PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

MICHEL CRÉTIN

Invariance homotopique en K-théorie hermitienne

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 1 , p. 39-59

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_1_39_0>

© Université de Lyon, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Publications du Département de Mathématiques Lyon 1975 t.12.1

INVARIANCE HOMOTOPIQUE EN K-THEORIE HERMITIENNE

par Michel CRETIN

Soit A un anneau (unitaire). On désigne par $\mathbf{P}(A)$ la catégorie des A-modules projectifs de type fini et par $\mathbf{Nil}(A)$ la catégorie des couples (E, ν) où E est projectif de type fini et ν un endomorphisme nilpotent de E. Ces catégories sont exactes ; on peut donc considérer les K-groupes $K_i(A)$ de $\mathbf{P}(A)$ et $N_i(A)$ de $\mathbf{Nil}(A)$. Le foncteur d'oubli, défini par $(E, \nu) \mapsto E$, fournit une décomposition en somme directe $N_i(A) = K_i(A) \oplus \tilde{N}_i(A)$. On montre alors que pour tout entier $n \geqslant 2$, inversible dans A, le groupe $\tilde{N}_i(A)$ est n-divisible et sans n-torsion. Pour cela, on fait apparaître $\tilde{N}_i(A)$ comme facteur direct dans le groupe $K_i(\Omega(A))$ d'une catégorie $\Omega(A)$ formée de modules projectifs de type fini munis de "polynômes de Laurent inversibles".

On suppose de plus l'anneau A *hermitien*. On a alors sur $\mathbf{P}(A)$ un foncteur de dualité $E \mapsto {}^tE$; ceci permet de faire agir le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $K_i(A)$; On obtient ainsi des groupes de cohomologie de Tate $k_i(A)$ et $k'_i(A)$.

Rappelons d'autre part (cf. [3], problème 3 "théorème fondamental de la K-théorie algébrique") que l'on conjecture que $K_i(A[t]) = K_i(A) \oplus \tilde{N}_{i-1}(A)$. Dans le cas où i=1, c'est un théorème classique de H. Bass. Il en résulte que les foncteurs k_i et k'_i sont des invariants homotopiques sur la catégorie des anneaux hermitiens dans lesquels 2 est inversible.

Enfin, les groupes ${}_\varepsilon W_i$ et ${}_\varepsilon W'_i$ de la K-théorie hermitienne sont reliés aux groupes k_i et k'_i par la suite exacte de péricdicité [6] . Il en résulte donc aussi l'invariance homotopique des groupes hermitiens.

C. RAPPELS SUR LA K-THEORIE ALGEBRIQUE.

Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement la construction de la K-théorie algébrique d'une catégorie exacte, ainsi que quelques propriétés dont nous aurons à faire un usage fréquent par la suite. Nous suivrons [8] auquel nous renvoyons pour un exposé détaillé.

(0.1) Catégories exactes.

DEFINITION. - *Une catégorie exacte* $\mathbb{E}$ *est une sous-catégorie pleine d'une catégorie abélienne* $\mathbb{A}$, *stable par extensions et contenant l'objet nul* 0 *de* $\mathbb{A}$. *Une suite de* $\mathbb{E}$, *de la forme* $0 \to E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} E'' \to 0$, *est exacte si elle est exacte dans* $\mathbb{A}$.

REMARQUE. - On peut caractériser axiomatiquement les catégories exactes. Soit $\mathbb{E}$ une catégorie exacte. Une flèche $E' \xrightarrow{i} E$ (resp. $E \xrightarrow{j} E''$) de $\mathbb{E}$ figurant dans une suite exacte de $\mathbb{E}$ de la forme précédente est appelée un

monomorphisme (resp. épimorphisme) *admissible* et est notée $E' \overset{i}{\rightarrowtail} E$ (resp. $E \overset{j}{\twoheadrightarrow} E''$).

Exemple. - Soit A un anneau (unitaire) ; la catégorie $\mathbb{P}(A)$ des A-modules à droite, projectifs de type fini est exacte.

(0.2) La construction de Quillen.

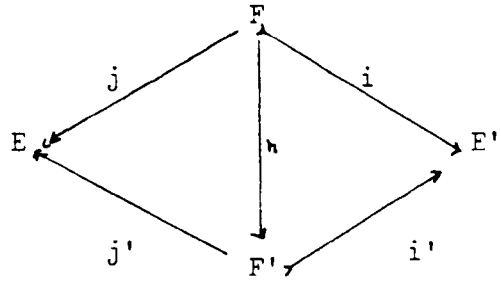
A toute catégorie exacte $\mathbb{E}$, on associe une catégorie $Q(\mathbb{E})$ de la façon suivante : les objets de $Q(\mathbb{E})$ sont identiques aux objets de $\mathbb{E}$ mais les flèches de E vers E' sont les classes, à isomorphisme près, de diagrammes de la forme :

$$\begin{array}{ccc} F & \overset{i}{\rightarrowtail} & E' \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \\ E & & \end{array}$$

Pour qu'un tel diagramme soit équivalent à

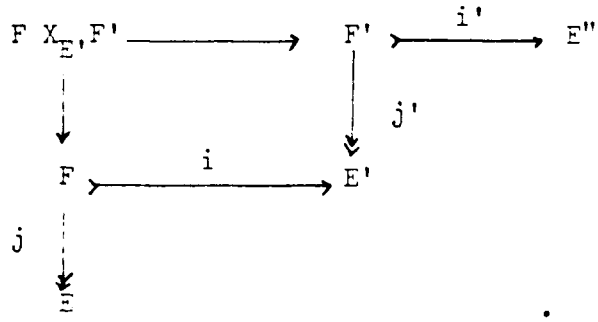
$$\begin{array}{ccc} F' & \overset{i'}{\rightarrowtail} & E' \\ {\scriptstyle J'}\downarrow & & \\ E & & \end{array}$$

il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme $h : F \longrightarrow F'$ tel que



soit commutatif.

