De plus, si f est convexe, il en est de même de f^+ ; comme la continuité de f^+ pour $\tau(E,E')$ est équivalente à celle de f, on en déduit que 4 est équivalent aux énoncés précédents. En appliquant maintenant l'équivalence de 1 et 3 à la fonction f^+ , on voit que 4 $\Rightarrow$ 5. Nous établirons que 5 $\Rightarrow$ 1 au moyen du :

LEMME 2.2.4. - *Une fonction linéaire affine, réelle, sur un e.v.t.* E *est continue dès que sa partie positive est s.c.i.*

En effet, on peut se limiter au cas où $K = \mathbb{R}$; soit $g = a+\phi$,$\phi \in E^*$, une fonction linéaire affine sur E réel. On suppose $(a+\phi)^+$ s.c.i. Posons

$$\Omega = \{x \in E \ / \ g^+(x) > o\} = \{ x \in E \ / \ g(x) >> 0\} = \{x \in E \ / \ -\phi(x) < a\}$$

Puisque g^+ est s.c.i, l'ensemble Ω est un ouvert de E.
Si $\Omega = \emptyset$, c'est que $\phi \leqslant -a$ et la fonction convexe ϕ est continue (d'ailleurs cela entraine ici $\phi = 0$)
Si $\Omega \neq \emptyset$, la fonction convexe $-\phi$ est majorée par a sur Ω, elle est donc continue (II p. 60). D'où la conclusion.
Achevons alors la démonstration du théorème. Si 5 est vérifié, pour tout $(a,\phi) \in \Omega_f$ nous avons :

$$a+ \mathfrak{R} e\phi \leqslant f, \text{donc } (a+ \mathfrak{R} e\phi)^+ \leqslant f^+ \text{, ce qui entraine } (a+ \mathfrak{R} e\phi)^+ \text{ s.c.i.}$$

et donc $\phi \in eE'$, d'après le lemme 2.2.4.•

REMARQUE 2.2.5. - Le théorème 2-2 étend aux fonctions convexes en général la propriété des sous-normes (Exemple 2.1.1). Ainsi un espace de Mackey est un elc. sur lequel toute semi-norme (resp. : fonction convexe) précontinue est continue. Propriété caractéristique.

REMARQUE 2.2.6. - Le lemme 2.2.4 peut être complété par la propriété suivante : Une fonction linéaire affine sur un e.v.t. E, est continue dès que son module est s.c.i. En effet, si l'on pose $g = a + \phi$, $\phi \in E^*$, $A = g^{-1}(o)$, on a $A = \{x \in E \ / \ |g|(x) \leqslant 0\} = \{x \in E \ / \ \phi(x) = -a\}$.

REMARQUE 2.2.7. - Si f est une forme sous-linéaire (resp. sous-norme) (resp. semi-norme), on peut remplacer dans l'énoncé du théorème 2-2, au point 3, l'expression "toute fonction convexe" par "toute forme sous-linéaire" (resp. "toute sous-norme") (resp. "toute semi-norme").

En effet, il suffit de prouver que 3 implique toujours 1; pour cela on remarque que, si $a + \psi \leqslant f$, $\psi \in E^*_{\mathbb{R}}$, on a aussi $\psi \leqslant \theta_f$ et $\psi^+ \leqslant (\theta_f)^+$. Si f est sous-linéaire alors $f = \theta_f$ (Remarque 1.3.6), comme ψ est une forme sous-linéaire, 3 implique ψ s.c.i., donc ψ continue. Si f est une sous-norme, on a $f = f^+ = (\theta_f)^+$ et, comme ψ^+ est une sous-norme, 3 implique ψ^+ s.c.i. On conclut dans ce cas avec le lemme 2.2.4. Enfin, si f est une semi-norme, si $a + \mathcal{R}e\ \phi \leqslant f$, avec $\phi \in E^*$ on a $|\phi| \leqslant \check{f}$ (définition de $\check{f}$ et remarque 1-6) et, comme $\check{f} = f$ dans le cas où f est une semi-norme, on voit que $|\phi|$, qui est aussi une semi-norme, est $\leqslant$ f. On conclut dans ce dernier cas avec la remarque 2.2.6.

PROPOSITION 2.3. - *Pour qu'une forme sous-linéaire* f *sur un e.v.t.* E, *le précontinuité de* f *et de* $\check{f}$ *sont équivalentes.*

En effet, il suffit d'appliquer le théorème 2-2 et la propriété 1-6-3 (si E est réel $\check{f} = f^{\mathbb{R}}$) en remarquaunt qu'ici $f = \theta_f$.

REMARQUE 2.3.1. - La forme sous-linéaire s et la sous-norme r de l'exemple 2.1.2 ne sont pas précontinues puisque $\check{r} = \check{s}$ n'est pas précontinue, comme il a été prouvé dans cet exemple.

REMARQUE 2.3.2. - Il existe des fonctions convexes f qui ne sont pas des formes sous-linéaires et pour lesquelles la fonction $\check{f}$ associée est partout finie; $\check{f}$ est alors une semi-norme (Corollaire 1.5.1). La proposition 2-3 ne s'étend pas à ces fonctions, comme le prouve l'exemple suivant :

EXEMPLE 12.3.3.- Soit E un espace vectoriel normé, réel, sur lequel il existe une semi-norme p qui est s.c.i. et non continue (par exemple, 2.1.2). On a :

$p = \theta_p = \check{p} = \sup \phi = \sup|\phi|$ pour $\phi \in pr_2\ \Omega'_p$ (Remarque 1.2.2., Proposition 1-3, remarque 1.3.2).

Pour tout $\phi \in E'$, posons $||\phi|| = \sup|\phi(x)|$ pour x appartenant à la boule unité de E. A tout $\phi \in E'$ associons alors la fonction linéaire affine $L_\phi = \phi - ||\phi||$ qui est négative ou nulle sur la boule unité B de E.

