PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

KHALIL NOUREDDINE
WILLIAM HABRE

Sous-algèbres localement convexes de $C(T)$

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 1 , p. 27-54
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_1_27_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1977 t.14-1

SOUS-ALGEBRES LOCALEMENT CONVEXES DE C(T)

par Khalil NOUREDDINE et William HABRE

INTRODUCTION . Dans ce travail on reprend les notions de recouvrements simples et dominants ([11]) d'un espace complètement régulier séparé T, et on procède à une classification de ces recouvrements. A tout recouvrement simple ρ de T on associe une sous-algèbre (notée $C^{\rho}(T)$) de l'algèbre (notée $C(T)$) des applications continues de T dans le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. $C^{\rho}(T)$ est l'algèbre des applications de T dans $\mathbb{R}$, qui sont bornées sur les éléments de ρ . Dans un premier paragraphe on étudie les algèbres $C^{\rho}(T)$; et dans le second on cherche les relations qui existent entre ces algèbres et l'algèbre $C(T)$, où on retrouve par des démonstrations nouvelles les deux théorèmes classiques de Nachbin-Shirota. Dans le paragraphe 3 on étudie sur $C^{\rho}(T)$ une topologie localement convexe intermédiaire entre la topologie de la convergence compacte et celle de la convergence uniforme sur les éléments de ρ . Cette topologie a des propriétés analogues à celle de la topologie γ (étudiée dans ([11]) où à celles de la topologie sous-stricte β_0 de [16].

NOTATIONS ET PRELIMINAIRES. Tout espace topologique considéré dans ce travail est supposé séparé et complètement régulier. Pour un tel espace T on pose les notations suivantes :

$C(T)$ (resp. $C^{\infty}(T)$) est l'algèbre des applications continues (resp. continues et bornées) de T dans le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Pour tout élément $f \in C^{\infty}(T)$, $\|f\| = \operatorname{Sup}\{|f(t)|, t \in T\}$. L'application $f \longrightarrow \|f\|$ est la norme de la convergence uniforme sur $C^{\infty}(T)$.
$B^{\infty} = \{f \in C^{\infty}(T) ; \|f\| \leq 1\}$ est la boule unité fermée de $C(T)$.

$C_c(T)$ (resp. $C_c^\infty(T)$) est l'espace $C(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) muni de la topologie de la convergence compacte .

Pour toute partie $A \subset T$, $\bar{A}$ est l'adhérence de A dans T .

Pour toute partie $A \subset T$, ϕ_A est la fonction caractéristique de A (i.e, $\phi_A(t) = 1$ si $t \in A$ et $\phi_A(t) = 0$ si $t \in T - A$).

Un K_σ dans T est une partie de T qui est une réunion d'une suite de compacts dans T .

Pour toute partie A de T et toute application ϕ de T dans $\mathbb{R}$, $\|\phi\|_A = \mathrm{Sup}\,\{|\phi(t)|,\ t \in A\}$ et $\|\phi\| = \|\phi\|_T$.

Une partie A de T est dite bornée ([3], [5]) si, pour toute application $f \in C(T)$, $\|f\|_A$ est fini . L'espace T est dit de type μ ([3]) si tout borné dans T est relativement compact.

βT est le compactifié de Stone-Čech de T ([2], [7]).

υT est le replété de T ([2], [5], [7]). L'espace υT est de type μ .

Pour toute application f de T dans $\mathbb{R}$, $S_0(f)$ est le support strict de f (i.e, l'ensemble des $t \in T$ tels que $f(t) \neq 0$) et $S(f)$ est le support de f (i.e, l'adhérence de $S_0(f)$ dans T).

En ce qui concerne les espaces localement convexes (elc) nous suivons les ouvrages classiques et, à titre d'exemples [8] et [13] . Pour les notions de b-espaces, espaces b-tonnelés, et autres, nous renvoyons à [10] .

1. *LES ALGEBRES $C^\rho(T)$.*

1.1. *DEFINITIONS ET GENERALITES.*

Rappelons d'abord les définitions suivantes *([11])*.

(1.1.1) Définitions. *Soit T un espace complètement régulier séparé.*

(a) On appelle recouvrement simple de T, tout recouvrement de T formé d'une suite croissante $\rho = (T_n)_{n\geq 1}$ de fermés de T . Une partie A de T est dite dominée par ρ s'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $A \subset T_{n_0}$

(b) *On appelle recouvrement dominant (ou k-dominant) de T, tout recouvrement simple ρ de T qui domine les parties compactes de T. Une partie A de T est dite dominée (ou k-dominée) si A est dominée par tout recouvrement dominant.*

Un recouvrement simple ou dominant $\rho = (T_n)_{n\geq 1}$ est dit stationnaire s'il existe un entier n_o tel que $T_{n_o} = T$.

La proposition suivante montre qu'en général, un recouvrement simple n'est pas nécessairement dominant :

<u>(1.1.2) Proposition.</u> Pour que tout recouvrement simple de T soit dominant, il faut et il suffit que tout compact de T soit fini.

<u>*Preuve.*</u> La condition est trivialement suffisante; et elle est nécessaire d'après la proposition (2.2) de [11] (voir aussi [6]).

Si $\rho = (T_n)_{n\geq 1}$ est un recouvrement simple de T, on désigne par $C^{\rho}(T)$ l'algèbre des applications continues de T dans $\mathbb{R}$ qui sont bornées sur T_n pour tout $n \geq 1$. $C^{\rho}(T)$ est une sous-algèbre de $C(T)$; elle lui est égale si et seulement si les T_n sont des bornés T (voir notations et préliminaires). L'algèbre $C^{\infty}(T)$ est définie de la même manière si l'on pose $\infty = (T_n)_{n\geq 1}$, le recouvrement simple de T tel que, pour tout $n \geq 1$, $T_n = T$ (c'est le recouvrement simple "trivial" de T). Si $\rho = (T_n)$ et $\rho' = (T'_n)$ sont deux recouvrements simples de T, on rappelle que ρ est dit moins fin que ρ' (ou ρ' est plus fin que ρ) si pour tout $n \geq 1$ il existe un $m \geq 1$ tel que $T'_n \subset T_m$. Il est clair que la relation " ρ est moins fin que ρ' " est une relation de préordre sur l'ensemble des recouvrements simples de T, qui admet le recouvrement trivial ∞ comme plus petit élément. Pour cette relation, deux recouvrements simples de T admettent une borne supérieure et une borne inférieure.

Si le recouvrement simple $\rho = (T_n)$ est moins fin que le recouvrement simple $\rho' = (T'_n)$ alors on a $C^{\rho}(T) \subset C^{\rho'}(T)$. Il en résulte que l'ensemble des algèbres $C^{\rho}(T)$ est un ensemble filtrant croissant et décroissant pour la relation d'inclusion; et $C^\infty(T)$ est contenue dans $C^\rho(T)$, pour tout recouvrement simple ρ.

Pour toute application $f \in C(T)$, on pose $\rho(f) = (T_n(f))_{n\geq 1}$, où pour tout $n \geq 1$, $T_n(f) = \{t \in T \; ; \; |f(t)| \leq n\}$. $\rho(f)$ est un recouvrement dominant de T, et est dit recouvrement associé à l'application f. On vérifie immédiatement que l'ensemble des algèbres $C^{\rho(f)}(T)$, lorsque f décrit $C(T)$, est filtrant croissant et a pour réunion l'algèbre $C(T)$.

1.2. TOPOLOGIES SUR $C^\rho(T)$.

Soit $\rho = (T_n)$ un recouvrement simple de T et soit $C^\rho(T)$ la sous-algèbre de $C(T)$ associée à ρ. Une première topologie qui s'impose sur $C^\rho(T)$ est la topologie de la ρ-convergence (ou topologie de la convergence uniforme sur les éléments T_n de ρ). C'est une topologie localement convexe métrisable compatible avec la structure algébrique de $C^\rho(T)$ Elle est définie par la suite des semi-normes $f \longrightarrow \|f\|_{T_n} = \operatorname{Sup}\{|f(t)|, \; t \in T_n\}$ et est notée t_ρ. On note $C^\rho_\rho(T)$ (resp. $C^\infty_\rho(T)$) l'algèbre $C^\rho(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) munie de la topologie t_ρ.

La proposition suivante précise dans quel cas la topologie t_ρ est normable :

(1.2.1) Proposition . *L'espace $C^\rho_\rho(T)$ est normable si et seulement si le recouvrement simple ρ est stationnaire .*

Preuve . Il est immédiat que la condition est suffisante, car si ρ est stationnaire alors $C^\rho(T) = C^\infty(T)$ et t_ρ est définie par la norme de la convergence uniforme . Inversement, si ρ n'est pas stationnaire, alors par complète régularité de T on vérifie que tout voisinage de zéro pour t_ρ contient des droites;par suite il n'existe pas de normes continues sur $C^\rho_\rho(T)$. La proposition est donc démontrée.