La composition des flèches dans Q(𝔼) est définie à l'aide du diagramme



(0.3) Définition des K-groupes.

Le nerf de la catégorie Q(𝔼) est l'ensemble simplicial $[n] \mapsto \mathrm{Mor}([n], Q(\mathbb{E}))$. L'espace classifiant BQ(𝔼) de Q(𝔼) est la réalisation géométrique de cet ensemble simplicial. L'objet nul 0 de 𝔼 définit un point-base de l'espace BQ(𝔼).

Les K-groupes de 𝔼 sont alors définis comme les groupes d'homotopie de l'espace pointé BQ(𝔼). Plus précisément, on a :

$$K_i(\mathbb{E}) = \pi_{i+1}(BQ(\mathbb{E})) \quad \text{pour} \quad i \geqslant 0.$$

On vérifie que ces groupes sont compatibles avec les produits finis et les limites inductives filtrantes : si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux catégories exactes on a

$$K_i(\mathbb{E}\times\mathbb{E}') \simeq K_i(\mathbb{E}) \oplus K_i(\mathbb{E}')$$

et, si $j \mapsto \mathbb{E}_j$ est un système inductif filtrant de catégories exactes, on a

$$K_i(\varinjlim_j \mathbb{E}_j) \simeq \varinjlim_j K_i(\mathbb{E}_j).$$

On montre (cf. [8] th.1) que $K_o(\mathbb{E})$ est canoniquement isomorphe au groupe de Grothendieck de la catégorie exacte $\mathbb{E}$.

Enfin, on définit les K-groupes d'un anneau unitaire A par

$$K_i(A) = K_i(\mathbb{P}(A)).$$

(0.4) Foncteurs exacts.

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ deux catégories exactes. Un foncteur $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est exact s'il est additif et transforme les suites exactes de $\mathbb{E}$ en suites exactes de $\mathbb{E}'$. On obtient alors un foncteur $Q(f) : Q(\mathbb{E}) \to Q(\mathbb{E}')$ et des homomorphismes de groupes $K_i(f) : K_i(\mathbf{E}) \to K_i(\mathbf{E}')$. De cette façon K_i devient un foncteur des catégories exactes et des foncteurs exacts, à valeurs dans les groupes abéliens.

DEFINITION. - *On dit qu'une suite* $0 \to f' \to f \to f'' \to 0$ *de foncteurs exacts de* $\mathbb{E}$ *vers* $\mathbb{E}'$ *est exacte, si, pour tout objet* E *de* $\mathbb{E}$, *la suite* $0 \to f'(E) \to f(E) \to f''(E) \to 0$ *est exacte dans* $\mathbb{E}'$.

Nous utiliserons souvent la proposition suivante :

PROPOSITION. - *Soit* $0 \to f' \longrightarrow f \longrightarrow f'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte de foncteurs exacts entre* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{E}'$. *On a la relation :*

$$K_i(f) = K_i(f') + K_i(f'') : K_i(\mathbb{E}) \longrightarrow K_i(E'') \text{ pour } i \geq 0.$$

Indiquons la méthode de démonstration : soit $Ex(\mathbb{E})$ la catégorie des suites exactes de $\mathbb{E}$. C'est une catégorie exacte dont on note les objets σ par $0 \to s\sigma \longrightarrow t\sigma \longrightarrow q\sigma \longrightarrow 0$, définissant ainsi trois foncteurs exacts s,t et q : $Ex(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{E}$. Il suffit alors de prouver que :

$$K_i(t) = K_i(s) + K_i(q) : K_i(Ex(\mathbb{E})) \longrightarrow K_i(\mathbb{E}).$$

Pour cela, considérons le foncteur exact $\alpha : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to Ex(\mathbb{E})$ tel que $td = (s \oplus q)d$, $sd = pr_1$ et $qd = pr_2$.

D'où

$$K_i(t)K_i(d) = (K_i(s) + K_i(q))K_i(d) : K_i(\mathbb{E}) \oplus K_i(\mathbb{E}) \to K_i(\mathbb{E})$$

Mais, d'après [8] th. 2,

$(K_i(s), K_i(q) : K_i(Ex(\mathbb{E})) \to K_i(\mathbb{E}) \oplus K_i(\mathbb{E})$ est un isomorphisme. Puisque $(s,q)d = id$, $K_i(d)$ est un isomorphisme et l'on obtient la relation cherchée.