Considérons alors l'enveloppe supérieure f de la dfamille des L_ϕ pour $\phi \in pr_2\Omega'_p$.

Sur B, f est majorée par 0. Donc la fonction convexe f est continue (VI p. 60).

La proposition 1-3 appliquée à f montre que $\check{f} = p$. Mais p n'est pas continue par hypothèse; elle n'est donc pas non plus précontinue (Remarque 2-2-5), car E est un espace de Mackey (III p. 71).

CONCLUSION. - Nous avons construit une fonction convexe continue f (donc précontinue) pour laquelle $\check{f}$ est une semi-norme qui n'est pas précontinue. Cependant nous avons la :

REMARQUE 2.3.4. - Soit f une fonction convexe sur un e.v.t. E telle que $\check{f}$ soit une semi-norme (corollaire 1.5.1.) Montrons que, si f est s.c.i., il en est de même de θ_f et $\check{f}$.

La relation $\check{f}(x) = \sup_{|\lambda|=1} \theta_f(\lambda x)$, qui est valable dans tous les cas (remarques 1.3.2. et 1-6), montre qu'il suffit d'étudier le cas de θ_f. Or la proposition 1-3 montre que $\theta_f = \sup_{u \in E} |f(x+u)-f(u)|$, comme les fonctions $x \mapsto f(x+u)-f(u)$ sont toutes s.c.i. par hypothèse, la propriecé est établie.

On en déduit en particulier que, si E est tonnelé, alors f s.c.i. $\Longrightarrow$ f uniformément continue (Théorème 1.5).

§ III. ESPACES PRETONNELES.

PROPOSITION 3.1. - *Soit E un e.v.t. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. Toute semi-norme s.c.i. est précontinue.

2. Toute fonction convexe s.c.i; est précontinue.

3. Toute fonction convexe majorée par une fonction convexe s.c.i. est elle même s.c.i..

4. Toute semi-norme majorée par une semi-norme s.c.i. est elle-même s.c.i..

En effet, d'une part 2 et 3 sont équivalents (Théorème 2-2) et d'autre part 1 et 4 sont équivalents (Remarque 2.2.7). Comme il est évident que 2 $\Rightarrow$ 1, il reste à prouver que 1 $\Rightarrow$ 2. Soit f une fonction convexe s.c.i.. L'ensemble $Q'_f = \{x \in E / f(x) - f(o) \leq 1\}$ est convexe, absorbant (lemme 2.2.2) et fermé dans E. On en déduit que $Q_f = Q'_f \cap (-Q'_f)$ est un tonneau de $E_{\mathbb{R}}$; sa jauge p est une semi-norme s.c.i. de $E_{\mathbb{R}}$, donc une sous-norme s.c.i. de E. La fonction $\check{p}$ est donc une semi-norme de E (si E est réel $\check{p} = p$) et elle est s.c.i.. (Remarques 2.3.4 et 1.7.2) par hypothèse, $\check{p}$, est donc précontinue; il en est donc de même de p qui est ainsi continue pour $\tau(E,E')$ (théorème 2.2), de sorte que Q_f et Q'_f sont des voisinages de o pour $\tau(E,E')$. On en déduit que f est continue pour cette topologie (lemme 2.2.3), donc précontinue (Théorème 2.2).

REMARQUE 3.1.1.- Si E est un e.l.c., les énoncés de la proposition 3-1 sont encore équivalents à la propriété suivante :

Les conditions (A) et (B) du préambule du § II sont équivalentes entre elles (pour toute fonction convexe f).

DEFINITION 3.2. - *On dit qu'un e.v.t. E est prétonnelé si l'un des énoncés de la proposition 3.1 est vrai.*

REMARQUE 3.2.1. - Il est clair qu'un espace tonnelé est prétonnelé.

REMARQUE 3.2.2. - Un espace prétonnelé est un e.v.t. sur lequel la s.c.i. est héréditaire à gauche pour la relation $\leqslant$ entre les fonctions convexes (Propriété caractéristique).

PROPOSITION 3.3. - *Un espace de Mackey est prétonnelé si et seulement s'il est tonnelé.*

En effet, c'est une conséquence de la définition et de la remarque 2.2.5.

REMARQUE 3.3.1. - La proposition 3-3 s'applique en particulier aux espaces localement convexes métrisables ainsi qu'aux espaces infratonnelés qui sont toujours des espaces de Mackey (III p. 71 et IV p. 142).

EXEMPLE 3.4. - Soit C_0 l'espace de Banach des suites infinies de complexes qui tendent vers zéro, muni de la norme de ℓ_∞ : $||(x_n)|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. On sait que le dual de C_0 s'identifie à l'espace ℓ_1 des suites infinies de complexes $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\Sigma\, a^n$ soit absolument convergente (III, p. 56, exercice 1). La norme de C_0 est s.c.i. pour la topologie dfaible $\sigma(C_0,\ell_1)$ de C_0, elle est même précontinue pour cette topologie faible, puisque la topologie de C_0 est évidemment la topologie de Mackey de $\sigma(C_0,\ell_1)$ (Parce que C_0 est un Banach, donc un espace de Mackey ; C_0 est d'ailleurs tonnelé et $\sigma(C_0,\ell_1)$ est une topologie prétonnelée). Définissons une une fonction convexe f sur C_0 par :

$f[(x_n)] = ||(x_n)|| - 2$; cette fonction convexe est précontinue pour $\sigma(C_0,\ell_1)$; montrons que $|f|$ n'est pas s.c.i. pour cette topologie (elle est continue sur C_0). Il suffit de prouver que $A = \{(x_n)\in C_0 \,/\, |\,||(x_n)||-2| \leqslant 1\}$ n'est pas fermé pour la topologie faible (ce qui prouvera d'ailleurs que cette topologie faible est distincte de celle de C_0 et donc que la topologie $\sigma(C_0,\ell_1)$ est une topologie prétonnelée non tonnelée). On a évidemment $A = \{(x_n)\in C_0/1 \leqslant ||(x_n)|| \leqslant 3\}$ et $o \notin A$. Montrons que 0 est faiblement adhérent à A.

