

MICHEL TALAGRAND

Solution d'un problème de R. Haydon

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 2
, p. 43-46

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_2_43_0

© Université de Lyon, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION D'UN PROBLEME DE R. HAYDON

Par Michel TALAGRAND

Désignons par λ la mesure de Lebesgue de \mathbb{R} par K , l'ensemble de Cantor, par m la mesure canonique de K . R. Haydon a posé le problème suivant ⁽¹⁾ :
Soit X un sous compact de K . Si $m(X) > 0$, avons-nous $\lambda(X+X) > 0$? Le résultat suivant apporte une réponse positive :

THEOREME. - Soit X un sous-ensemble analytique de K . Alors on a

i) $\lambda(X+X) \geq 2(2m(X)-1)$;

ii) $\lambda(X+K) \geq 2m(X)$,

COROLLAIRE. - Soient X et Y deux sous-ensembles analytiques de K , tels que $m(X)m(Y) > 0$. Alors on a aussi $\lambda(X+Y) > 0$.

Déduisons le corollaire du théorème. On peut tout d'abord supposer X et Y compacts. Un raisonnement classique montre alors qu'il existe un sous-compact

(1) Je tiens à remercier ici Monsieur le Professeur G. CHOQUET d'avoir porté ce problème à ma connaissance.

K' de K , homothétique à K et un sous-compact $K'' = K'+h$ de K , tels que $m(X \cap K') > \frac{3}{4} m(K')$ et $m(Y \cap K'') > \frac{3}{4} m(K'')$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda(X+Y) &= \lambda(X+Y-h) \geq \lambda(X \cap K' + (Y-h) \cap K') \geq \lambda(X \cap (Y-h) \cap K' + X \cap (Y-h) \cap K') \\ &\geq 2m(K') \left(\frac{2m(X \cap (Y-h) \cap K')}{m(K')} - 1 \right) > 0; \end{aligned}$$

l'avant dernière inégalité se déduisant du théorème par homothétie.

Prouvons maintenant le théorème. Nous allons tout d'abord étudier l'opération somme dans $K \times K$.

Soit $K_n = \bigcup_{u \in U_n} I_u^n$, où I_u^n désigne l'intervalle $[u, u + \frac{1}{3^n}]$ et où U_n

désigne l'ensemble des nombres qui s'écrivent en base 3 sous la forme

$\overline{0, \alpha_1 \alpha_n}$, avec $\alpha_k \in \{0, 2\}$.

Il est connu que $K = \bigcap_n K_n$. On a :

$$I_u^n + I_v^n = [u+v, u+v + \frac{2}{3^n}] = 2 \left[\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2} + \frac{1}{3^n} \right].$$

L'intérêt de cette écriture réside dans le fait que, contrairement à $u+v$, il est aisé d'exprimer $\frac{u+v}{2}$ en base 3. Plus précisément, si $u = \overline{0, \alpha_1 \alpha_n}$ et $v = \overline{0, \beta_1 \beta_n}$ on a $\frac{u+v}{2} = \overline{0, \gamma_1 \gamma_n}$ avec $\gamma_k = \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}$, soit :

$\gamma_k = 0$ si et seulement si $\alpha_k = \beta_k = 0$,

$\gamma_k = 1$ si et seulement si $\alpha_k = 2, \beta_k = 0$ ou $\alpha_k = 0, \beta_k = 2$,

$\gamma_k = 2$ si et seulement si $\alpha_k = \beta_k = 2$.

Désignant par \mathfrak{A}_n l'ensemble des nombres de la forme $\frac{k}{3^{n-1}}$ où $0 \leq k < 3^n$, on voit que chaque élément w de \mathfrak{D}_n peut s'écrire sous la forme $\frac{u+v}{2}$, avec u et v dans \mathcal{U}_n et ceci exactement de 2^p manières, où p désigne le nombre de A qui apparaissent dans l'écriture de x en base 3.

Prouvons la première assertion du théorème. On peut supposer X compact.

Posons $X_n = \bigcup_{I_u^n \cap X = \emptyset} I_u^n$. On a $X = \bigcap_n X_n$, donc $X+X = \bigcap_n (X_n+X_n)$.

(puisque les X_n sont compacts). Il nous suffit ainsi de prouver que, pour chaque n , on a $\lambda(X_n+X_n) \geq 2(2m(X)-1)$. Fixons n . Soit E l'ensemble des nombres w de \mathfrak{D}_n tels que l'intervalle $2[w, w + \frac{1}{3^n}]$ ne soit pas contenu dans X_n+X_n , et soit N le cardinal de E . Nous allons montrer que N est majoré par $2 \cdot 3^n (1-m(X)) = 2 \cdot 3^n m(X^c)$, ce qui suffira. Soit F l'ensemble des nombres u de \mathcal{U}_n , tels que l'intervalle I_u^n soit contenu dans X_n^c , et soit K le cardinal de F . On a $K \leq 2^n m(X^c)$. Ainsi, il va nous suffire de prouver que $N \leq 2(\frac{3}{2})^n K$.

Soit P une partie de $\{0, 1, \dots, n\}$ de cardinal p . Soit \mathfrak{D}_n^P le sous-ensemble de \mathfrak{D}_n constitué des nombres $w = \overline{0, \gamma_1 \dots \gamma_n}$ avec $\gamma_i = 1$ si et seulement si i est dans P . Les ensembles \mathfrak{D}_n^P constituent une partition de \mathfrak{D}_n . Nous allons montrer que $E \cap \mathfrak{D}_n^P$ possède au plus $2^{1-p} K$ éléments. Supposons $p \neq 0$. Pour chaque élément w de \mathfrak{D}_n^P soit $S_w = \{u \in \mathcal{U}_n ; \exists v \in \mathcal{U}_n ; 2w = u+v\}$. Lorsque w parcourt \mathfrak{D}_n^P les ensembles S_w sont disjoints, et chacun d'eux possède 2^p éléments, comme il a été vu plus haut. Supposons que w soit dans $\mathfrak{D}_n^P \cap E$.

Quel que soit u dans S_w , l'un des éléments u et $2w-u$ est dans F . L'ensemble S_w se partitionne en 2^{p-1} paires $(u, w-u)$ et chacune d'elles rencontre F . Ainsi $\text{card}(S_w \cap F) \geq 2^{p-1}$. Les ensembles S_w étant disjoints, ceci montre que $\text{card}(\mathcal{S}_n^p \cap E) \leq 2^{l-p}K$. On voit aisément que $\text{card}(\mathcal{S}_n^{\emptyset} \cap E) \leq K \leq 2K$. On a donc

$$\text{card}(E) \leq \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^{l-p}K = 2K \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = 2K \left(\frac{3}{2}\right)^n, \text{ ce qui termine la preuve}$$

de la première assertion.

La deuxième se prouve de façon très similaire. Avec des notations calquées sur les précédentes, on se ramène à prouver que $N \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n K$. Pour ce faire il suffit d'établir que $\text{card}(\mathcal{S}_n^p \cap E) \leq 2^{-p}K$, ce qui se fait en remarquant que si w est dans $\mathcal{S}_n^p \cap E$, alors F contient S_w .

Manuscrit remis le 1er septembre 1975

M. TALAGRAND
 Université Paris VI
 Tour 46 - 4e étage
 4, place Jussieu
 75230 PARIS CEDEX 5