1. LES GROUPES $N_i(A)$.

Dans la première partie de ce paragraphe, on donne la définition des groupes $\tilde{N}_i(A)$ pour un anneau unitaire A et on énonce le théorème de divisibilité. Les autres parties de ce paragraphe sont consacrées à la démonstration

de ce théorème. Pour cela, on fait apparaître les groupes $\tilde{N}_i(A)$ comme facteurs directs de K-groupes $K_i(\Omega(A))$ d'une catégorie exacte $\Omega(A)$, introduite dans la seconde partie de ce paragraphe ; une filtration sur $\Omega(A)$ permet d'établir ce dernier point.

(1.1) Les groupes $\tilde{N}_i(A)$.

Soit $\mathbb{E}$ une catégorie exacte. On désigne par $\mathbb{N}il(\mathbb{E})$ la catégorie dont les objets sont les couples (E,ν) où E est un objet de $\mathbb{E}$ et ν un endomorphisme nilpotent de E ; un flèche $f : (E,\nu) \longrightarrow (F,\mu)$ est une flèche $f : E \longrightarrow F$ telle que $\mu \circ f = f \circ \nu$ et une suite

$0 \longrightarrow (E',\nu') \longrightarrow (E,\nu) \longrightarrow (E'',\nu'') \longrightarrow 0$ est exacte s'il en est ainsi de la suite sous-jacente d'objets de $\mathbb{E}$.

De plus, pour tout entier $r \geq 0$, on désigne par $\mathbb{N}il^r(\mathbb{E})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{N}il(\mathbb{E})$ dont les objets sont les couples (E,ν) tels que $\nu^{r+1} = 0$.

LEMME. - *Les catégories* $\mathbb{N}il(\mathbb{E})$ et $\mathbb{N}il^r(\mathbb{E})$ $(r \geq 0)$ *sont exactes et l'on a*

$$\mathbb{N}il(\mathbb{E}) = \varinjlim_r \mathbb{N}il^r(\mathbb{E}).$$

En effet, on peut considérer $\mathbb{E}$ comme sous-catégorie exacte d'une catégorie abélienne $\mathbb{A}$. Alors $\mathbb{N}il(\mathbb{E})$ (resp. $\mathbb{N}il^r(\mathbb{E})$) est une sous-catégorie exacte de la catégorie abélienne $\mathbb{N}il(\mathbb{A})$ (resp. $\mathbb{N}il^r(\mathbb{A})$).

COROLLAIRE. - *On définit les groupes* $N_i(\mathbb{E}) = K_i(\mathbb{N}il(\mathbb{E}))$ *et pour tout* $r \geq 0$, $N_i^r(\mathbb{E}) = K_i(\mathbb{N}il^r(\mathbb{E}))$. *On a alors* $N_i(\mathbb{E}) = \varinjlim_r N_i^r(\mathbb{E})$.

En particulier, pour un anneau unitaire A, on notera

$$N_i(A) = N_i(\mathbb{P}(A)) \text{ et } N_i^r(A) = N_i^r(\mathbb{P}(A)).$$

De plus, le foncteur $E \longmapsto (E,0)$ de $\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathrm{Nil}(\mathbb{E})$ (resp. dans $\mathrm{Nil}^r(\mathbb{E})$) admet pour rétraction le foncteur d'oubli $(E,\nu) \mapsto E$. On définit alors les groupes $\widetilde{N}_i(\mathbb{E})$ et $\widetilde{N}_i^r(\mathbb{E})$ à l'aide des suites naturellement scindées :

$$0 \longrightarrow K_i(\mathbb{E}) \longrightarrow N_i(\mathbb{E}) \xrightarrow{\Pi_i} \widetilde{N}_i(\mathbb{E}) \longrightarrow 0 \ ,$$

$$0 \longrightarrow K_i(\mathbb{E}) \longrightarrow N_i^r(\mathbb{E}) \xrightarrow{\Pi_i^r} \widetilde{N}_i^r(\mathbb{E}) \longrightarrow 0 \ .$$

Le corollaire précédent montre que $\widetilde{N}_i(\mathbb{E}) = \varinjlim_n \widetilde{N}_i^r(\mathbb{E})$ et pour un anneau unitaire A, on a les groupes $\widetilde{N}_i(A) = \widetilde{N}_i(\mathbb{P}(A))$ et $\widetilde{N}_i^r(A) = \widetilde{N}_i^r(\mathbb{P}(A))$.

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème suivant :

THEOREME. - *Soit* A *un anneau unitaire. Pour tout entier* $n \geq 2$ *inversible dans* A, *les groupes* $\widetilde{N}_i(A)$ *sont* n*-divisibles et sans* n*-torsion.*

(1.2) La catégorie $\Omega(A)$.

Soit $\mathbb{E}$ une catégorie exacte. D'après [4] on considère la catégorie $\mathbb{E}[t,t^{-1}]$ dont les objets sont les objets de $\mathbb{E}$, les flèches de E dans F sont les sommes formelles à support fini (polynômes de Laurent) $\gamma = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n t^n$, où les γ_n sont des flèches de E dans F dans $\mathbb{E}$. La loi de composition est le "produit des polynômes de Laurent".

On définit alors une catégorie $\Omega(\mathbb{E})$ de la façon suivante : les objets de $\Omega(\mathbb{E})$ sont les couples (E,γ) où E est un objet de $\mathbb{E}$ et γ un automorphisme de E dans $\mathbb{E}[t,t^{-1}]$; les flèches $f : (E,\gamma) \to (F,\delta)$ sont les flèches $f : E \to F$ de $\mathbb{E}$ telles que $\delta_o f = f_o \gamma$ dans $\mathbb{E}[t,t^{-1}]$; enfin une suite $0 \to (E',\gamma') \to (E,\gamma) \to (E'',\gamma'') \to 0$ est exacte, si la suite sous-jacente de $\mathbb{E}$ est exacte.