Soient $\varepsilon > 0$ et $Y_1,\ldots,Y_p$ des éléments ℓ_1 il existe un entier m_o tel que si l'on pose $Y_i = (a_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $n \geq n_o \Rightarrow |a_i^n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $i = 1,2,\ldots,p$. Définissons maintenant l'élément (x_n) de c_o par $x_n = o$ si $n \neq m_o$ et $x_{m_o} = 1$. On a pour tout Y_i, $i = 1,2,\ldots p$ et cet élément $X = (x_n)$. $\langle X,Y_i\rangle = \Sigma\, x_n a_i^n = a_i^{m_o}$ (III p. 56 exercice 1) et donc $|\langle X,Y_i\rangle| \leqslant \varepsilon$ pour tout i . Ce qui suffit, puisque $X \in A$, la norme de X étant égale à 1.

CONCLUSION. - On a construit sur un espace localement convexe prétonnelé (et non tonnelé) une fonction convexe précontinue f (et non continue) telle que $|f|$ ne soit pas s.c.i.

Par contre nous avons :

PROPOSITION 3.5. - *Soit* f *une fonction convexe sur un espace prétonnelé* E. *Si* $|f|$ *est s.c.i. alors* f *est précontinue (en particulier* f *est s.c.i.).*

Nous utiliserons deux lemmes.

LEMME 3.5.1. - *Soit* f *une fonction convexe sur un espace vectoriel* E. *On pose :* $Q''_f = \{x \in E / |f(x)-f(o)| \leqslant 1\}$. *Alors on a* $Q'_f \cap (-Q'_f) = Q''_f \cap (-Q''_f)$ *(Lemme 2.2.2).*

En effet, l'inégalité de convexité prouve que pour tout $x \in E$ on a : $2\, f(o) \leqslant f(x)+f(-x)$ et donc $-|f(-x)-f(o)| \leqslant f(x)-f(o)$. On en déduit que $Q'_f \cap (-Q'_f) \subset Q''_f \subset Q'_f$. D'où la conclusion.

LEMME 3.5.2. - *Si une fonction convexe non constante,* f, *définie sur un espace vectoriel* E, *ne prend pas la valeur* a, *alors* a *minore* f.

En effet, on peut toujours se ramener au cas où $a = o$. Si f ne prend pas la valeur 0, f ne peut prendre à la fois des valeurs positives et des valeurs négatives car si cela était le cas, la continuité de f sur le segment formé par deux points de E où f prend des valeurs de signes contraires prouverait que f s'annule sur ce segment. Si le lemme n'était pas vrai, c'est donc que f serait partout négative.

Le lemme 2.2.1 montre alors que pour tout $\lambda \in]o,1]$ on a :

$$f(x) - f(o) \leqslant \lambda\left[f\left(\frac{x}{\lambda}\right) - f(o)\right] \quad \forall x \in E$$

Ce qui entraine que $f(x) - f(o) \leqslant 0$ pour tout $x \in E$.

Mais l'inégalité de convexité entraine que pour tout x :

$$-[f(-x)-f(o)] \leqslant f(x)-f(o) \quad \text{et donc} \quad f(x).f(o) \geqslant o.$$

On aurait donc $f(x) = f(o)$ et f serait constante, contrairement à l'hypothèse. Venons-en à la proposition elle-même. Si f ne prend pas la valeur o, le lemme 3.5.2. prouve que, ou bien f est constante, ou bien $f = |f|$; dans les deux cas f est s.c.i., donc précontinue, puisque l'espace est prétonnelé. Si f prend la valeur 0, à une translation d'argument près, on peut supposer que $f(o) = o$. Dans ce cas, on a $Q''_f = \{x \in E / |f(x)| \leqslant 1\}$ et, par hypothèse Q''_f est fermé dans E. Le lemme 3.5.1 prouve alors que $Q_f = Q'_f \cap (-Q'_f)$ est fermé dans E et le lemme 2.2.2, que c'est un tonneau de $E_{\mathbb{R}}$. La jauge de Q_f est donc une semi-norme s.c.i. de $E_{\mathbb{R}}$; c'est une sous-norme s.c.i. de E; elle est donc précontinue (E prétonnelé) et Q_f est par conséquent un voisinage de o pour $\tau(E,E')$ (Théorème 2.2). On en déduit que Q'_f est un voisinage de 0 pour $\tau(E,E')$ et le lemme 2.2.3 permet de conclure (avec le théorème 2.2).

REMARQUE 3.5.3. - Si E est tonnelé, alors $|f|$ s.c.i. entraine que f est continue, puisque E est alors un espace de Mackey (Remarque 3.3.1).

REMARQUE 3.5.4. - Sur un espace tonnelé une fonction convexe f est continue dès que f (resp. f^+) (resp. $|f|$) est s.c.i. En effet pour $|f|$, cela résulte de la remarque 3.5.3.; pour f et f^+, cela résulte de la remarque 3.2.1, du théorème 2.2 et des remarques 2.2.5 et 3.3.1. On remarquera ainsi que sur un tonnelé les fonctions convexes possèdent cette même propriété que les fonctions affines réelles sur un e.v.t. quelconque (lemme 2.2.4 et remarque 2.2.6). Sur les prétonnelés, on a la propriété analogue obtenue en remplaçant continuité par précontinuité.