(1.2.2) Proposition. *Tout borné de $C^\rho_\rho(T)$ est contenu dans l'adhérence d'un borné de $C^\infty_\rho(T)$. En particulier $C^\infty(T)$ est partout dense dans $C^\rho_\rho(T)$.*

Preuve. Soit B un borné dans $C^\rho_\rho(T)$. Pour tout entier n et tout élément $f \in B$, posons $f_n = \mathrm{Sup}(-n, \inf(f\ , n)\ )$. Il est clair que la suite (f_n) converge vers f dans $C^\rho_\rho(T)$. D'autre part, soit $B' = \{f_n\ , f \in B$ et n parcourant les entiers $n \geq 1\}$; B' est un borné de $C^\infty_\rho(T)$ et son adhérence dans $C^\rho_\rho(T)$ contient B .

Pour un recouvrement simple quelconque ρ l'espace $C^\rho_\rho(T)$ n'est pas en général complet. Ce qui nous permet de poser la définition suivante :

(1.2.3) Définition . Soit $\rho = (T_n)$ un recouvrement simple de T . On dit que le recouvrement ρ est complétant si l'espace $C^\rho_\rho(T)$ est complet. Le recouvrement ρ est dit régulier si pour tout $n \geq 1$, T_n est contenu dans l'intérieur $\mathring{T}_{n+1}$ de T_{n+1} .

La proposition suivante explique la relation entre recouvrements dominants, complétants et réguliers :

(1.2.4) Proposition. (a) Tout recouvrement régulier est complétant. En particulier, pour tout élément $f \in C(T)$, le recouvrement $\rho(f)$ *est complétant.*

(b) Tout recouvrement complétant est dominant.

Preuve . (a). Soit $\rho = (T_n)$ un recouvrement régulier de T . Si (g_n) est une suite de Cauchy dans $C^\rho_\rho(T)$; alors (g_n) converge simplement vers une application g de T dans $\mathbb{R}$, continue et bornée sur chaque T_n . Mais la suite $(\mathring{T}_n)$, où $\mathring{T}_n$ est l'intérieur de T_n, recouvre T et l'application g est donc partout continue. Alors $g \in C^\rho(T)$ et (g_n) converge vers g dans $C^\rho_\rho(T)$. La deuxième assertion de (a) est évidente car pour tout $f \in C(T)$, le recouvrement $\rho(f)$ associé à f est régulier.

(b). Cette assertion résulte du lemme plus général suivant :

(1.2.5) Lemme . Si $\rho = (T_n)$ est un recouvrement complétant de T, alors toute partie bornée de T est dominée par ρ .

Preuve du lemme . Soit B une partie bornée de T et soit $V^\rho(B\ ,\ 1) = \{f \in C^\rho(T)\ ;\ \|f\|_B \leq 1\}$. Il est clair que l'ensemble $V^\rho(B\ ,\ 1)$ est un disque absorbant et simplement fermé dans $C^\rho(T)$; c'est donc un tonneau de $C^\rho_\rho(T)$, et comme cet espace est un espace de Fréchet, alors $V^\rho(B\ ,\ 1)$ est un voisinage de zéro . Il existe, par suite, un entier $n_\circ \geq 1$ et un nombre réel $r > 0$ tels que l'ensemble $V^\rho(T_{n_\circ}\ ,\ r) = \{f \in C^\rho(T)\ ;\ \|f\|_{T_{n_\circ}} \leq r\}$ soit contenu dans $V^\rho(B\ ,\ 1)$. On en déduit, par complète régularité de T, que B est contenu dans $T_{n_\circ}$; et le lemme est démontré .

(1.2.6) Remarque. Il est à noter que la réciproque de l'assertion (a) de la proposition précédente n'est pas vraie en général : en effet, soient E un espace de Fréchet de dimension infinie et $(V_n)_{n\geq 1}$ un système fondamental décroissant de voisinages de zéro dans E . Soit aussi $T = E'_c$ le dual de E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les disques compacts de E . On sait d'après [5] que E'_c est un elc de Kelley et est un k-espace (i.e., toute application de E'_c dans tout autre espace topologique, continue sur les compacts est partout continue). D'autre part si, pour tout entier $n \geq 1$, on pose $T_n = V_n^\circ$ (polaire de V_n dans E'); alors T_n, qui est un disque équicontinu et faiblement fermé dans E', est compact dans $E'_c = T$. De plus, tout compact de T est contenu dans l'un des T_n . Ce qui fait que la suite $\rho = (T_n)$ est un recouvrement complétant de T . Ce recouvrement n'est pas régulier, car si l'un des éléments de la suite (T_n) avait un intérieur non vide, alors l'espace $E'_c = T$ serait de dimension finie; ce qui est absurde .

(1.2.7). Remarque. Notons encore que la réciproque de l'assertion (b) de la proposition (1.2.4) n'est pas vraie à son tour : en effet, soient E un espace normé tonnelé non complet et E'_σ son dual muni de la topologie faible $\sigma(E'\ ,\ E)$. Pour tout entier $n \geq 1$, posons $T_n = n\, B^\circ$, où B° désigne le polaire dans E' de la boule unité B de E . Il est clair que T_n est compact dans E'_σ et que la suite (T_n) en constitue un recouvrement dominant . Ce recouvrement n'est pas complétant, car autrement l'espace E serait complet.

La deuxième topologie sur $C^\rho(T)$, qui s'impose à notre étude, est la topologie de la convergence compacte. Notons par t_c la topologie de la convergence compacte sur $C(T)$ et par t_c^ρ sa restriction à $C^\rho(T)$, pour tout recouvrement simple ρ de T. On désigne par $C_c^\rho(T)$ l'algèbre $C^\rho(T)$ muni de la topologie t_c^ρ. Pour tout recouvrement dominant ρ de T, la topologie t_c^ρ est moins fine que la topologie t_ρ. L'identité de ces deux topologies n'a lieu que dans des cas très particuliers :

(1.2.8) <u>*Proposition*</u>. *Soit $\rho = (T_n)$ un recouvrement simple de T. Les deux topologies t_ρ et t_c^ρ sont identiques si et seulement si le le recouvrement ρ est dominant et T_n est compact pour tout $n \geq 1$.*

<u>*Preuve*</u>. La condition est évidemment suffisante. Elle est nécessaire d'après le lemme 2 de [12].

Il est facile de voir, comme dans la proposition (1.2.2), que tout borné de $C_c(T)$ est contenu dans l'adhérence d'un borné de $C_c^\infty(T)$. Il en résulte en particulier que, pour tout recouvrement simple ρ, tout borné de $C_c^\rho(T)$ est contenu dans l'adhérence d'un borné de $C_c^\infty(T)$ et par suite $C_c^\infty(T)$ est partout dense dans $C_c^\rho(T)$.

Un espace complètement régulier séparé T est dit un $k_{\mathbb{R}}$-espace si toute application de T dans $\mathbb{R}$ est continue dès qu'elle est continue sur les compacts de T. On sait d'après [19] que, pour que T soit un $k_{\mathbb{R}}$-espace, il faut et il suffit que $C_c(T)$ soit complet, ou quasi-complet. La proposition suivante donne des conditions sur T et ρ pour que $C_c^\rho(T)$ soit complet :

(1.2.9) <u>*Proposition*</u>. *Soit $\rho = (T_n)$ un recouvrement simple de T. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *(a) L'espace $C_c^\rho(T)$ est complet*
- *(b) L'espace $C_c^\rho(T)$ est quasi-complet.*
- *(c) L'espace T est un $k_{\mathbb{R}}$-espace et pour tout entier $n \geq 1$, T_n est une partie bornée de T.*

<u>*Preuve*</u>. Il suffit de démontrer que (b) implique (c). Soit, en effet,

f une application de T dans $\mathbb{R}$ continue sur tout compact de T. Supposons, dans une première étape, que f soit bornée sur T. A une constante multiplicative près, on peut supposer aussi que $\|f\| \leq 1$. Pour tout compact K de T, désignons par g_K la restriction de f à K. Par complète régularité de T il existe une fonction f_K, appartenant à la boule unité B^∞ de $C^\infty(T)$, telle que la restriction de f_K à K soit égale à g_K. La suite généralisée (f_K), K décrivant l'ensemble des compacts de T, est une suite généralisée de Cauchy dans B^∞ qui est complet. Donc cette suite converge vers un élément de B^∞, qui ne peut être que l'application f. Par suite f est continue.