De plus, pour tout entier $r \geq o$, on désigne par $\Omega^r(E)$ la sous-catégorie pleine de $\Omega(E)$ dont les objets sont les couples (E,γ) tels que l'ordre de γ soit supérieur ou égal à r (i.e. $\gamma_{-n}=o$ pour $n>r$).

LEMME. - *Les catégories* $\Omega(\mathbb{E})$ *et* $\Omega^r(\mathbb{E})$ *pour tout* $r \geq o$ *sont exactes et* $\Omega(\mathbb{E}) = \varinjlim_r \Omega^r(\mathbb{E})$. *Par suite* $K_i(\Omega(\mathbb{E})) = \varinjlim_r K_i(\Omega^r(\mathbb{E}))$.

En effet, $\mathbb{E}$ est une sous-catégorie exacte d'une catégorie abélienne $\mathbb{A}$, alors $\Omega(\mathbb{E})$ (resp. $\Omega^r(\mathbb{E})$) est une sous-catégorie exacte de la catégorie abélienne $\Omega(\mathbb{A})$ (resp. $\Omega^r(\mathbb{A})$).

Lorsque A est un anneau unitaire, on note $\Omega(A) = \Omega(\mathbb{P}(A))$ et $\Omega^r(A) = \Omega^r(\mathbb{P}(A))$ $r \geq 0$.

(1.3) Les homomorphisme $\rho_i : K_i(\Omega(A)) \longrightarrow \tilde{N}_i(A)$.

Tout d'abord, nous construisons un foncteur exact $\rho^\circ : \Omega^\circ(A) \to \mathbb{N}il(A)$ Pour cela, en suivant l'exemple de [9] (démonstration du théorème 16.4) on établit la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - *i) Soit* (E,α) *un objet de* $\Omega^\circ(A)$. *Désignons par* u_α *l'endomorphisme de* $E \otimes_A A[t]$ *induit par* α. *Alors* $E_\alpha = \mathrm{Coker}(u_\alpha)$ *est un* A*-module projectif de type fini et la multiplication par* t *induit sur* E_α *un endomorphisme nilpotent* ν_α.

ii) L'application $(E,\alpha) \mapsto (E_\alpha,\nu_\alpha)$ *définit un foncteur exact* $\rho^\circ : \Omega^\circ(A) \longrightarrow \mathbb{N}il(A)$.

iii) Soient (E,α) *et* (E,β) *deux objets de* $\Omega^\circ(A)$ *ayant le même module sous-jacent, alors la suite*

$$0 \longrightarrow (E_\beta,\nu_\beta) \longrightarrow (E_{\alpha\beta},\nu_{\alpha\beta}) \longrightarrow (E_\alpha,\nu_\alpha) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Considérons donc un objet (E,α) de $\Omega^\circ(A)$. L'inclusion $i : E \otimes_A A[t] \longrightarrow E \otimes_A A[t,t^{-1}]$ admet une rétraction A-linéaire j, de sorte que $v_\alpha = j \circ u'_{\alpha^{-1}} \circ i$ est une rétraction A-linéaire de u_α, où $u'_{\alpha^{-1}}$ désigne l'endomorphisme de $E \otimes_A A[t,t^{-1}]$ induit par α^{-1}. Il résulte de ceci une suite scindée de A-modules

$$0 \longrightarrow E \otimes_A A[t] \xrightarrow{u_\alpha} E \otimes_A A[t] \longrightarrow E_\alpha \longrightarrow 0 \ ;$$

donc E_α est un A-module projectif et on note ν_α l'endomorphisme de E_α induit par t. De plus, la suite exacte $E \otimes_A A[t] / t^s E \otimes_A A[t] \longrightarrow E_\alpha \longrightarrow 0$, où s est l'ordre de α^{-1}, montre que E_α est de type fini et ν_α nilpotent. On obtient ainsi un foncteur $\rho^\circ : (E,\alpha) \longmapsto (E_\alpha, \nu_\alpha)$ dont l'exactitude résulte du lemme du serpent.

Enfin soient (E,α) et (E,β) deux objets de $\Omega^\circ(A)$ ayant le même module sous-jacent. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\, u_\alpha \,/\, \mathrm{Im}\, u_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{Coker}(u_{\alpha\beta}) \longrightarrow \mathrm{Coker}(u_\alpha) \longrightarrow 0$$

et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E \otimes_A A[t] & \xrightarrow{u_\beta} & E \otimes_A A[t] \\ \Big\downarrow u_{\alpha\beta} & & \Big\downarrow u_\alpha \\ \mathrm{Im}\, u_{\alpha\beta} & \longrightarrow & \mathrm{Im}\, u_\alpha \end{array}$$

montre que $\mathrm{Im}\, u_\alpha / \mathrm{Im}\, u_{\alpha\beta}$ s'identifie à $\mathrm{Coker}(u_\beta)$; d'où la suite exacte :

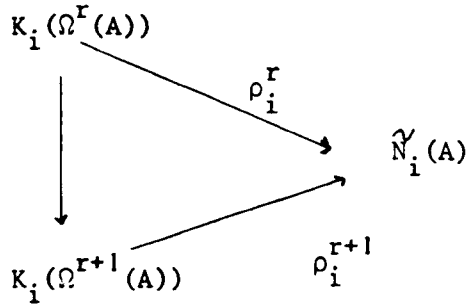
$0 \longrightarrow E_\beta \longrightarrow E_{\alpha\beta} \longrightarrow E_\alpha \longrightarrow 0$, ce qui achève la démonstration de la proposition 1.