PROPOSITION 3.6. - *Soit* E *un e.l.c. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *L'espace* E *est prétonnelé ;*
2. *Tout convexe fermé et borné de* E'_σ *est compact ;*
3. *Tout disque fermé et borné de* E'_σ *est compact ;*
4. *Tout enveloppe supérieure, partout finie, de formes linéaires réelles continues sur* E *est précontinue.*
5. *Toute enveloppe supérieure, partout finie, de fonctions convexes précontinues (resp : s.c.i.) est précontinue.*

En effet, soit B un convexe fermé et borné de E'_σ ; il définit une semi-norme s.c.i. de E : $p = \sup|\phi|$ pour $\phi \in B$. On a de plus $B \subset pr_2\ \Omega_p$. Si 1 est vrai, alors p est précontinue; donc $pr_2\ \Omega_p \subset E'$ par définition 2.1. Mais la remarque 1.7.5 montre que $pr_2\ \Omega_p$ est compact dans E^*_σ, donc dans E'_σ, puisque E^*_σ induit sa topologie sur E'_σ. Comme B est fermé dans E'_σ, on voit que 1 $\Rightarrow$ 2. Mais 2 $\Rightarrow$ 3 trivialement. Montrons que 3 $\Rightarrow$ 1. Soit p une semi-norme s.c.i. de E; l'ensemble $pr_2\ \Omega'_p = \{\phi \in E' / \mathcal{R}e\phi \leq p\}$ est un disque fermé et borné de E'_σ ; il est donc compact. Mais $p = \sup \mathcal{R}e\phi$ pour $\phi \in pr_2\ \Omega'_p$ (Remarque 1.2.4) et donc on a aussi $p = \check{p} = \sup|\phi|$, pour $\phi \in pr_2\ \Omega'_p$. (Remarque 1.6 ou 1.3.2 suivant le cas). On en déduit que p est continue pour $\tau(E,E')$ (IV p. 94); donc que E est prétonnelé, (Définition 3-2 et Théorème 2.2). Comme une fonction convexe précontinue est s.c.i., la définition 3-2 prouve que 1 $\Rightarrow$ 5 ; mais 5 $\Rightarrow$ 4 trivialement et la remarque 1.2.2 prouve que 5 $\Rightarrow$ 1. Ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 3.6.1. Les énoncés 2 et 3 de la proposition 3-6 montrent que la qualité de prétonnelé pour un e.l.c. est une propriété du dual faible E'_σ. Dégageons-la. Remarquons que dans tout e.l.c. les convexes fermés et bornés (et même les disques fermés et bornés) forment une *base des bornés* parce (parce que l'enveloppe convexe, l'enveloppe équilibrée, l'adhérence, de tout borné est un borné). On en déduit que dans tout e.l.c. séparé, les énoncés suivants sont équivalents :

a) toute partie bornée est relativement compacte ;

b) toute partie fermée et bornée est compacte ;

c) tout convexe fermé et borné est compact ;

d) tout disque fermé et borné est compact.

Mais les e.l.c. séparés qui vérifient a) sont par définition les μ-espaces (IV p. 124). Ainsi les e.l.c. prétonnelés sont caractérisés par la condition suivante :

E'_σ est un μ-espace.

Mais E'_σ n'est pas un e.l.c. séparé quelconque, puisque c'est un espace faible, il est induit par E^*_σ sur E', de sorte qu'une partie complète de E'_σ est aussi complète dans E^*_σ ; on en déduit que dans E'_σ, il y a équivalence entre partie ocompacte et partie bornée et complète. Ainsi pour E'_σ, les énoncés a), b), c), d) précédents sont encore équivalents au suivant :

a') toute partie fermée et bornée est complète.

Or, cette condition caractérise les espaces *quasi-complets* (IV p. 138). Mais comme E'_σ est un espace faible, E'_σ est quasi-complet si et seulement si, il est *semi-réflexif* (V p. 299) (c'est-à-dire si la topologie forte du dual est compatible avec la dualité, autrement dit si l'espace E'_σ coïncide avec son bidual).

TH2OR7ME 3-7. - *Soit* E *un e.l.c. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *L'espace* E *est prétonnelé ;*
2. *Le dual faible* E'_σ *est un* μ*-espace ;*
3. *Le dual faible* E'_σ *est quasi-complet ;*
4. *Le dual faible* E'_σ *est semi-réflexif ;*
5. *La topologie de Mackey de* E *est tonnelée ;*
6. *La topologie forte* $\beta(E,E')$ *est compatible avec la dualité (c'est-à-dire que* $\beta(E,E') = \tau(E,E')$) ;
7. *L'espace* E_t *est prétonnelé pour toute (resp. une) topologie* t *d'e.v.t. sur* E , *plus fine que* $\sigma(E,E')$ *et moins fine que* $\tau(E,E')$.

En effet, l'équivalence des quatre premiers énoncés résulte de la remarque 3.6.1. La remarque 1.2.2 prouve que, sur E, les fonctions convexes s.c.i. sont exactement les mêmes que celles qui sont s.c.i. pour $\tau(E,E')$. La définition 3.2 et le théorème 2.2 prouvent alors que 1 $\Longrightarrow$ 5. Mais 5 $\Longrightarrow$ 6, car la topologie forte de E, qui est définie par la famille des semi-normes s.c.i. de E (c'est-à-dire les $\sup|\phi|$ pour ϕ décrivant une partie bornée de E'_σ), est identique à la topologie forte de E_τ , espace de Mackey associé à E et qu'un espace tonnelé est toujours muni de sa topologie forte, par définition. De plus, comme la topologie forte est plus fine que la topologie de Mackey, elle lui est identique si et seulement si, elle est compatible avec la dualité (E,E'). On a aussi 6 $\Longrightarrow$ 1, car 6 entraine que toute semi-norme s.c.i. est continue pour $\tau(E,E')$, donc est précontinue (Théorème 2.2). Ce qui prouve l'équivalence des énoncés 1 à 6. Pour le dernier, on remarque que, si t est unt otopologie d'e.v.t. sur E, comprise entre $\sigma(E,E')$ et $\tau(E,E')$ et si $t_\circ$ est la topologie de E, alors :

a) les topologies t , $t_\circ$, $\sigma(E,E')$ et $\tau(E,E')$ définissent les mêmes fonctions convexes s.c.i., puisque cela est vrai pour $\sigma(E,E')$ et $\tau(E,E')$, d'après la remarque 1.2.2.

b) les topologies t et $t_\circ$ définissent la même topologie de Mackey et donc les mêmes fonctions convexes précontinues (théorème 2.2).