Pour le cas général où f n'est pas bornée, on pose $f_n = \mathrm{Sup}(-n, \mathrm{Inf}(f, n))$ pour tout entier $n \geq 1$. Les applications f_n sont bornées sur T, et sont continues sur tout compact de T. D'après ce qui précède, les f_n sont partout continues et appartiennent à $C^\infty(T)$ qui est un sous-ensemble de $C^\rho(T)$. Alors, la suite (f_n), qui est une suite de Cauchy dans $C^\rho_c(T)$, converge vers une application appartenant à $C^\rho(T)$. Cette application est nécessairement égale à f. Ce qui montre, en même temps, que T est un $k_{\mathbb{R}}$-espace et $C(T) = C^\rho(T)$, égalité qui montre que les T_n sont des bornés dans T.

(1.2.10) <u>Corollaire</u>. *Si le recouvrement $\rho = (T_n)$ est dominant, alors l'espace $C^\rho_c(T)$ est complet (ou quasi-complet) si et seulement si T est un $k_{\mathbb{R}}$-espace et ρ est une base de bornés dans T.*

<u>Preuve.</u> D'après la proposition précédente et le lemme (1.2.5), il suffit de démontrer que le recouvrement ρ est complétant. Or il est facile de voir que, dans un $k_{\mathbb{R}}$-espace, tout recouvrement dominant est complétant.

1.3 - CARACTERES DE $C^\rho(T)$, ESPACES ρT.

Par analogie avec l'étude classique de l'algèbre $C^\infty(T)$ (ou de l'algèbre $C(T)$), passons à l'examen des caractères de l'algèbre $C^\rho(T)$ associée à un recouvrement simple $\rho = (T_n)$ de T :

(1.3.1) <u>*Définition .*</u> *On appelle caractère de l'algèbre $C^\rho(T)$ toute forme linéaire multiplicative et unitaire sur $C^\rho(T)$.*

Les propriétés immédiates des caractères de $C^\rho(T)$ sont résumées dans la proposition suivante :

(1.3.2) <u>*Proposition .*</u> *Soit u un caractère de $C^\rho(T)$.*

(a) *Pour toute application $f \in C^\rho(T)$, il existe un entier n_o tel que $u(f) \in \overline{f(T_{n_o})}$.*

(b) *Pour toute $f \in C^\rho(T)$ on a $|u(f)| = u(|f|)$, en particulier $f \geq 0 \Longrightarrow u(f) \geq 0$.*

(c) *Pour toute suite finie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ d'éléments de $C^\rho(T)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un point $t \in T$ tel que $|u(f_k) - f_k(t)| \leq \varepsilon$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$.*

<u>*Preuve .*</u> Elle est analogue à celle de la proposition (3.2.1) de [2]:

(a) supposons d'abord que $u(f) = 0$. Si, pour tout $n \geq 1$, $u(f) = 0 \notin \overline{f(T_n)}$, alors il existe $r_n > 0$ tel que $|f(t)| \geq r_n$ pour tout $t \in T_n$; il en résulte que f est inversible dans $C^\rho(T)$; et l'égalité $f(1/f) = 1$ implique $1 = u(1) = u(f) \cdot u(1/f)$, d'où $u(f) \neq 0$, ce qui est absurde . Dans le cas où $u(f)$ est quelconque, on pose $g = f - u(f).1$. La fonction g vérifie $u(g) = 0$ et par suite, il existe n_o tel que $u(g) = 0 \in \overline{g(T_{n_o})}$; d'où $u(f) \in \overline{f(T_{n_o})}$.

(b) Remarquons que, d'après (a), $f \geq 0 \Longrightarrow u(f) \geq 0$. Donc $u(|f|) \geq 0$ et, puisque $f^2 = |f|^2$, on a $(u(|f|))^2 = u(f^2) = (u(f))^2$; d'où $u(|f|) = |u(f)|$.

(c) L'application $g = \sum_{1 \leq k \leq n} |f_k - u(f_k).1|$ vérifie, grâce à (b), $u(g) = 0$, donc $0 \in \overline{g(T_{n_o})}$, pour un entier n_o convenable. Ainsi il existe $t \in T_{n_o}$ tel que $g(t) \leq \varepsilon$ et à fortiori on a $|u(f_k) - f_k(t)| \leq \varepsilon$ pour tout k .

Dans le cas de l'algèbre $C^\infty(T)$, tout caractère est continu pour la norme de la convergence uniforme. Le compactifié de Stone-Čech βT

de T, est défini comme étant l'ensemble des caractères de $C^\infty(T)$, muni de la topologie faible. C'est à dire βT est un sous-ensemble faiblement fermé de la boule unité du dual de $C^\infty(T)$; et par suite il est compact et contient T comme sous-ensemble partout dense. βT est aussi le complété de T pour la structure uniforme la moins fine rendant les fonctions $f \in C^\infty(T)$ uniformément continues.

Mais dans le cas d'un recouvrement simple ρ quelconque, nous ignorons si tout caractère de $C^\rho(T)$ est continu pour la topologie de la ρ-convergence t_ρ . C'est pour cela, nous distinguons entre l'ensemble de tous les caractères de $C^\rho(T)$ et celui des caractères t_ρ-continus : désignons par u_ρ la structure uniforme la moins fine sur T rendant uniformément continues toutes les fonctions $f \in C^\rho(T)$. L'espace uniforme (T , u_ρ) est un sous-espace de $\mathbb{R}^{C^\rho(T)}$ qui est complet. Le complété de (T , u_ρ) est égal à l'adhérence de T dans $\mathbb{R}^{C^\rho(T)}$ muni de la structure uniforme induite. Désignons par $\hat{T}^\rho$ ce complété et, pour toute fonction $f \in C^\rho(T)$, désignons par $\hat{f}^\rho$ son unique polongement à $\hat{T}^\rho$. Il est clair que $\hat{T}^\rho$ est l'ensemble des caractères de l'algèbre $C^\rho(T)$, muni de la structure uniforme induite ; et la topologie sous-jacente, qui est la topologie la moins fine sur $\hat{T}^\rho$ rendant continues les fonctions $\hat{f}^\rho$, induit sur T sa topologie initiale. D'autre part, notons par ρT l'ensemble des caractères continus de $C^\rho_\rho(T)$, et munissons le de la topologie induite par celle de $\hat{T}^\rho$. Alors, l'espace ρT contient T comme sous-espace topologique partout dense. Pour toute fonction $f \in C^\rho(T)$, on désigne par f^ρ le prolongement de f à ρT ; f^ρ est la restriction de $\hat{f}^\rho$ à ρT .

(1.2.3) __*Proposition .*__ *Soit $\rho = (T_n)$ un recouvrement simple de T .*

(a) Tout élément u de ρT est complètement déterminé par sa restriction à $C^\infty(T)$.

(b) Pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble $\overline{T_n}^\rho$, adhérence de T_n dans $\hat{T}^\rho$, est une partie compacte de ρT, et on a $\rho T = \bigcup_n \overline{T_n}^\rho$

(c) L'espace ρT s'identifie à un sous-espace topologique de βT; et pour tout $n \geq 1$, $\overline{T_n}^\rho = \overline{T_n}^\beta$, où $\overline{T_n}^\beta$ désigne l'adhérence de T_n dans βT .

Preuve . L'assertion (a) est évidente car $C^{\infty}(T)$ est partout dense dans $C^{\rho}_{\rho}(T)$; démontrons (b) : il est clair d'abord que pour tout $f \in C^{\rho}(T)$ et tout $u \in \hat{T}^{\rho}$, on a $u(f) = \hat{f}^{\rho}(u)$. Ce qui fait que, si $u \in \overline{T}_n^{\rho}$, on a : $|u(f)| = |\hat{f}^{\rho}(u)| \leq \|\hat{f}^{\rho}\|_{\overline{T}_n^{\rho}} = \|f\|_{T_n}$ pour tout $f \in C^{\rho}(T)$. Donc u est continu sur $C^{\rho}_{\rho}(T)$. Et puisque T_n est précompact pour la structure uniforme u_{ρ}, il est évident que $\overline{T}_n^{\rho}$ est compact. D'autre part si $v \in \rho T$ et $v \notin \overline{T}_n^{\rho}$ pour tout entier $n \geq 1$, alors il existe une application continue f_n^{ρ} de ρT dans l'intervalle $[0 , 1]$ telle que $f_n^{\rho}(v) = 1$ et $f_n^{\rho} \equiv 0$ sur $\overline{T}_n^{\rho}$. Désignons par f_n la restriction de f_n^{ρ} à T. La suite (f_n) converge vers zéro dans $C^{\rho}_{\rho}(T)$ et pourtant $v(f_n) = f_n^{\rho}(v) = 1$, pour tout $n \geq 1$; ce qui est absurde et achève la démonstration de (b).
Prouvons (c) : d'après (a) l'ensemble ρT s'identifie à un sous-ensemble de βT. D'autre part, il est facile de voir que l'on peut identifier aussi les trois algèbres $C^{\infty}(T)$, $C^{\infty}(\rho T)$ et $C(\beta T)$; pour tout $f \in C^{\infty}(T)$, le prolongement f^{ρ}, de f à ρT, n'est autre que la restriction du prolongement f^{β} de f à βT. Comme la topologie de ρT (resp. βT) est la topologie la moins fine sur ρT (resp. βT) rendant continues les $f^{\rho} \in C^{\infty}(\rho T)$ (resp. $f^{\beta} \in C(\beta T)$), alors ρT s'identifie, topologiquent aussi, à un sous-espace de βT. Le reste de l'assertion (c) est évident.