COROLLAIRE. - *Pour tout entier* $r \geq 0$, *on a un foncteur exact*

$$\rho^r : \Omega^r(A) \longrightarrow \mathrm{Nil}(A) \quad \textit{défini par} \quad (E,\gamma) \longmapsto (E_{t^r\gamma}, \nu_{t^r\gamma}).$$

On considère alors les homomorphismes composés : $\rho_i^r = \pi_i^r \circ K_i(\rho^r)$: $K_i(\Omega^r(A)) \longrightarrow \tilde{N}_i(A)$.

PROPOSITION 2. - *Pour tout entier* $r \geq 0$ *le diagramme*



est commutatif.

En effet, soit $i_r : \Omega^r(A) \longrightarrow \Omega^{r+1}(A)$ le foncteur d'inclusion et $\delta_r : \Omega^r(A) \longrightarrow \mathrm{Nil}(A)$ le foncteur défini par $(E,\gamma) \longmapsto (E,0)$.

D'après la proposition 1, iii) on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow (E_t,\nu_t) \longrightarrow (E_{t^{r+1}\gamma},\nu_{t^{r+1}\gamma}) \longrightarrow (E_{t^r\gamma},\nu_{t^r\gamma}) \longrightarrow 0$$

et, par définition de ρ°, on a $(E_t,\nu_t) = (E,o)$. Il en résulte que la suite de foncteurs de $\Omega^r(A)$ dans $\mathrm{Nil}(A)$.

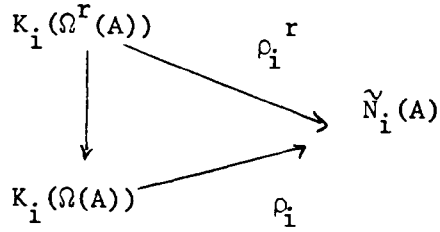
$$0 \longrightarrow \delta_r \longrightarrow \rho^{r+1} \circ i_r \longrightarrow \rho^r \longrightarrow 0$$

est exacte. D'après la proposition (0.4), on a la relation.

$$K_i(\rho^{r+1} \circ i_r) = K_i(\rho^r) + K_i(\delta_r) : K_i(\Omega^r(A)) \longrightarrow N_i(A).$$

En composant par $\Pi_i : N_i(A) \longrightarrow \widetilde{N}_i(A)$ on obtient la relation $\rho_i^{r+1} \circ K_i(i_r) = \rho_i^r$, d'où la proposition.

COROLLAIRE. - *Pour tout* $i \geq 0$, *il existe un unique homomorphisme* $\rho_i : K_i(\Omega(A)) \longrightarrow \tilde{N}_i(A)$ *tel que, pour tout* $r \geq 0$, *le diagramme*



soit commutatif.

Nous allons montrer que l'homomorphisme ρ_i a une section, ce qui établira que le groupe $\tilde{N}_i(A)$ est facteur direct dans $K_i(\Omega(A))$ comme annoncé au début de ce paragraphe.

Pour cela, on définit un foncteur exact $\Delta^1 : \mathrm{Nil}(A) \longrightarrow \Omega^1(A)$ par $(E,\nu) \longmapsto (E, 1-\nu t^{-1})$ et on note

$$\Delta_i : \tilde{N}_i(A) \longrightarrow N_i(A) \xrightarrow{K_i(\Delta^1)} K_i(\Omega^1(A)) \longrightarrow K_i(\Omega(A))$$

l'homomorphisme composé. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - *Pour tout* $i \geq 0$, Δ_i *est une section de* ρ_i *i.e.* $\rho_i \circ \Delta_i = \mathrm{id}_{\tilde{N}_i(A)}$.

Avec les notations précédentes, on a $\rho^1 \circ \Delta^1(E,\nu) = \rho^\circ(E, t-\nu)$.

Mais on a une suite exacte de $A[t]$-modules (la suite exacte caractéristique de ν , [1], p. 630)

$$0 \longrightarrow E \otimes_A A[t] \xrightarrow{t-\nu} E \otimes_A A[t] \longrightarrow E_\nu \longrightarrow 0,$$

où E_ν est le $A[t]$-module dont le groupe sous-jacent est E et où $x.(\sum_k a_k t^k) = \sum_k \nu^k(x).a_k$, pour $x \in E$ et $\sum_k a_k t^k \in A[t]$; par suite on a $\rho^\circ(E,t-\nu) = (E,\nu)$ et $\rho^1 \circ \Delta^1 = id_{Nil(A)}$. Si l'on désigne par $\Delta_i^1 : \tilde{N}_i(A) \longrightarrow N_i(A) \xrightarrow{K_i(\Delta^1)} K_i(\Omega^1(A))$ l'homomorphisme composé, on a $\rho_i^1 \circ \Delta_i^1 = id_{\tilde{N}_i(A)} = \rho_i \circ \Delta_i$, ce qui établit la proposition.