On en déduit que E est prétonnelé si et seulement si E_t est pretonnelé. Ce qui achève tout.

REMARQUE 3.7.1. - Si E est un e.v.t. quelconque, le système dual (E,E') est séparé en E', on peut encore définir la *topologie forte* $\beta(E,E')$, comme la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E'_σ . C'est la topologie définie par la famille de semi-normes $|\sup|$, où ϕ décrit une partie bornée de E'_σ . Elle ne dépend que du système dual (E,E'), en ce sens qu'elle n'est pas modifiée si l'on change la topologie de E en une autre topologie d'e.v.t. donnant le même dual E'.

Elle est en général strictement moins fine que la topologie définie sur E par la famille de toutes les semi-normes s.c.i., qui, elle, peut être modifiée par un changement de topologie sur E n'affectant pas E', comme le prouve l'exemple 2.1.3.

On peut alors étendre la validité du théorème 3-7 aux e.v.t. quelconques à condition de remplacer l'énoncé 1 par l'un ou l'autre des énoncés suivants :

1') l'espace faible E_σ est prétonnelé,

1")une des topologies sur E, compatible avec la dualité (E,E'), est prétonnelée.

On notera encore que, dans ce cas général, E est prétonnelé si et seulement si la topologie définie par la famille de toutes les semi-normes s.c.i. de E est compatible avec la dualité (définition et théorème 2.2). Cela implique alors que $\beta(E,E')$ est aussi compatible avec la dualité, donc que les énoncés 2 à 7 du théorème 3-7 sont vrais ; mais ces conditions ne suffisent plus à assurer la précontinuité de E. En effet, l'exemple 2.1.3 est le cas d'un espace non prétonnelé (il existe des semi-normes s.c.i. non précontinues) pour lequel la topologie de Mackey de l'espace est la topologie grossière, qui est évidemment tonnelée.

PROPOSITION 3.8. - *Soient* $(E_i)_{i\in I}$ *une famille d'e.l.c. sur* K, E *un espace vectoriel sur* K, *pour tout* $i\in I$ *une application linéaire* u_i *de* E_i *dans* E. *On désigne par* $\mathcal{T}$ *la topologie localement convexe finale sur* E, *définie par la famille* $(U_i)_{i\in I}$.

1. Pour qu'une fonction convexe f *sur* E *soit continue (resp. précontinue) pour* $\mathcal{T}$, *il faut et il suffit que pour tout* $i\in I$, $f\circ u_i$ *soit continue (resp. précontinue) sur* E_i.

2. Si les E_i *sont prétonnelés pour* $i\in I$, *alors la topologie est prétonnelée.*

En effet, si l'on pose $Q_f = Q'_f \cap (-Q'_f)$, pour toute fonction convexe f sur E, c'est-à-dire $Q_f = \{x\in E / f(x)-f(o) \leq 1 \text{ et } f(-x)-f(o) \leq 1\}$, on voit que pour tout $i\in I$ on a

$$Q_{fou_i} = u_i^{-1}(Q_f).$$

Mais les ensembles Q_f sont des ensembles convexes, symétriques et absorbants d'après le lemme 2.2.2. Or, il résulte immédiatement du lemme 2.2.3 que la continuité de f (resp. $f \circ u_i$) est équivalente à la propriété pour Q_f (resp. (resp. $Q_{f \circ u_i}$) d'être un voisinage de o sur $E_{\mathfrak{T}}$ (resp. E_i). On en déduit l'énoncé 1 concernant la continuité (II p. 72). En ce qui concerne la précontinuité, remarquons d'abord que si $(a,\phi) \in \Omega_f$, alors $(a,\phi \circ u_i) \in \Omega_{f \circ u_i}$. On en déduit que si les f u_i sont précontinues pour tout $i \in I$, cela entraine que $\phi \circ u_i$ est continue pour tout i (définition 2-1) et donc que ϕ est continue pour $\mathfrak{T}$ (en raison d'un résultat classique sur les topologies localement convexes finales, II p. 72). Ainsi : $f \circ u_i$ précontinue pour tout $i \in I \Rightarrow$ f précontinue pour $\mathfrak{T}$. La réciproque résulte du lemme suivant :

LEMME 3.8.1. - *Soit* $u : E \to F$ *une application linéaire d'un e.v.t.* E *dans un autre* F. *On suppose que* u *est continue (resp. continue pour les topologies faibles* $\sigma(E,E')$ *et* $\sigma(F,F')$*). Alors si* g *est une fonction convexe précontinue sur* F, $g \circ u$ *est précontinue sur* E.

En effet, on vérifie immédiatement que u continue, implique la continuité de u pour les topologies faibles, on se ramène alors à $u : E_\sigma \to F_\sigma$ continue. On remarque alors que les topologies faibles considérées sont également les topologies faibles des topologies de Mackey $\tau(E,E')$, $\tau(F,F')$. Un résultat classique (IV, p. 111) permet alors de conclure à la continuité de u pour les topologies de Mackey, il suffit ensuite de se référer au théorème 2.2. Pour le second énoncé de la proposition 3-8, on note que si f est une fonction convexe s.c.i. pour $\mathfrak{T}$, les fonctions $f \circ u_i$ sont s.c.i. sur E_i pour tout $i \in I$, si l'on suppose alors E_i prétonnelé pour tout $i \in I$; cela entraine $f \circ u_i$ précontinue pour tout $i \in I$ et donc f précontinue pour en vertu du premier énoncé. Ce qui suffit.

REMARQUE 3.8.2. - Modifions l'hypothèse du préambule de la proposition 3.8 de la façon suivante : Soient $(E_i)_{i \in I}$, une famille d'e.v.t. sur K, E un espace vectoriel sur K, pour tout $i \in I$, une application linéaire u_i de E_i dans E.