(1.2.4) Corollaire. L'espace ρT est un espace replet et contient υT (replété de T) comme sous-espace partout dense.

Preuve. D'après l'assertion (b) de la proposition précédente, l'espace ρT est un K_{σ} ; ce qui suffit pour que ρT soit replet ([2] , [7]). D'autre part, on sait que υT est le plus petit sous-espace replet de βT, contenant T ; ce qui montre que $\upsilon T \subset \rho T$.

Désignons par $\bar{\rho} = (\overline{T}_n^{\rho})$, où $\overline{T}_n^{\rho}$ est l'adhérence de T_n dans ρT, qui est aussi l'adhérence de T_n dans $\hat{T}^{\rho}$. La suite $\bar{\rho}$ est un recouvrement simple de ρT et, sur l'algèbre $C(\rho T)$, on peut considérer la topologie $(t_{\bar{\rho}})$ de la $\bar{\rho}$ -convergence; on désigne par $C_{\bar{\rho}}(\rho T)$ l'espace $C(\rho T)$ muni de cette topologie. Il est clair que l'on a :

(1.2.5) <u>*Théorème .*</u> *L'application de prolongement $f \longrightarrow f^\rho$ de $C^\rho(T)$ dans $C(\rho T)$ et l'application de restriction $g \longrightarrow g/_T$ de $C(\rho T)$ dans $C^\rho(T)$ sont deux isomorphismes, algébriques et topologiques, réciproques l'un de l'autre des algèbres $C^\rho_\rho(T)$ et $C_{\bar\rho}(\rho T)$.*

Comme conséquence de ce théorème on a :

(1.2.6) <u>*Corollaire .*</u> *Si le recouvrement $\rho = (T_n)$ est complétant, alors ρT est un k-espace hémicompact.*

<u>*Preuve .*</u> D'après le théorème précédent, les deux espaces $C^\rho_\rho(T)$ et $C_{\bar\rho}(\rho T)$ sont isomorphes algébriquement et topologiquement. Il en résulte que, si le recouvrement ρ est complétant, alors l'espace $C_{\bar\rho}(\rho T)$ est un espace de Fréchet, et par suite le recouvrement $\bar\rho$ est complétant. Donc, d'après la proposition (1.2.4), $\bar\rho$ est dominant. Ce qui fait que ρT est hémicompact et $C_{\bar\rho}(\rho T) = C_c(\rho T)$. D'autre part, la proposition (1.2.9) montre que ρT est un $k_{\mathbb{R}}$-espace, et il est bien connu qu'un $k_{\mathbb{R}}$-espace hémicompact est un k-espace (on rappelle qu'un espace topologique χ est dit un k-espace si toute partie de χ est fermée dès que son intersection avec tout compact de χ est fermée).

Si le recouvrement $\rho = \rho(f)$, où $f \in C(T)$, alors on peut améliorer sensiblement le corollaire précédent :

(1.2.7) <u>*Théorème .*</u> *Si $\rho = \rho(f)$, $f \in C(T)$, alors ρT est un espace localement compact σ-compact.*

<u>*Preuve.*</u> $\rho = (T_n)$, où $T_n = \{t \in T \; ; \; |f(t)| \leq n\}$. Soit f^ρ le prolongement de f à ρT et, pour tout $n \geq 1$, posons $U^\rho_n = \{u \in \rho T \; ; |f^\rho(u)| < n\}$ et $U_n = U^\rho_n \cap T$. Puisque U^ρ_n est un ouvert dans ρT, alors on a $\bar U^\rho_n = U^\rho_n \cap \bar T^\rho \subset \overline{U^\rho_n \cap T}^\rho = \bar U^\rho_n \subset \bar T^\rho_n$. Ce qui fait que les U^ρ_n sont relativement compacts dans ρT et, comme ils recouvrent ρT, on en déduit le théorème.

(1.2.8) <u>Remarque.</u> *On peut vérifier facilement que, lorsque $\rho = \rho(f)$, alors l'espace ρT n'est autre que l'espace $\upsilon_f T$ de ([7], page 125, 8B. 2)*.

Un autre résultat important, qui va nous être très utile pour la suite et qui se trouve d'ailleurs dans ([7], page 125), est le théorème suivant :

(1.2.9) <u>Théorème.</u> *L'espace υT (replété de T) est l'intersection des espaces ρT, lorsque ρ décrit l'ensemble des $\rho(f)$ pour $f \in C(T)$.*

<u>*Preuve.*</u> Il suffit de démontrer que si $u \in \beta T - \upsilon T$, alors il existe un recouvrement $\rho = \rho(f)$, $f \in C(T)$, tel que $u \notin \rho T$. Or, on sait d'après le théorème (5.5.7) de [2] que, pour un tel u, il existe $g \in C^{\infty}(T)$ tel que $g > 0$ sur T et $u(g) = 0$. Soit $\rho = \rho(\frac{1}{g}) = (T_n(\frac{1}{g}))$, où $T_n(\frac{1}{g}) = \{t \,;\, \frac{1}{n} \leq g(t)\}$. Démontrons que $u \notin \rho T$: en effet si $u \in \rho T$, alors il existe un entier n_0 tel que $u \in T^{\rho}_{n_0}(\frac{1}{g}) = T^{\beta}_{n_0}(\frac{1}{g})$; ce qui implique que $u(g) \geq \frac{1}{n_0}$. D'où la contradiction et par suite la preuve du théorème.

Nous avons signalé plus haut que nous ignorons si tout caractère de l'algèbre $C^{\rho}(T)$ est t_{ρ}-continu ? - La réponse à cette question est affirmative lorsque le recouvrement ρ est complétant ; mais avant de démontrer ce résultat, démontrons d'abord la proposition suivante :

(1.2.10) <u>*Proposition .*</u> *Soit $\rho = (T_n)$ un recouvrement simple de T. Pour que le recouvrement ρ soit complétant, il faut et il suffit que toute application f de T dans $\mathbb{R}$, bornée et u_{ρ}-uniformément continue sur chaque T_n, soit continue sur T.*

<u>*Preuve.*</u> La condition est suffisante : en effet, soit $(f_k)_{k\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $C^{\rho}_{\rho}(T)$. La suite (f_k) converge simplement vers une application $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$. De plus la convergence est uniforme sur chaque T_n ; donc f est bornée et u_{ρ}-uniformément continue sur T_n pour tout n. D'où la continuité de f d'après l'hypothèse, et ainsi $C^{\rho}_{\rho}(T)$ est complet.

Réciproquement, soit f une application de T dans $\mathbb{R}$, bornée et u_ρ-uniformément continue sur T_n, pour tout $n \geq 1$. Désignons par g_n la restriction de f à T_n ; g_n admet un prolongement continu unique, $\bar{g}_n$, sur $\bar{T}_n^\rho$ lequel est compact dans ρT. Mais par complète régularité de ρT, il existe $f_n \in C^\infty(\rho T)$ tel que la restriction de f_n à $\bar{T}_n^\rho$ soit égale à $\bar{g}_n$. Il en résulte que la suite (f_n) est une suite de Cauchy dans $C_\rho^\rho(T)$;et par suite elle converge, dans $C_\rho^\rho(T)$, vers une fonction qui ne peut être que f. La condition est donc nécessaire, et la proposition est démontrée.

(1.2.11) <u>Théorème.</u> *Si le recouvrement $\rho = (T_n)$ est complétant, alors tout caractère de l'algèbre $C^\rho(T)$ est t_ρ-continu.*

<u>Preuve.</u> Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un caractère u de l'algèbre $C^\rho(T)$, qui ne soit pas t_ρ-continu. Puisque l'espace $C_\rho^\rho(T)$ est un espace métrisable, donc bornologique, il existe une partie bornée B dans $C_\rho^\rho(T)$ telle que u ne soit pas borné sur B. Donc, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un élément $f_n \in B$ tel que $|u(f_n)| \geq 2^n$.

Posons $h_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{|f_k|}{2^k}$, pour $n \geq 1$. La suite (h_n) converge uniformément sur chaque T_n vers la fonction $f = \sum_{k \geq 1} \frac{|f_k|}{2^k}$. Il en résulte que f est bornée et u_ρ-uniformément continue sur T_n pour tout $n \geq 1$; donc f est un élément de $C^\rho(T)$ d'après la proposition précédente. Or, pour tout entier $n \geq 1$, on a $u(f) \geq u(h_n) \geq n$; ce qui est absurde, et le théorème est démontré.