(1.4) Le théorème de divisibilité.

LEMME. - *Soit* $n \geq 2$ *un entier. Les coefficients de la série formelle* $\sqrt[n]{1+t} \in \mathbb{Q}[[t]]$ *sont dans le sous-anneau* $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ *de* $\mathbb{Q}$.

On procède par récurrence sur le degré de cette série. On a $\sqrt[n]{1+t} = 1 + \frac{1}{n} t + o(t)$. Supposons que $\sqrt[n]{1+t} = 1+p(t)+a_{k+1}t^{k+1}+o(t^{k+1})$, où P(t) est un polynôme dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$, à coefficients, sans terme constant et de degré k. On a alors $1+t = 1+na_{k+1}t^{k+1} + Q(t) + o(t^{k+1})$ où Q(t) est un polynôme de degré k+1 à coefficients dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$; il en résulte que $a_{k+1} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$.

Le théorème (1.1) résulte alors de la proposition suivante.

PROPOSITION. - *Soient* A *un anneau (unitaire) et un entier inversible dans* A.

i) Le foncteur $\theta^n : \mathbb{N}il(A) \longrightarrow \Omega(A)$ *défini par* $(E,\nu) \longmapsto (E, \sqrt[n]{1-\nu t^{-1}})$ *est exact.*

Désignons par $\theta_i^n : \tilde{N}_i(A) \longrightarrow N_i(A) \longrightarrow K_i(\Omega(A))$ *l'homomorphisme composé*

ii) L'endomorphisme $\rho_i \circ \theta_i^n$ *de* $\tilde{N}_i(A)$ *est bijectif. L'automorphisme réciproque est induit par la multiplication par n.*

Le foncteur θ^n est bien défini grâce au lemme précédent.

Pour $1 \leq k \leq n$, on considère les foncteurs exacts $g_k : \mathbb{N}il^r(A) \to \mathbb{N}il(A)$ définis par $(E,\nu) \mapsto (E_\alpha{}^k, \nu_\alpha{}^k)$, où $\alpha = t^r (\sqrt[n]{1-\nu t^{-1}})$.

La proposition (1.3.1,iii) montre que l'on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow g_1 \longrightarrow g_{k+1} \longrightarrow g_k \longrightarrow 0 ;$$

d'où $K_i(g_{k+1}) = K_i(g_1) + K_i(g_k) : N_i{}^r(A) \longrightarrow N_i(A)$

et, par suite, $K_i(g_n) = n\, K_i(g_1)$.

Soit $j_i{}^r : \tilde{N}_i{}^r(A) \longrightarrow \tilde{N}_i(A)$. Grâce au corollaire de la proposition (1.3.2) on vérifie que

$$\rho_i \circ \Delta_i \circ j_i^r = n\, \rho_i \circ \theta_i^n \circ j_i^r \quad \tilde{N}_i^r(A) \longrightarrow \tilde{N}_i(A).$$

Par passage à la limite inductive, on obtient

$$\rho_i \circ \Delta_i = n\, \rho_i \circ \theta_i^n \quad \tilde{N}_i(A) \longrightarrow \tilde{N}_i(A)$$

d'où $n\, \rho_i \circ \theta_i^n = id_{\tilde{N}_i(A)}$.

COROLLAIRE. - *Si* A *est une* $\mathbb{Q}$*-algèbre,* $\tilde{N}_i(A)$ *est un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel pour tout* $i \geq 0$.

2. SUR L'INVARIANCE HOMOTOPIQUE DE LA K-THEORIE HERMITIENNE.

(2.1) Les groupes $k_i(A)$ et $k'_i(A)$.

Soit A un anneau hermitien (i.e. un anneau unitaire A, muni d'un anti-automorphisme involutif $a \mapsto \bar{a}$). Si E est un A-module projectif de type fini, ${}^tE$ désigne l'ensemble des $f : E \longrightarrow A$, $\mathbb{Z}$-linéaires tels que $f(x.a)=\bar{a}f(x)$ pour $x \in E$ et $a \in A$. Alors ${}^tE$ est un A-module projectif de type fini et l'application $E \longmapsto {}^tE$ définit un foncteur $\mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)^\circ$, tel que ${}^t({}^tE) \simeq E$ pour tout E. Il résulte de ceci, que le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ opère sur les $K_i(A)$.

On peut donc considérer les groupes de cohomologie de Tate $k_i(A) = \hat{H}^{pair}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_i(A))$ et $k'_i(A) = \hat{H}^{imp}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_i(A))$.

De même, le foncteur $Nil(A) \longrightarrow Nil(A)^\circ$, défini par $(E,\nu) \longmapsto ({}^tE, {}^t\nu)$. induit une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur les $N_i(A)$, d'où des groupes $n_i(A)$ et $n'_i(A)$. De plus, on a une suite scindée de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-modules :

$$0 \longrightarrow K_i(A) \longrightarrow N_i(A) \longrightarrow \tilde{N}_i(A) \longrightarrow 0$$

permettant de définir les groupes $\tilde{n}_i(A)$ et $\tilde{n}_i'(A)$.