Soit $\mathcal{C}$ une topologie d'e.v.t. sur E telle que les u_i soient continues et que pour tout $f \in E^*$, la continuité de f pour $\mathcal{C}$ soit équivalente à la continuité simultanée des $f \circ u_i$ pour tout $i \in I$ (Si $\mathcal{C}$ et les E_i sont localement convexes, alors $\mathcal{C}$ est la topologie localement convexe finale définie par les $(U_i)_{i \in I}$ [II] p. 72). On voit que la démonstration de la proposition 3-8 reste valable dans ce cas, sans modification, en ce qui concerne la précontinuité dans 1 et l'énoncé 2. En particulier :

COROLLAIRE 3.8.3. - *Soit* E *un e.v.t.* N *un sous-espace de* E, u *la surjection canonique de* E *sur* E/N .

1. *Pour qu'une fonction convexe* g *sur* E/N *soit précontinue, il faut et il suffit que* $g \circ u$ *soit précontinue.*
2. *Si* E *est prétonnelé,* E/N *l'est aussi.*

PROPOSITION 3.9. - *Soit* $u : E \to F$ *une application linéaire surjective d'un e.v.t.* E *sur un autre* F. *On suppose que la topologie de* E *est image réciproque de celle de* F *par* u. *Alors l'application* $g \mapsto g \circ u$ *définit une bijection entre les familles suivantes de fonctions numériques sur* F *et* E *respectivement :*

a) les fonctions continues ;
b) les fonctions s.c.i. ;
c) les fonctions convexes (resp. semi-normes) s.c.i. ;
d) les fonctions convexes (resp. semi-normes) continues ;
e) les fonctions convexes (resp. semi-normes) précontinues.

En effet, on remarque d'abord que l'hypothèse entraine que u est une application ouverte. On en déduit immédiatement que pour toute $g \in \mathbb{R}^F$ on a :
g continue (resp. s.c.i.) $\Longleftrightarrow$ $g \circ u$ continue (resp. s.c.i.).
Il en résulte que l'on peut appliquer la remarque 3.8.2 et donc que pour toute fonction convexe $g \in \mathbb{R}^F$, on a :

$$g \text{ précontinue} \Longleftrightarrow g \circ u \text{ précontinue.}$$

Par ailleurs le fait que u soit linéaire et surjective entraine pour toute fonction $g \in \mathbb{R}^F$:

g convexe (resp. semi-norme) $\Leftrightarrow$ $g \circ u$ convexe (resp. semi-norme).

Si l'on remarque enfin que l'application $g \mapsto g \circ u$ de $\mathbb{R}^F$ dans $\mathbb{R}^E$ est injective (puisque u est surjective), on voit que la proposition 3-9 résulte du lemme suivant :

LEMME 3.9.1. - *Soit* $\phi : T \to S$ *une application surjective d'un espace topologique* T *dans un autre. Si la topologie de* T *est image réciproque de celle de* S *par* ϕ*, alors pour toute fonction numérique* f *s.c.i. sur* T*, il existe une fonction numérique (unique)* g *sur* S *telle que* $f = g \circ \phi$ *(et* g *est s.c.i.).*

En effet, tout revient à prouver ici l'existence de g (le caractère s.c.i. s'établit comme il y a déjà été dit, en remarquant que u est ouverte), c'est-à-dire que l'implication suivante :

$(u(x_1) = u(x_2)) \Longrightarrow (f(x_1) = f(x_2))$ est vraie.

Si cela n'était pas, il existerait x_1, x_2 dans E tels que $u(x_1) = u(x_2)$ et $f(x_1) < f(x_2)$ et, comme f est s.c.i., on pourrait construire un voisinage de x_2 qui ne contiendrait pas x_1, ce qui est absurde, car l'égalité $u(x_1) = u(x_2)$ entraine, par hypothèse, que x_1 et x_2 ont le même filtre de voisinages.

REMARQUE 3.9.2. - Sous les hypothèses de la proposition 3.9, l'espace E est prétonnelé si et seulement si l'espace F est prétonnelé. En effet, cela résulte aussi bien de la proposition 3.9 que de la remarque 3.8.2. D'ailleurs on vérifie immédiatement que E est localement convexe si et seulement si F est localement convexe. La proposition 3.9 montre que E est un espace de Mackey (resp. tonnelé) si et seulement si F est de ce type.

REMARQUE 3.9.3. - La proposition 3.9 et la remarque 3.9.2, s'appliquent en particulier au cas où E est un e.v.t., F le séparé associé E_s de E et u la surjection canonique de E sur E_s.

En fait, les hypothèses de la proposition 3.9 entrainent que E et F ont le *même séparé associé* ; de façon précise, on vérifie facilement que ces hypothèses entrainent l'existence d'un isomorphisme de E_s sur F_s qui rend commutatif le diagramme ci-contre, où ϕ et ψ désignent les injections canoniques.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\phi"'] & F \arrow[d, "\psi"] \\ E_s \arrow[r, "v"] & F_s \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 3.10. - *Soit* $E = \prod_{i \in I} E_i$ *un produit d'e.v.t. Pour toute fonction convexe s.c.i.,* f *sur* E, *il existe une partie finie* J *de* I *telle que* $f(x) = f(o)$ *dès que* $x_i = o$, *pour tout indice* i *de* J.

Nous utiliserons plusieurs lemmes.

LEMME 3.10.1. - *Soient* E *un espace vectoriel* , H *une partie symétrique de* E, *et* g *une fonction convexe sur* E, *nulle en* o. *Alors si* $g(x) < o$ *pour tout* $x \in H$, *on a* $g/H = o$.

En effet, il suffit d'écrire pour tout $x \in H$:

$o = 2\,g(o) \leqslant g(x) + g(-x)$ et, comme $-x \in H$, on a aussi $g(x) \leqslant o$, $g(-x) < o$ et donc $g(x) = o$.

LEMME 3.10.2. - *La proposition 3.10 est vraie si l'on suppose* f *continue sur* E *et nulle en* O.

En effet, il existe un voisinage Ω de o dans E sur lequel f est majorée par 1. Il existe donc une partie finie J de I telle que f soit majorée par 1 sur l'ensemble $H = \{x \in E / x_i = o, \forall i \in J\}$. Mais H est un sous-espace vectoriel de E et, pour tout $x \in H$, tout $\lambda \in]0,1]$, on a : $g(x) \leq \lambda\, g(\frac{x}{\lambda})$ (Lemme 2.2.1) et, comme $x/\lambda \in H$, on en déduit que $g(x) \leqslant \lambda$ et donc que g est négative ou nulle sur H. Le lemme 3.10.1 achève la démonstration.

LEMME 3.10.3. - *Soit* $E = \prod_{i \in I} E_i$ *un produit d'e.v.t. Pour tout* $i \in I$, *on désigne par* σ_i *l'injection, linéaire, continue de* E_i *dans* E *définie par* $y \mapsto \sigma_i(y)$ *où* $(\sigma_i(y))_j$ *est égal à* o *pour* $j \neq i$ *et à* 1 *pour* $j = i$. *Si une fonction convexe* g *sur* E, *s.c.i. nulle en* o, *est telle que* $g \circ \sigma_i = o$ *pour tout* $i \in I$, *alors* $g = o$.

En effet, on sait que le sous-espace vectoriel H de E, formé des points dont toutes les coordonnées sont nulles sauf, peut-être, un nombre fini d'entre elles, est partout dense dans E. Or, g est nulle sur H, car, si $x \in H$, il existe une partie finie J de I telle que $x = \sum_{i \in J} \sigma_i \circ pr_i(x)$, d'où l'on tire, par convexité, $g(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in J} g \circ \sigma_i \circ pr_i(nx)$, où $n = \text{Card}(J)$.

On en déduit que $g(x) \leq 0$ pour $x \in H$ et donc $g/H = 0$ (Lemme 3.10.1). Mais, g étant s.c.i., l'ensemble des points où g est négative ou nulle est fermé et contient H; c'est donc E tout entier et le lemme 3.10.1 prouve alors que $g = 0$.

Ceci étant, pour démontrer la proposition 3-10, on peut supposer que $f(o) = 0$ en posant si nécessaire $g = f - f(o)$. Dans ce cas, avec les notations du lemme 3.10.3, posons $g_i = g \circ \sigma_i$ et $J = \{i \in I / g_i \neq o\}$. Si J est fini, le lemme 3.10.3 prouve que J vérifie la condition de la proposition 3.10. Supposons donc J infini, on peut définir alors une injection θ de $\mathbb{N}$ dans J et pour tout $n \in \mathbb{N}$, un vecteur e_n de $E_{\theta(n)}$ par la condition que $g_{\theta(n)}(e_n) \neq o$. Définissons à partir de là une application u de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans E par

$$(u[(\lambda_n)])_i = \begin{cases} o \text{ si } i \notin \theta(\mathbb{N}) \\ \lambda_n \cdot e_n \text{ si } i = \theta(n) . \end{cases}$$

Il est clair que u est une application linéaire continue de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans E (elle est même injective). On en déduit que $g \circ u$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, s.c.i. , nulle en 0. Mais $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est tonnelé (espace localement convexe, métrisable et complet, VII, p. 323-330), donc $g \circ u$ est continue puisque s.c.i. (Remarque 3.5.4). Le lemme 3.10.2 montre que la proposition 3-10 est vraie pour $g \circ u$; or la définition de u montre que, si l'on désigne par ε_k le vecteur de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf celle de rang k qui est égale à 1, on a $g \circ u(\varepsilon_k) = g_{\theta(k)}(e_k) = \neq 0$.

Ce qui est en contradiction avec le fait que $g \circ u$ vérifie la proposition 3.10. Donc J est toujours fini et la proposition 3.10 établie.

COROLLAIRE 3.10.4. - *Soit* $E = \prod_{i \in I} E_i$ *un produit d'e.v.t. Pour toute semi-norme* p, *s.c.i., sur E, il existe une partie finie* J *de* I *et, pour tout* $i \in J$, *une semi-norme* q_i , *s.c.i. sur* E_i, *telles que :*

1/ $q_i = p \circ \sigma_i$ *(où* σ_i *est le plongement de* E_i *dans* E *défini dans le lemme 3.10.3).*

2/ $p \leq \sum_{i \in J} q_i \circ pr_i$.

De plus, si p *est continue (resp. précontinue) (resp. bornée sur les bornés de* E*), alors* q_i *est continue (resp. précontinue), (resp. bornée sur les bornés de* E_i*).*

En effet, appliquons la proposition 3.10 pour définir J, et pour tout $x \in E$, posons $x = y + \sum_{i \in J} \sigma_i \circ pr_i(x)$. Les coordonnées deg sont nulles pour les indices $i \in J$, donc $p(y) = o$ et, puisque p est sous-additive , on a $p(x) \leq \sum_{i \in J} q_i \circ pr_i(x)$, avec $q_i = p \circ \sigma_i$. Si p est continue, q_i l'est aussi. Si p est précontinue, le lemme 3.8.1 prouve que q_i est précontinue. Enfin, on conclut en remarquant que l'image par σ_i d'un borné de E_i est un borné de E.

COROLLAIRE 3.10.5. - *Tout produit d'e.v.t. prétonnelés est prétonnelé.*

En effet, si q est une semi-norme s.c.i. sur $E = \prod_{i \in I} E_i$, le corollaire 3.10.4 prouve que $p \leq \sum_{i \in J} q_i \circ pr_i$, où J est une partie finie de I. Mais si les E_i sont prétonnelés, alors les q_i qui sont s.c.i., sont précontinues (définition 3.2); donc les $q_i \circ pr_i$ sont précontinues sur E (lemme 3.8.1). On en déduit que p est précontinue (parce que continue pour la topologie de Mackey de E, théorème 2.2). Donc E est prétonnelé.