2. $C(T)$ et $C^\rho(T)$.

2.1 - PREMIER THEOREME DE NACHBIN-SHIROTA.

Dans ce qui suit nous étudions la relation entre l'espace $C_c(T)$ et les sous-espaces $C_c^\rho(T)$, lorsque le recouvrement ρ décrit l'ensemble des recouvrements $\rho(f)$, où $f \in C(T)$.

D'abord, nous avons le résultat suivant :

(2.1.1.) <u>*Theorème .*</u> *L'espace* $C_c(T)$ *est la limite inductive des espaces* $C_c^{\rho}(T)$, ρ *décrivant l'ensemble des* $\rho(f)$, $f \in C(T)$.

<u>*Preuve.*</u> Nous avons déjà remarqué que l'espace $C(T)$ est égal à la réunion des $C^{\rho}(T)$ pour $\rho = \rho(f)$ et $f \in C(T)$, et que l'ensemble de ces sous-espaces est filtrant croissant pour la relation d'inclusion. Il est clair aussi que la topologie de la convergence compacte t_c sur C(T) est moins fine que la topologie t' (limite inductive des topologies $t_c^{\rho(f)}$). Reste à démontrer que t_c est plus fine que t'. Or $C^{\infty}(T)$ est partout dense dans $C_c(T)$ et dans chacune des algèbres $C_c^{\rho}(T)$. Il en résulte que $C^{\infty}(T)$ est, aussi, partout dense dans $C_{t'}(T)$; et que les deux topologies t_c et t' coïncident sur cet ensemble. D'autre part, soit V' un voisinage fermé de zéro dans $C_{t'}(T)$; et soit V un voisinage ouvert de zéro dans $C_c(T)$ tel que $V \cap C^{\infty}(T) \subset V' \cap C^{\infty}(T)$. Comme t' est plus fine que t_c, V est aussi un ouvert pour t'. Par conséquent on a

$$V = V \cap \overline{C^{\infty}(T)}^{t'} \subset \overline{V \cap C^{\infty}(T)}^{t'} \subset \overline{V' \cap C^{\infty}(T)}^{t'} \subset V' .$$

Les adhérences sont dans $C_{t'}(T)$ - . Donc V' est un voisinage de zéro dans $C_c(T)$ et le théorème est démontré.

Le théorème précédent nous permet de trouver une nouvelle démonstration du théorème classique suivant : L'espace $C_c(T)$ est tonnelé si et seulement si T est un μ-espace ([3], [9], [17]). Dans cette démonstration nous utiliserons les mesures de Radon sur T . Pour cette notion de mesures nous nous référons à [1] . Si μ est une mesure de Radon sur T, nous notons par $|\mu|$ la variation totale de μ et nous appelons support de μ le plus petit fermé $S(\mu)$ de T tel que $|\mu|\ (T - S(\mu)) = 0$. On sait qu'il existe une isométrie linéaire entre l'espace des mesures de Radon sur T et l'espace des formes linéaires sur $C^{\infty}(T)$, continues sur la boule unité B^{∞} pour la topologie de la convergence compacte ; chacun de ces espaces étant supposé muni de sa norme habituelle. Donc toute mesure de Radon μ sur T définit sur βT une mesure de Radon que nous notons μ^{β} . On vérifie facilement que le support de μ est la trace sur T du support de μ^{β} .

Le lemme suivant ([11]) nous permet de donner une caractérisation plus utile du support d'une mesure de Radon sur T :

(2.1.2) <u>*Lemme.*</u> *Soit μ une mesure de Radon sur T. Si U est un ouvert de T, alors $|\mu|(U) = \mathrm{Sup}\ \{\int f\, d|\mu|\ ,\ f \in C(T),\ 0 \leq f \leq 1$ et $S(f) \subset U\}$.*

Partant de ce lemme, on démontre aisément que le support de μ est le plus petit fermé $S(\mu)$ dans T tel que $\int f\, d\mu = 0$ chaque fois que l'on a $f \in C^\infty(T)$ et $\|f\|_{S(\mu)} = 0$.

Plus généralement si H est un ensemble de mesures de Radon sur T, on appelle support de H le plus petit fermé $S(H)$ de T tel que $|\mu|(T - S(H)) = 0$, pour toutes les mesures $\mu \in H$. $S(H)$ est l'adhérence de la réunion des $S(\mu)$, $\mu \in H$; c'est aussi le plus petit fermé de T tel que $\int f\, d\mu = 0$, pour toute mesure $\mu \in H$, chaque fois que $f \in C^\infty(T)$ et $\|f\|_{S(H)} = 0$.

Revenons maintenant à l'espace $C_c(T)$: d'abord toute forme linéaire continue sur $C_c(T)$ peut être identifiée à une mesure de Radon μ sur T et à la mesure de Radon μ^β sur βT, définie par μ . Dans ce cas $S(\mu) = S(\mu^\beta)$; et $S(\mu)$ est donc compact. Par conséquent, on peut identifier le dual de $C_c(T)$ à l'espace des mesures de Radon sur βT, à support compact contenu dans T .

(2.1.3) <u>*Théorème (Nachbin).*</u> *Si H est une partie faiblement bornée du dual de $C_c(T)$, alors $S(H)$ est une partie bornée de T .*

<u>*Preuve.*</u> Il s'agit de prouver que $S(H)$ est dominé par tout $\rho(f)$, $f \in C(T)$. Or d'après le théorème (2.1.1), l'espace $C_c(T)$ est la limite inductive des sous-espaces $C_c^\rho(T)$, $\rho = \rho(f)$ et $f \in C(T)$. Comme $C^\rho(T)$ est partout dense dans $C_c(T)$, alors H est une partie faiblement bornée du dual de $C_c^\rho(T)$, pour $\rho = \rho(f)$. H est aussi une partie faiblement bornée du dual de $C_\rho^\rho(T)$, car pour $\rho = \rho(f)$, la topologie t_c^ρ est moins fine que t_ρ .

Mais l'espace $C^{\rho}_{\rho}(T)$, pour $\rho = \rho(f)$, est un espace de Fréchet ; et on sait que toute partie faiblement bornée dans le dual d'un tel espace, est équicontinue. Il en résulte qu'il existe un entier n_o et un nombre réel $r > 0$ tels que $|\mu(g)| \le r \|g\|_{T_{n_o}}$ pour toute mesure $\mu \in H$ et toute fonction $g \in C^{\rho}(T)$. Donc pour toute mesure $\mu \in H$ et toute fonction $g \in C^{\infty}(T)$, on a $\|g\|_{T_{n_o}} = 0 \implies \mu(g) = 0$. Par suite $S(H) \subset T_{n_o} = T_{n_o}(f) = \{t \in T \; ; \; |f(t)| \le n_o\}$; et le théorème est démontré .

Pour toute partie V de $C_c(T)$, désignons par V° son polaire dans le dual de $C_c(T)$; et pour toute partie A de T et tout réel $r > 0$, désignons par $V(A , r) = \{f \in C(T) \; ; \; \|f\|_A \le r\}$.

Le lemme suivant est l'assertion (b) du théorème 7 de [3].

(2.1.4) <u>Lemme .</u> Soit V un tonneau de $C_c(T)$ contenant la boule unité B^{∞} de $C^{\infty}(T)$. Alors, on a $V(S(V^{\circ}), 1) \subset V$.

Avant de prouver le premier théorème de Nachbin-Shirota, remarquons que, si V est un tonneau quelconque de $C_c(T)$, alors $V \cap C^{\infty}(T)$ est un tonneau dans l'espace de Banach $C^{\infty}(T)$. $V \cap C^{\infty}(T)$ est donc un voisinage de zéro pour la norme de la convergence uniforme, et par suite il existe $r > 0$ tel que $B^{\infty} \subset rV$.

(2.1.5) <u>Théorème (NACHBIN-SHIROTA).</u> L'espace $C_c(T)$ est tonnelé si et seulement si T est un μ-espace .

<u>Preuve.</u> La condition est suffisante : en effet, soit V un tonneau de $C_c(T)$. En multipliant, au besoin, par un réel positif, on peut supposer que V contient la boule unité B^{∞} . Soient V° le polaire de V dans le dual de $C_c(T)$, et $S(V^{\circ})$ le support de V° . D'après le théorème (2.1.3), $S(V^{\circ})$ est un borné de T lequel est un μ-espace . Donc $S(V^{\circ})$ est compact ; et pour conclure que V est un voisinage de zéro dans $C_c(T)$, il suffit d'appliquer le lemme (2.1.4) .