PROPOSITION 1. - *Soit* A *un anneau hermitien dans lequel 2 est inversible. On a alors* $\tilde{n}_i(A) = \tilde{n}'_i(A) = 0$ *pour tout* $i \geq 0$.

En effet, si $M = \tilde{N}_i(A)$, on a

$$\tilde{n}_i(A) = \{x \in M / x = \bar{x}\} \ / \ \{x \in M / \exists\, y \in M \ x = y + \bar{y}\} \quad \text{et}$$

$$\tilde{n}'_i(A) = \{x \in M / x = -\bar{x}\} \ / \ \{x \in M / \exists y \in M \ x = y - \bar{y}\}.$$

Soit $x \in M$ tel que $x = \varepsilon\bar{x}$ ($\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$). Or $2id_M$ est un isomorphisme ; donc, **si** $y = \frac{1}{2}x$, on a $\varepsilon\bar{y} = \frac{1}{2}\varepsilon\bar{x} = \frac{1}{2}x$ d'où $x = y + \varepsilon\bar{y}$.

On peut généraliser de la façon suivante la proposition 1.

PROPOSITION 2. - *Soient* A *un anneau et* G *un groupe fini tel que les* $\tilde{n}_i(A)$ *soient des* G*-modules. Alors, si* n = Card(G) *est inversible dans* A, *on a* $\hat{H}^j(G, \tilde{n}_i(A)) = 0$.

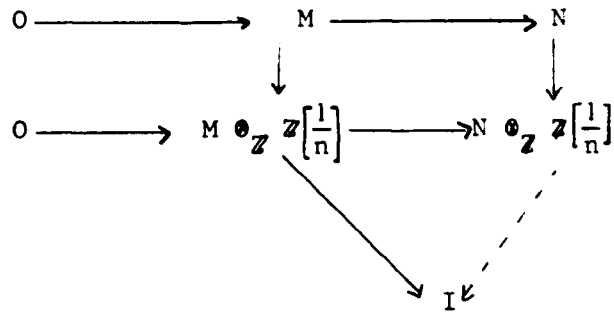
Il suffit, pour cela, de démontrer le lemme suivant.

LEMME. - *Soient* G *un groupe fini,* n = Card(G) *et* M *un* $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$*-module sur lequel* G *opère. On a* $\hat{H}^j(G,M) = 0$ *pour tout* j.

On pose $A = \mathbb{Z}[G]$ et $\Lambda' = \Lambda[\frac{1}{n}]$. Il suffit, par exemple, de montrer que

(i) le foncteur d'inclusion $\mathrm{Mod}_{\Lambda'} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\Lambda}$, qui est exact, préserve **les objets injectifs, et que (ii) le foncteur composé** $\mathrm{Mod}_{\Lambda'} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\Lambda} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ est **exact.**
$M \longmapsto M^G$

(i) Soit $0 \to M \to N$ une suite exacte de Mod_{Λ} et $f : M \to I$ un homomorphisme, **où I est injectif dans** $\mathrm{Mod}_{\Lambda'}$. Le diagramme



montre que f se prolonge en un homomorphisme $N \longrightarrow I$.

(ii) il suffit de montrer que si $M \xrightarrow{\pi} P \to 0$ est exacte dans Mod_A, la suite $M^G \longrightarrow P^G \longrightarrow 0$ est exacte dans Ab.

Soit $y \in P^G$, il existe $x \in M$ tel que $y = \pi(x)$. Mais $x' = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g.x \in M^G$ et $\pi(x') = y$.

On peut interpréter les propositions 1 et 2 comme des résultats d'invariance homotopique.

COROLLAIRE. - *Soit A un anneau hermitien dans lequel 2 est inversible.*

Alors $k_0(A) \simeq k_0(A[t])$ *et* $k_1(A) \simeq k_1(A[t])$.

En effet, d'après [1] (p. 663 th. (a)) et [2] th.4, on a la relation $K_1(A[t]) \simeq K_1(A) \oplus \tilde{N}_0(A)$, il résulte alors de la proposition 1 que $k_1(A[t]) \simeq k_1(A$
En utilisant l'isomorphisme de suspension $K_1(SA) \simeq K_0(A)$, on obtient $k_0(A) \simeq k_0(A[t])$.

Pour les plus hautes dimensions, l'analogue de la formule de Bass est encore à l'état de conjecture ([3], p. 63, théorème fondamental de la K-théorie algébrique (I)).

CONJECTURE. - *Soit* A *un anneau unitaire. Pour tout* $i \geq 2$, *on a*

$$K_i(A[t]) \simeq K_i(A) \oplus \tilde{N}_{i-1}(A).$$

Cette conjecture implique donc que $k_i(A) \simeq k_i(A[t])$ et $k'_i(A) \simeq k'_i(A[t])$ pour tout i, donc que les foncteurs k_i et k'_i sont des invariants homotopiques sur la catégorie des anneaux hermitiens dans lesquels 2 est inversible.

REMARQUE 1.- D'après Quillen ([8] cor. du th. 7), on sait que l'on a $K_i(A) \simeq K_i(A[t])$, pour tout anneau noethérien régulier.

REMARQUE 2. - Les résultats précédents permettent de montrer que $N_i(SA)$ est facteur direct dans $\mathrm{Coker}(K_i(A) \quad K_i(A\,t\,))$ où SA désigne la suspension de l'anneau A.

(2.2) Invariance homotopique en K-théorie hermitienne.