REMARQUE 3.10.6. – Le corollaire 3.10.4 permet d'établir de la même manière que tout produit d'espaces tonnelés (resp. infratonnelés) (resp. de Mackey) est un espace tonnelé (resp. infratonnelé) (resp. de Mackey).

Il permet d'établir également que, pour tout produit $E = \prod_{i \in I} E_i$ d'e.v.t. , la topologie de Mackey (resp. forte) de E est le produit des topologies de Mackey (resp. fortes) des E_i (pour la topologie forte, on remplace d'abord E par E_τ pour se ramener à des e.l.c., Remarque 3.7.1).

Enfin ce corollaire 3.10.4 permet d'étendre aux e.v.t., le théorème classique sur l'identification du dual d'un produit à la somme directe des duals (établir dans le cas des e.l.c.).

PROPOSITION 3.11. – *Soit* F *un sous-espace dense d'un e.v.t.* E. *Si deux fonctions convexes précontinues sur* E *ont la même restriction à* F *elles sont identiques.*

En effet, si F est partout dense dans E, cela reste vrai si l'on remplace la topologie de E par la topologie faible $\sigma(E,E')$ et, comme un ensemble convexe à la même adhérence pour $\sigma(E,E')$ et $\tau(E,E')$, on en déduit que F est encore partout dense dans E pour la topologie de Mackey $\tau(E,E')$. Le théorème 2.2 permet de conclure.

REMARQUE 3.11.1. – Sur un e.l.c. non prétonnelé, il peut exister des semi-normes s.c.i. distinctes, qui coïncident sur un sous-espace partout dense. Pour le voir, reportons-nous à l'exemple 2.1.2 et définissons sur E les formes sous-linéaires suivantes :

$$u : \phi \mapsto u(\phi) = \sup \phi \quad \text{et} \quad v : \phi \mapsto v(\phi) = \sup(\phi^+) .$$

On voit que $v = u^+ = s^+$ (où s est définie dans l'exemple 2.1.2). On a déjà établi dans 2.1.2 que $v = s^+$ est s.c.i.; on démontre de la même façon que u est s.c.i. [$\forall a \in \mathbb{R}$, si $u(\phi_o) > a$, il existe $m > o$ tel que $u(\phi) \leqslant a$ implique $\int_o^1 |\phi - \phi_o|(x)dx \geqslant m$].

Soit alors H l'hyperplan des ofonctions nulles en 0; c'est le noyau de l'application de Dirac $\phi \mapsto \phi(o)$. Il est bien connu que cette application n'est pas continue pour la norme de L^1 , donc H est partout dense dans E. Il est évident que u et v sont distinctes et qu'elles coïncident sur H. Construisons à partir de là deux semi-normes s.c.i. qui possèdent cette même propriété.

Soit J la forme linéaire $\phi \mapsto J(\phi) = \int_0^1 \phi(x)dx$, J est évidemment continue sur E (elle est de norme 1) et on a , de façon évidente , $j \leq u \leq v$.

Posons $p = u-J$ et $q = v-J$; ce sont des formes sous-linéaires s.c.i., donc $\check{p}$ et $\check{q}$ sont des semi-normes s.c.i. (Remarques 2.3.4, 1.3.2 et 1.3.6). Or p et q coïncident sur H et la relation $\check{p}(x) = \sup_{|\lambda|=1} p(\lambda x)$ (Remarques 1.3.2 et 1.3.6) prouve que $\check{p}$ et $\check{q}$ coïncident également sur H. Il reste à prouver que $\check{p}$ et $\check{q}$ sont distinctes, ce qui n'est pas évident. Comme nous avons : $\check{p}(\phi) = \operatorname{Max}[p(\phi), p(-\phi)]$ et $\check{q}(\phi) = \operatorname{Max}[q(\phi), q(-\phi)]$ (Remarque 1.3.2), nous voyons que, si ϕ est une fonction constantes et égale à a sur $[0,1]$, nous pouvons écrire pour une telle fonction : $p(\phi) = 0$, $q(\phi) = \sup(0,-a)$ et donc $\check{p}(\phi) = 0$, $\check{q}(\phi) = |a|$. Ce qui suffit.

On remarquera que $\check{u}$ et $\check{v}$ sont bien des semi-normes s.c.i., mais elles ne sont pas distinctes, car la relation $v = u^+$ entraine que $\check{v} = \check{u}$ (Remarque 1.3.3).

REMARQUE 3.12 . - La proposition 3.8 permet de définir, pour un e.l.c. donné E, une *topologie prétonnelée associée*; c'est la borne inférieure des topologies prétonnelées sur E qui sont localement convexes et plus fines que la topologie de E. L'étude de cette topologie peut être entreprise à partir d'une construction transfinie analogue à celle de la topologie tonnelée associée. On peut montrer, en particulier, ainsi, que le couple formé de E muni de la topologie prétonnelée associée et de l'application identique de E dans lui-même, est solution du problème co-universel des applications linéaires continues d'un espace prétonnelé dans E.

BIBLIOGRAPHIE.

I BOURBAKI, *Topologie générale, ch. 2,* Hermann 1971.

II BOURABKI, *Espaces vectoriels topologiques, ch. 2,* Hermann 1973.

III BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques, ch. 3 et 4,* Hermann.

IV GROTHENDIECK A., *Espaces vectoriels topologiques,* 3e édition Sao Paulo 1964.

V KÖTHE G., *Topological vector spaces, I* , Springer-Verlag 1969.

VI MOREAU J.J., *Fonctionnelles convexes* , Séminaire sur les équiations aux dérivées partielles. Collège de France 1966-67.

VII SCHWARTZ L., *Analyse. Topologie Générale et analyse fonctionnelle,* Hermann 1970.

J. MAUMUS
Centre d études et de recherches
mathématiques et physiques
Rue de Damas
BEYROUTH LIBAN