Réciproquement, supposons que $C_c(T)$ soit tonnelé et démontrons que

T est un μ-espace : en effet, soit A un borné de T ; alors l'ensemble $V(A\ ,\ 1) = \{f \in C(T) : \|f\|_A \leq 1\}$ est évidemment un tonneau de $C_c(T)$. C'est donc un voisinage de zéro, et par suite il existe un compact $K \subset T$ et un nombre réel $r > 0$, tels que $V(K\ ,\ r) \subset V(A\ ,\ 1)$. Par complète régularité de T, on a alors $A \subset K$; et le théorème est démontré.

2.2 - DEUXIEME THEOREME DE NACHBIN-SHIROTA.

Le deuxième théorème classique de Nachbin-Shirota assure que l'espace $C_c(T)$ est bornologique si et seulement si l'espace T est replet. Ce théorème important, nous allons le redémontrer en nous servant de la technique utilisée pour démontrer les théorèmes (2.1.3) et (2.1.5) ; rappelons d'abord, qu'à tout elc séparé E on associe un espace bornologique E_b, dit espace bornologique associé à E. Un système fondamental de voisinages de zéro dans E_b est donné par les disques bornivores dans E. L'espace E est bornologique si et seulement si $E = E_b$.

Le théorème suivant donne l'espace bornologique associé à l'espace $C_c(T)$:

(2.2.1) Théorème. *L'espace bornologique associé à l'espace $C_c(T)$ est la limite inductive des espaces $C^{\rho}_{\rho}(T)$, lorsque ρ décrit l'ensemble des recouvrements dominants de T.*

Preuve. Soit, sur $C(T)$, t_b la topologie localement convexe, limite inductive des topologies t_ρ. Puisque les recouvrements ρ sont dominants ; il est clair que la topologie t_c, topologie de la convergence compacte sur $C(T)$, est moins fine que t_b. Sachant, d'autre part, que l'espace $C(T)$ muni de la topologie t_b est bornologique (c'est une limite inductive d'elc métrisables, donc bornologiques); alors, pour démontrer l'identité des deux topologies t_c et t_b, il suffit de prouver que les parties t_c-bornées de $C(T)$ sont aussi t_b-bornées ; en effet, soit B un borné dans $C_c(T)$ et soit $\rho(B) = (T_n(B)\ )$, où pour tout $n \geq 1$, $T_n(B) = \{t \in T\ ;\ |f(t)| \leq n$, pour toute fonction $f \in B\}$. Il est clair que la suite $\rho = \rho(B)$ est un recouvrement dominant de T, et B est borné dans $C^{\rho}_{\rho}(T)$. Par suite B est t_b-borné, et le théorème est démontré.

(2.2.2) Théorème (Nachbin-Shirota) *L'espace $C_c(T)$ est bornologique si et seulement si l'espace T est replet.*

Preuve. La condition est nécessaire : il s'agit de montrer que le repleté υT de T est égal à T. Soit, en effet, u un élément de υT. D'après le corollaire (1.2.4), le caractère u appartient à ρT pour tout recouvrement simple ρ de T, et est continu sur $C^{\rho}_{\rho}(T)$. Mais l'espace $C_c(T)$, étant bornologique, est alors la limite inductive des espaces $C^{\rho}_{\rho}(T)$; ρ décrivant l'ensemble des recouvrements dominants de T. Il en résulte que u est t_c-continu sur $C(T)$, et par suite il appartient à T.
La condition est suffisante : notons d'abord que tout espace topologique replet est un μ-espace. Donc, d'après le théorème (2.1.5), l'hypothèse sur T implique que $C_c(T)$ est tonnelé. Sachant, d'autre part, que la topologie d'un elc tonnelé E est la topologie localement convexe la plus fine, compatible avec la dualité (E , E') E' étant le dual de E; alors pour démontrer que la topologie t_c est identique à t_b, il suffit de prouver que t_c donne le même dual que la topologie t_b (preuve du théorème (2.2.1)). Soit, en effet, u une forme linéaire t_b-continue sur $C(T)$. Il est clair que u définit sur βT une mesure de Radon, μ^{β} ; et que, pour tout recouvrement dominant ρ , u est t_{ρ}-continue sur $C^{\rho}(T)$ et par suite est $t_{\bar{\rho}}$-continue sur $C(\rho T)$. Ce qui entraine que, pour tout recouvrement dominant ρ , le $S(\mu^{\beta})$, qui est compact dans βT, est en fait un compact de ρT et est dominé par le recouvrement $\bar{\rho} = (\bar{T}^{\rho}_n)$. Comme l'espace T est replet, alors d'après le théorème (1.2.9), on a $T = \upsilon T = \cap \rho T$, $\rho = \rho(f)$ et $f \in C(T)$.. Il en résulte que $S(\mu^{\beta}) \subset T$. par conséquent u est t_c-continue, et le théorème est démontré .

J. Schmets et M. De Wilde ([14]) ont élargi le théorème précédent, en démontrant que T est replet si et seulement si $C_c(T)$ est ultra bornologique. Ce résultat de Schmets et De Wilde, nous allons le retrouver en appliquant la même technique précédente.

(2.2.3) Théorème. *L'espace* $C_c(\upsilon T)$ est la limite inductive des espaces $C^{\rho}_{\rho}(T)$, lorsque ρ décrit l'ensemble des $\rho(f)$ pour $f \in C(T)$.

Preuve. Désignons par t^{υ}_c la topologie de $C_c(\upsilon T)$ et par t_{ub} la topologie limite inductive des topologies t_{ρ} , $\rho = \rho(f)$ et $f \in C(T)$. Puisque, pour toute fonction $f \in C(T)$, le recouvrement $\rho = \rho(f)$ est complétant, alors la suite $\bar{\rho} = (\bar{T}_n^{\rho}(f))$ est aussi un recouvrement complétant de l'espace ρT, lequel contient υT. Donc tout compact de υT est dominé par $\bar{\rho}$;et par suite la topologie t_c^{υ} est moins fine que la topologie t_{ub}. D'autre part, l'espace $C_c(\upsilon T)$ étant tonnelé, il est clair alors que, pour démontrer que les deux topologies t_c^{υ} et t_{ub} sont identiques, il suffit de prouver que toute forme linéaire t_{ub}-continue sur $C(\upsilon T)$ est aussi t_c^{υ} -continue. Ce qui est visible d'après la démonstration du théorème (2.2.2)

(2.2.4) <u>*Corollaire (Schmets - De Wilde).*</u> *L'espace $C_c(\upsilon T)$ est ultrabornologique.*

<u>*Preuve.*</u> Pour tout recouvrement $\rho = \rho(f)$, l'espace $C_{\rho}^{\rho}(T)$ est un espace de Fréchet (donc ultrabornologique). Comme toute limite inductive séparée d'espaces ultrabornologiques est aussi ultrabornologique ; le corollaire est donc démontré.

Nous terminons ce paragraphe en démontrant deux résultats concernant les espaces $C_c^{\rho}(T)$ et $C_{\rho}^{\rho}(T)$.

(2.2.5) <u>*Proposition.*</u> *Pour un recouvrement dominant $\rho = (T_n)$ de T, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *La topologie t_{ρ} est identique à la topologie t_c^{ρ}.*

(b) *L'espace $C_c^{\rho}(T)$ est tonnelé.*

(c) *L'espace $C_c^{\rho}(T)$ est ultrabornologique.*

(d) *Pour tout $n \geq 1$, T_n est une partie compacte de T.*

<u>*Preuve.*</u> (a) implique (d) d'après la proposition (1.2.8), et si l'on a (d), alors l'espace T est un espace hémicompact (donc replet) et $C^{\rho}(T) = C(T)$; par suite (d) $\Longrightarrow$ (c) d'après le corollaire (2.2.4). Reste à démontrer que (b) $\Longrightarrow$ (a) : or par hypothèse, la topologie t_{ρ} est plus fine que la topologie t_c^{ρ}. D'autre part, les ensembles $V^{\rho}(T_n, \frac{1}{n}) = \{f \in C^{\rho}(T);\ \|f\|_{T_n} \leq \frac{1}{n}\}$ pour $n \geq 1$, forment un système fondamental de voisinages de zéro dans $C_{\rho}^{\rho}(T)$;

et ce sont évidemment des tonneaux dans l'espace $C_c^\rho(T)$ qui est tonnelé . Ce qui montre que t_ρ est moins fine que t_c^ρ et achève la démonstration de la proposition .

(2.2.6) *Proposition .* *Soit* $\rho = (T_n)$ *un recouvrement simple de* T *. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *L'espace* $C_\beta^\rho(T)$ *est ultrabornologique.*

(b) *L'espace* $C_{\bar\rho}^\rho(T)$ *est tonnelé.*

(c) *La suite* $\bar\rho = (\bar T_n^\rho)$ *est un recouvrement dominant de* ρT.

Preuve . (a) $\Longrightarrow$ (b) est évident ; démontrons (b) $\Longrightarrow$ (c) : en effet, soit K un compact de ρT et soit $V^\rho(K , 1) = \{f \in C(\rho T) ; \|f\|_K \leq 1\}$. L'ensemble $V^\rho(K , 1)$ est un tonneau de $C_{\bar\rho}(\rho T)$, lequel est tonnelé . Donc $V^\rho(K , 1)$ est un voisinage de zéro dans $C_{\bar\rho}(\rho T)$, et par suite il existe un entier $n_0 \geq 1$ et un nombre réel $r > 0$ tels que $V^\rho(K , 1) \subset V^\rho(\bar T_{n_0}^\rho , r) = \{f \in C(\rho T) ; \|f\|_{\bar T_{n_0}^\rho} \leq r\}$. On en déduit, par complète régularité de ρT, que $K \subset \bar T_{n_0}^\rho$.

(c) $\Longrightarrow$ (a): si l'assertion (c) est vraie, alors l'espace T est hémi-compact et par suite replet. Il en résulte, compte tenu du corollaire (2.2.4), que l'espace $C_\beta(\rho T) = C_c(\rho T)$ est ultrabornologique. Il en est de même de $C_\rho^\rho(T)$ qui lui est égal .

3 - TOPOLOGIE STRICTE SUR $C^\rho(T)$.

Dans cette partie de notre travail, nous étudions, sur l'algèbre $C^\rho(T)$, une topologie localement convexe dont la définition et les propriétés sont analogues à la définition et les propriétés de la topologie sous-stricte β_0 ([16]) .

3.1 - LA TOPOLOGIE STRICTE. γ_ρ :

Soient toujours T un espace complètement régulier séparé et $\rho = (T_n)_{n\geq 1}$ un recouvrement dominant de T . On désigne par Φ_ρ l'ensemble

des applications bornées ϕ de T dans $\mathbb{R}$, à support dominé par ρ et telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $\|\phi\|_{T-K} \leq \varepsilon$. Pour toute application $\phi \in \Phi_\rho$ on note $\| \ \|_\phi$ la semi-norme sur $C^\rho(T)$ définie par $\|f\|_\phi = \|f\phi\|$ pour toute fonction $f \in C^\rho(T)$. Les semi-normes $\| \ \|_\phi$, $\phi \in \Phi_\rho$, déterminent sur $C^\rho(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) une topologie localement convexe notée γ_ρ (resp. γ_ρ^∞). Un système fondamental de voisinages de zéro pour γ_ρ (resp. γ_ρ^∞) est donné par les ensembles
$V_\phi^\rho = \{f \in C^\rho(T) \ ; \ \|f\|_\phi = \|f\phi\| \leq 1\}$ (resp. $V_\phi^\infty = V_\phi \cap C^\infty(T)$).
On désigne par $C^\rho_{\gamma\rho}(T)$ (resp. $C^\infty_{\gamma\rho}(T)$) l'espace $C^\rho(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) muni de la topologie γ_ρ (resp. γ_ρ^∞).

Rappelons que si l'on désigne par Φ l'intersection des Φ_ρ, lorsque ρ décrit l'ensemble des recouvrements dominants de T, alors la topologie définie sur $C(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) par les semi-normes $\| \ \|_\phi$, $\phi \in \Phi$, est la topologie γ (resp. γ^∞) introduite et étudiée dans [11]

(3.1.1) <u>Proposition</u>. (a) La topologie γ, qui est plus fine que la topologie de la convergence compacte, induit sur $C^\rho(T)$ une topologie moins fine que la topologie γ_ρ.

(b) La topologie γ_ρ^∞ est plus fine que la topologie γ^∞, et est moins que la topologie sous-stricte β_o ([16]).

<u>Preuve.</u> (a) résulte trivialement du fait que $\Phi \subset \Phi_\rho$. L'assertion (b) résulte de (a) et du fait que la topologie β_o est définie par les semi-normes $\| \ \|_\phi$, où ϕ décrit l'ensemble de toutes les applications bornées de T dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $\|\phi\|_{T-K} \leq \varepsilon$; sans aucune restriction sur le support de ϕ.

(3.1.2) <u>Proposition</u>. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) La topologie γ_ρ est identique à la topologie de la convergence compacte.

(a') La topologie γ_ρ^∞ est identique à la topologie de la convergence compacte.

(b) *Tout K_σ dominé par ρ est relativement compact.*

Preuve. Même démonstration que la proposition (5.2) de [11]

(3.1.3) Proposition. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *La topologie induite par γ sur $C^\rho(T)$ est identique à γ_ρ*

(a') *La topologie γ^∞ est identique à la topologie γ_ρ^∞*

(b) *Pour tout entier $n \geq 1$, T_n est une partie dominée de T.*

Preuve. (a) $\Longrightarrow$ (a') est évident et si (b) est vraie, alors on a : $\Phi_\rho = \Phi$ et $C^\rho(T) = C(T)$ et par suite $\gamma = \gamma_\rho$. Reste à démontrer que (a') $\Longrightarrow$ (b) : raisonnons par l'absurde et supposons que l'un des éléments de $\rho = (T_n)$, T_1 par exemple, ne soit pas dominé dans T . Il existe alors un recouvrement dominant $\rho' = (T'_n)$ tel que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un élément $x_n \in T_1$ et $x_n \notin T'_n$. Par complète régularité de T, il existe une application continue f_n de T dans l'intervalle $[0, n]$ de $\mathbb{R}$ telle que $f_n(x_n) = n$ et $f_n \equiv 0$ sur T'_n . D'autre part, si ϕ est un élément quelconque de Φ , il existe un entier $n_o \geq 1$ tel que $S(\phi) \subset T'_{n_o}$. Il en résulte que, pour tout $n \geq n_o$, $\| f_n \phi \| = 0$; et par conséquent la suite (f_n) converge vers zéro pour la topologie γ^∞ . Mais si on désigne par ϕ_o l'application de T dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi_o \equiv 0$ sur $T - \{x_n , n \geq 1\}$ et $\phi_o(x_n) = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$; alors $\phi_o \in \Phi_\rho$ et, pour tout $n \geq 1$, on a $\|f_n \phi_o\| \geq |\phi_o(x_n) f_n(x_n)| = 1$. Ce qui montre que la suite (f_n) ne converge pas vers zéro pour la topologie γ_ρ^∞, et par suite contredit l'hypothèse que $\gamma_\rho^\infty = \gamma^\infty$.

(3.1.4) Proposition. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *La topologie γ_ρ^∞ est identique à la topologie sous-stricte β_o*

(b) *Tout K_σ dans T est dominé par ρ .*

(c) *Le recouvrement ρ est stationnaire .*

Preuve . Les deux implications (b) $\Longrightarrow$ (c) et (c) $\Longrightarrow$ (a) sont évidentes ; et pour démontrer que (a) $\Longrightarrow$ (b) on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un K_σ dans T, non dominé par ρ. Il suffit, alors, de répéter la démonstration de la proposition précédente pour construire une suite dans $C^\infty(T)$ convergente vers zéro pour γ_ρ^∞, et qui ne converge pas vers zéro pour la topologie β_0.

Pour la suite, nous aurons besoin d'un lemme analogue au lemme (3.1) de [15] :

(3.1.5) <u>Lemme</u>. *Soit H un ensemble d'applications de T dans $\mathbb{R}$. Pour que H soit uniformément borné sur chaque élément T_n de ρ, il faut et il suffit que, pour toute fonction $\phi \in \Phi_\rho$, $\operatorname{Sup}\{\|f\phi\|, f \in H\}$ soit fini.*

<u>*Preuve.*</u> La condition est trivialement nécessaire, car pour toute fonction $\phi \in \Phi_\rho$, il existe un entier n_0 tel que $S(\phi) \subseteq T_{n_0}$. Réciproquement si H n'est pas uniformément borné sur T_1, (par exemple), alors pour tout entier $n \geq 1$, il existe $x_n \in T_1$ et $f_n \in H$ tels que $|f_n(x_n)| \geq n.2^n$.

La fonction $\phi = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} \phi_{\{x_n\}}$ appartient à ϕ_0 et est telle $\|f_n\phi\| \geq n$.

Cette contradiction montre que la condition est suffisante.

(3.1.6) <u>*Proposition*</u>. *(a) La topologie γ_ρ est moins que la topologie t_ρ.*

(b) Les deux espaces $C_\rho^\rho(T)$ et $C_{\gamma_\rho}^\rho(T)$ ont les mêmes parties bornées.

(c) Sur les bornés de $C_\rho^\rho(T)$ la topologie γ_ρ coïncide avec la topologie de la convergence compacte.

<u>*Preuve.*</u> L'assertion (a) est évidente et (b) découle du lemme précédent. Pour démontrer (c), il suffit de prouver que la topologie induite par γ_ρ sur un disque t_ρ-borné B est moins fine que celle induite par la topologie de la convergence compacte t_c : considérons, en effet, un élément $\phi \in \Phi_\rho$, $\phi \neq 0$ et soit $V_\phi^\rho = \{f \in C^\rho(T) \; ; \; \|f\phi\| \leq 1\}$. Puisque le support de ϕ est dominé par $\rho = (T_n)$, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $S(\phi) \subset T_{n_0}$.

Si, d'autre part, r est un nombre réel tel que $r > \mathrm{Sup}\{\|f\|_{T_{n_0}}, f \in B\}$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $\| \quad \|_{T-K} \leq \frac{1}{r}$, et si l'on pose $W^{\rho} = \{f \in C^{\rho}(T) \; ; \; \|f\|_K \leq \frac{1}{\|\phi\|}\}$, alors on a $W^{\rho} \cap B \subset V^{\rho}_{\phi} \cap P$.
L'assertion est donc démontrée.

(3.1.7) Corollaire 1. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) La topologie γ_ρ est identique à la topologie t_ρ

(b) Les éléments T_n de ρ sont des parties compactes de T.

Preuve. (b) $\Longrightarrow$ (a) est évident et (a) $\Longrightarrow$ (b) résulte de la proposition précédente et du lemme 2 de [12].

(3.1.8) Corollaire 2. *Tout borné de $C^{\rho}_{\gamma_\rho}(T)$ est contenu dans l'adhérence d'un borné de $C^{\infty}_{\gamma_\rho}(T)$. En particulier $C^{\infty}_{\gamma_\rho}(T)$ est partout dense dans $C^{\rho}_{\gamma_\rho}(T)$ et a le même dual.*

Preuve. Ce corollaire résulte trivialement du fait, que tout borné de $C^{\rho}_{\rho}(T)$ est contenu dans l'adhérence d'un borné de $C^{\infty}_{\rho}(T)$.

(3.1.9) Proposition. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) L'espace $C^{\rho}_{\gamma_\rho}(T)$ est complet

(b) L'espace $C^{\rho}_{\gamma_\rho}(T)$ est quasi-complet.

(c) Toute application de T dans $\mathbb{R}$, bornée sur les éléments de ρ et continue sur les compacts de T, est continue.

Preuve. La démonstration est analogue à celle de la proposition 5 de [12], ou à celle de la proposition 3.6 de [15].

3.2 - DUAL DE $C^{\rho}_{\gamma_\rho}(T)$ ET $C^{\infty}_{\gamma_\rho}(T)$.

Dans ce qui suit nous aurons besoin du lemme suivant ([11] et [3]):

(3.2.1) <u>Lemme .</u> *Soit μ une mesure de Radon sur T . Si U est un ouvert de T tel que $U \cap S(\mu) \neq \emptyset$, alors il existe $f \in C^{\infty}(T)$ tel que $S(f) \subset U$ et $\int f\, d\mu = 1$.*

Les démonstrations des théorèmes (4.3), (6.1), (6.2), (7.1) de [11] s'adaptent bien aux démonstrations des théorèmes (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4) et (3.2.5) suivants :

(3.2.2) <u>Théorème .</u> *(a) Si L est une forme linéaire continue sur les bornés de $C^{\infty}_{\rho}(T)$ pour la topologie de la convergence compacte, alors la mesure de Radon correspondonte est à support dominé par ρ .*

(b) Si μ est une mesure de Radon à support dominé par ρ , alors la forme linéaire correspondante $f \longrightarrow \int f\, d\mu$, est continue sur les bornés de $C^{\infty}_{\rho}(T)$ pour la topologie de la convergence compacte.

Désignons par $M_{\rho}(T)$ l'espace des mesures de Radon sur T, à support dominé par ρ .

(3.2.3) <u>Théorème .</u> *Le dual de $C^{\infty}_{\gamma_{\rho}}(T)$ (ou $C^{0}_{\gamma_{\rho}}(T)$) est l'espace $M_{\rho}(T)$.*

(3.2.4) <u>Théorème .</u> *Pour une partie H de $M_{\rho}(T)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) L'ensemble H est γ_{ρ}-équicontinu.

(a') L'ensemble H est γ^{∞}_{ρ}-équicontinu.

(b) L'ensemble H est fortement borné dans $M_{\rho}(T)$ et il existe une partie fermée S de T, dominée par ρ et telle que, pour toute partie bornée B de $C^{\infty}_{\gamma_{\rho}}(T)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset S$ tel que $|\mu|\ (|f|) \leq \varepsilon$ pour toute mesure $\mu \in H$ et toute fonction $f \in B$ telle que $\|f\|_K = 0$.

(c) Sup $\{\ |\mu|(T)\ ,\ \mu \in H\ \}$ est fini, le support $S(H)$ est dominé par ρ et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $|\mu|(T - K) \leq \varepsilon$ pour toute mesure $\mu \in H$.

(3.2.5) Théorème . *Les deux espaces $C^{\rho}_{\gamma_\rho}(T)$ et $C^{\infty}_{\gamma_\rho}(T)$ sont des b-espaces ([10]).*

Enfin, nous avons le résultat suivant :

(3.2.6) Théorème . *L'espace $C(T)$ muni de la topologie γ est la limite inductive des espaces $C^{\rho}_{\gamma_\rho}(T)$, lorsque ρ décrit l'ensemble des recouvrements dominants de T .*

Preuve. Désignons par γ' la topologie localement convexe sur $C(T)$, limite inductive des topologies γ_ρ . L'espace $C_{\gamma'}(T)$ est un b-espace, car toute limite inductive (séparée) de b-espaces est un b-espace ([10]). D'autre part, il est clair que γ est moins fine que γ' ; et comme il est facile de voir que γ' induit sur les bornés de $C_c(T)$, une topologie identique à celle induite par la topologie de la convergence compacte ; alors on en déduit que γ est identique à γ' ; et le théorème est démontré .

BIBLIOGRAPHIE. -

[1] A. BADRIKIAN, *Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et mesures cylindriques*, Lecture notes in Mathematics, 139 (1970).

[2] H. BUCHWALTER, Problèmes de complétion topologique, *D.E.A. Math. pures, Ed. ronéotypée, Lyon 1969-1970.*

[3] BUCHWALTER H., Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier, *Séminaire Choquet*, 9, n° 14, 15 pages (1969-1970).

[4] H. BUCHWALTER, Sur le théorème de Nachbin-Shirota, *J. Math. Pures et appl.* 51, p. 399-418 (1972).

[5] H. BUCHWALTER, Topologies et compactologies, *Publ. Dép. Math. Lyon* , 6-2, p. 1-74 (1969).

[6] H. BUCHWALTER et J. SCHMETS, Sur quelques propriétés de l'espace $C_s(T)$, *J. Math. Pures et appl.*, 52, p.337-552 (1973).

[7] L. GILLMAN, et H. JERISON, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, Princeton N.J. (1960).

[8] G. KOTHE, *Topological vector spaces*, I, Springer, 1968.

[9] L. NACHBIN, Topological vector spaces of continuous functions, *Proc. Nat. Acad. U.S.A.*, 40, p. 471-474 (1954).

[10] K. NOUREDDINE, Nouvelles classes d'espaces localement convexes, 2° coll. Anal. Fonct. Bordeaux (1973), *Pub. Dép. Math. Lyon, 10-3*, p. 259-277 (1973).

[11] K. NOUREDDINE, Topologies strictes sur C(T) et $C^\infty(T)$ *Publ. Dép. Math. Lyon*, 14-1 (1976).

[12] K. NOUREDDINE et W. HABRE, Topologies p-strictes, *Publ. Dep. Math. Lyon*, 14-1 (1976).

[13] H.H. SCHAEFER, *Topological vector spaces*, Springer,

[14] J. SCHMETS et M. DE WILDE, Caractérisation des espaces C(X) ultra-bornologiques, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 40 (1971), p. 119-121.

[15] J. SCHMETS et J. ZAFARANI, Topologie stricte faible et mesures discrètes, *Bull. Soc. Roy. Liège*, 43, p. 405-418, (1974).

[16] F.D. SENTILLES, Bounded continuous functions on a completely regular space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 168, p. 311-336 (1972).

[17] T. SHIROTA, On locally convex vector spaces of continuous functions, *Proc. Japan Acad.* 30, p. 294-298 (1954).

[18] V.S. VARADARAJAN, Measures on topological spaces, *Amer. Math. Soc. Transl.* 48, p. 161-228 (1965).

[19] WARNER S., The topology of compact convergence on continuous functions spaces, *Duke Math. J.* 25, p. 265 -282 (1958).