Rappelons tout d'abord, d'après [5], la définition des groupes ${}_\varepsilon W'_i(A)$ et ${}_\varepsilon W_i(A)$ de la K-théorie hermitienne.

On désigne par A un anneau hermitien, dans lequel 2 *est inversible*. Si E est un A-module projectif de type fini, on note H(E) le module ε-hyperbolique associé : c'est $E \oplus {}^t E$ muni de la forme ε-hermitienne $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$. On pose ${}_\varepsilon O_{n,n}(A) = \mathrm{Aut}(H(A^n))$ et ${}_\varepsilon O(A) = \varinjlim_n {}_\varepsilon O_{n,n}(A)$.

Par définition on a ${}_\varepsilon L_i(A) = \pi_i(B_\varepsilon O(A)^+) i \geq 0$, tandis que ${}_\varepsilon L_0(A)$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie des modules ε-quadratiques. D'autre part, d'après [2] th. 4, on a $K_i(A) = \pi_i(B\,Gl(A)^+)$ $i \geq 1$ où $Gl(A) = \varinjlim_A Gl_n(A)$ avec $Gl_n(A) = \mathrm{Aut}(A^n)$. Le foncteur d'oubli des structures quadratiques définit un homomorphisme ${}_\varepsilon L_i(A) \to K_i(A)$ $i \geq 0$, dont le noyau est, par définition, le groupe ${}_\varepsilon W'_i(A)$. De même, le foncteur hyperbolique défini un homomorphisme $K_i(A) \longrightarrow {}_\varepsilon L_i(A)$ dont le conoyau est le groupe ${}_\varepsilon W_i(A)$.

PROPOSITION. - *Soit* A *un anneau hermitien dans lequel 2 est inversible. On a alors* $\varepsilon W_i(A) \xrightarrow{\sim} \varepsilon W_i(A[t])$ *si* $0 \leq i \leq 2$ *et* $\varepsilon W'_i(A) \xrightarrow{\sim} \varepsilon W'_i(A[t])$ *si* $0 \leq i \leq 1$. *De plus, la conjecture implique que* εW_i *et* $\varepsilon W'_i$ *sont des invariants homotopiques pour tout* $i \geq 0$.

Tout d'abord, d'après [5](I. th. 1.1), on a $\varepsilon W'_0(A) \simeq \varepsilon W'_0(A[t])$. On vérifie alors aisément que l'on a une suite exacte $\varepsilon W'_0(A) \to \varepsilon W'_0(A) \to k_0(A)$; d'où il résulte que $\varepsilon W_0(A) \simeq \varepsilon W_0(A[t])$.

D'après le théorème de périodicité de la K-théorie hermitienne [6] , on a la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
\varepsilon W'_n(A) & \longrightarrow & \varepsilon W_n(A) & \longrightarrow & k_n(A) & \longrightarrow & -\varepsilon W_{n+1}(A) \longrightarrow \varepsilon W'_{n-1}(A) \\
\uparrow & & & & & & \downarrow \\
k'_n(A) & & & & & & k'_n(A) \\
\uparrow & & & & & & \downarrow \\
\varepsilon W'_{n-1}(A) & \longleftarrow & \varepsilon W_{n+1}(A) & \longleftarrow & k_n(A) & \longleftarrow & \varepsilon W_n(A) \longleftarrow \varepsilon W'_n(A)
\end{array} .$$

Le corollaire (2.1) et ce qui précède montrent alors que $\varepsilon W_2(A) \xrightarrow{\sim} \varepsilon W_2(A[t])$. Par l'isomorphisme de suspension, on a $\varepsilon W_1(A) \xrightarrow{\sim} \varepsilon W_1(A[t])$ et, enfin, la suite exacte montre que $\varepsilon W'_i(A) \xrightarrow{\sim} \varepsilon W'_i(A[t])$.

Plus généralement, l'invariance homotopique des εW_i et $\varepsilon W'_i$ est équivalente à celle des k_i et k'_i. Donc, si la conjecture est vérifiée, les groupes hermitiens sont des invariants homotopiques.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. BASS, *lgebraic K-theory* (Benjamin), 1968.

[2] L. BREEN, *Un théorème de finitude en K-théorie*, Séminaire Bourbaki, n° 438 (1973).

[3] S.M. GERSTEN, *Problems about higher K-functions, in Algebraic K-theory I*, Lecture notes in Math. n° 341 (Springer), 1973.

[4] M. KAROUBI, *La périodicité de Botten en K-théorie générale*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 4e série t. 4, p. 63-95, (1971).

[5] M. KAROUBI, *Périodicité de la K-théorie hermitienne in Algebraic K-theory III*, Lect. Notes in Math, n° 343 (Springer), 1973.

[6] M. KAROUBI, *Théorie de Quillen et homologie du groupe ortogonal*, (à paraître).

[7] M. KAROUBI, *Some problems and conjectures in Algebraic K-theory in Algebraic K-theory III*. Lect. Notes in Math. n° 343 (Springer), 1973).

[8] D. QUILLEN, *Higher algebraic K-theory, in Algebraic K-theory I*. Lect. notes in Math, n° 341 (Springer), 1973.

[9] R.G. SWAN, *Algebraic K-theory*, Lect Notes in Math. n° 76 (Springer) 1968.

Michel CRETIN
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE