

A. HUDRY

Localisations premières

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 1
, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_1_1_0

© Université de Lyon, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LOCALISATIONS PREMIERES

par A. HUDRY

1 - TERMINOLOGIE.

Par *localisation*, on entend localisation au sens de P. Gabriel [1]. L'anneau R étant unitaire, mais non nécessairement commutatif, Mod_R désigne la catégorie des R -modules à droite.

A une localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ de Mod_R , il est associé bijectivement :

une *topologie à droite* \mathcal{F} , c'est-à-dire un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à droite de R [1].

une *sous-catégorie localisante* \mathcal{C} , c'est-à-dire une sous-catégorie pleine de Mod_R , épaisse et stable par limites inductives.

une *sous-catégorie locale* \mathcal{L} , c'est-à-dire une sous-catégorie pleine de Mod_R tel que le foncteur inclusion i admette un adjoint à gauche l , commutant aux limites projectives finies.

Le *foncteur localisation* de P. Gabriel est alors $L = i \circ l$.

Il est bien connu que si M est un R -module à droite d'enveloppe injective $E(M)$ le noyau du foncteur $\text{Hom}_R(\cdot, E(M))$ est une sous-catégorie localisante \mathcal{C}_M . La localisation (respectivement la topologie à droite) correspondante est notée $\tilde{\mathcal{L}}_M$ (respectivement \mathcal{F}_M).

2 - QUELQUES GENERALITES SUR LES LOCALISATIONS PREMIERES.

Les localisations envisagées ici sont celles qui sont données par la définition suivante :

2.1. DEFINITION (O. Goldman [2]). - Une localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ de Mod_R est dite première s'il existe un R -module à droite M non nul et satisfaisant aux conditions suivantes :

1) M est sans torsion pour $\tilde{\mathcal{L}}$.

2) Pour tout sous-module non nul M' de M , le module M/M' est de torsion pour $\tilde{\mathcal{L}}$.

3) $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_M$.

2/2. THEOREME. - La correspondance $M \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_M$ induit une bijection entre l'ensemble des types d'injectifs indécomposables de coeur non nul et l'ensemble des localisations premières.

Voir [4].

2/3. QUELQUES CONSEQUENCES.

1) Si $\tilde{\mathcal{L}}$ est plate et première, alors $L(R)$ est un anneau quasi-local c'est-à-dire admet un idéal bilatère maximum qui coïncide avec son radical de Jacobson. Si R est noethérien à droite et héréditaire à droite toute localisation première a cette propriété.

2) Toute topologie à droite de type fini \mathcal{F} est intersection de topologies premières [3]. J. Raynaud a montré de plus que cette intersection peut être réduite.

3) Comme nous l'avons fait dans [3], on peut faire de $SP(R)$ un espace topologique.

2.4. DEFINITION. - Un sous-module M' de M est dit primaire dans M si M/M' est un module primaire de O. Goldman [2]. Un module M est dit admettre la propriété

de la décomposition primaire (on écrit D.P. en abrégé) si tout sous-module propre de M est intersection réduite de sous-modules primaires dans M .

Soit \mathcal{P} la sous-catégorie pleine de Mod_R constituée par les R -modules à droite admettant la propriété D.P. Si M est un R -module à droite la notation $\mathcal{P}(M)$ désigne l'ensemble des topologies de la forme $\mathcal{F}_{M'}$, avec M' sous-module homogène de M (pour la définition d'un module homogène voir [3]).

2.5. THEOREME. - \mathcal{P} est une sous-catégorie localisante de Mod_R et en particulier tout module contient un plus grand sous-module admettant la propriété D.P. de plus \mathcal{P} est une théorie de décomposition au sens de N. Popescu [5].

Il est remarquable que pour une vaste classe d'anneaux tout module à droite admet la propriété D.P. Ces anneaux ont été caractérisés dans [3] où nous avons indiqué que les anneaux noethérien à droite, semi-artinien à droite et ceux pour lesquels la $K\text{-dim}(\text{Mod}_R)$ est définie sont des exemples de tels anneaux.

3 - SUR UN PROBLEME DE C. FAITH.

C. Faith pose la question suivante : Quels sont les anneaux isomorphes à des ordres à droite dans l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel à droite sur un corps ?

3.1. DEFINITION. - Un anneau R est dit primaire à droite si le R -module à droite est un module primaire de O. Goldman [2].

3.2. PROPOSITION. - Si R est un anneau primaire à droite, alors soit R est non non singulier c'est-à-dire $Z_R(R) = 0$, soit R est de torsion, c'est-à-dire $Z_R^2(R) = R$.

Ici seuls nous intéressent les anneaux primaires à droite non singuliers.

En voici des exemples :

1) un anneau intègre R est primaire à droite si et seulement si c'est un domaine de Ore à droite.

2) Un anneau premier est primaire à droite si et seulement s'il satisfait à l'une quelconque des conditions équivalentes suivantes :

- (i) R est non singulier et le treillis des compléments est atomique ;
- (ii) L'extension rationnelle maximale de R est isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel à droite.
- (iii) Il existe un complément maximal et il existe un annulateur à droite d'un élément maximal.

3) L'anneau $T_n(K)$ des matrices triangulaires inférieures à coefficients dans un corps K est primaire à droite et non premier.

Si dans la question de C. Faith, la dimension de l'espace vectoriel est finie il est bien connu que les anneaux répondant à la question sont les anneaux premiers, de Goldie à droite. Ces anneaux sont encore les anneaux premiers satisfaisant à la condition (C) suivante :

(C) Les idéaux à droite de R , engendrés par les éléments réguliers de R ; forment un système co-final pour l'ensemble des idéaux à droite essentiels de R .

L'exemple suivant montre que ces anneaux ne sont pas les seuls à répondre à la question de C. Faith : soient, D un domaine de Ore à droite, K le corps des fractions à droite de D , L un D -module libre de base infinie, V le K -espace vectoriel à droite défini par $V = L \otimes_D K$, alors $R = \text{End}_D L$ est isomorphe à un ordre à droite dans $Q = \text{End}_K V$.

Ici il est montré que les anneaux répondant à la question de C. Faith sont les anneaux primaires à droite satisfaisant à une condition (C') de la même forme que la condition (C).

Soit $B(R)$, l'ensemble des éléments réguliers $s \in R$ tels que $sR \in \mathcal{P}_R$. Alors $B(R)$ est une partie multiplicative de R . Soit \mathcal{E} , l'ensemble des idéaux à droite I de R tels qu'il existe $f \in \text{Hom}_R(I, R)$ non prolongeable strictement en un homomorphisme d'un idéal à droite contenant I dans R . Ces idéaux à droite ont été considérés, dans un autre contexte, par K. Mazaiké qui a remarqué que \mathcal{E} est une famille d'idéaux à droite essentiels stable par résiduation à droite. Dans ce qui suit les idéaux à droite de \mathcal{E} sont appelés *fortement essentiels*.

3.3. THEOREME. - *Pour que R soit isomorphe à un ordre à droite dans l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel à droite sur un corps il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :*

- 1) *l'anneau R est primaire à droite et non singulier,*
- 2) *tout idéal à droite fortement essentiel coupe $B(R)$.*

3.4. COROLLAIRE. - *R admet un anneau classique des fractions à droite isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel à droite sur un corps si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

- 1) *l'anneau R est primaire à droite et non singulier.*
- 2) *Les idéaux à droite de R engendrés par les éléments réguliers de R forment un système co-final pour l'ensemble \mathcal{E} des idéaux à droite fortement essentiels.*

4 - LOCALISATIONS PREMIERES ET LOCALISATIONS DEFINIES PAR UN IDEAL BILATERE PREMIER.

Si P est un idéal bilatère premier, soit R_P le localisé de R pour la localisation $\tilde{\mathcal{E}}_{R/P}$. L'application canonique de R dans R_P est notée Ψ_P . En général R_P n'est pas le localisé de Goldie de R pour P même dans le cas noethérien. Cette localisation $\tilde{\mathcal{E}}_{R/P}$ a été étudiée par J. Lambek et G. Michler dans le cas où R est noethérien à droite.

4.1. PROPOSITION. - Soit R un anneau unitaire quelconque, alors pour tout idéal premier P , les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) $\mathcal{L}_{R/P}$ est première.
- 2) R/P est un anneau primaire à droite.
- 3) R/P est un R -module à droite primaire ;
- 4) l'extension rationnelle maximale à droite de R/P est isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel à droite.

En particulier, il en résulte que si R admet la propriété D.P. à droite alors pour tout idéal premier P , la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_{R/P}$ est première.

Pour l'anneau R_P on a les renseignements suivants :

1) Si $\tilde{\mathcal{L}}_{R/P}$ est plate et première alors R_P est quasi-local. Donnons quelques exemples de cette situation :

a) Si R est noethérien à droite, héréditaire à droite tout idéal premier P satisfait à 1),

b) Si R est non singulier et de dimension de Goldie à droite finie, pour tout idéal premier $P \in \text{Ass}R$ la condition 1) est satisfaite.

c) Si R est noethérien à droite, tout premier P non essentiel satisfait à 1) ; il en est ainsi pour tous les idéaux premiers minimaux P d'un anneau noethérien à droite ordre à droite dans un anneau artinien à droite.

2) Pour que R_P soit local (c'est-à-dire quasi local avec $R_P/\text{Rad}R_P$ simple artinien) de radical de Jacobson $\Psi_P(P)R_P$ il faut et il suffit que R/P soit de Goldie à droite et que $\mathcal{L}(P)$ soit calculable à droite. $\mathcal{L}(P)$ désigne l'ensemble des $c \in R$ tels que $cx \in P$ implique $x \in P$. Il en est ainsi pour tout idéal premier inversible dans un anneau noethérien à droite et à gauche ou dans un anneau noethérien à droite avec assez d'idéaux bilatères à droite.

3) Pour que R_P soit local scalaire (c'est-à-dire local avec $R_P/\text{Rad}R_P$ corps) de radical de Jacobson $\Psi_P(P)R_P$ il faut et il suffit que P soit complètement premier et que $\mathcal{L}(P)$ soit calculable à droite.

4.2. THEOREME. - Pour un anneau noethérien à droite R , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) toute localisation première est de la forme $\mathcal{L}_{R/P}^*$ avec P idéal bilatère premier ;

(ii) toute topologie à droite \mathcal{F} de R admet pour système co-final les produits finis des idéaux bilatères premiers lui appartenant ;

(iii) pour tout injectif indécomposable E , il existe un sous-module non nul M du coeur de E , tel que les idéaux à droite annulateurs de M , satisfont à la C.C.D.;

(iv) tout module tertiaire est primaire ;

(v) R a assez d'idéaux bilatères à droite au sens de P. Gabriel.

L'implication (ii) \implies (v) est la réciproque d'un résultat démontré par P. Gabriel. La condition (iv) est analogue à la condition suivante due à G. Michler "tout module de type fini et tertiaire est primaire". Le corollaire suivant répond partiellement à une question de Silver.

4.3. COROLLAIRE. - Si R est noethérien à droite avec assez d'idéaux bilatères à droite alors il en est de même pour $R[S^{-1}]$, où S est une partie multiplicative quelconque de R , satisfaisant à la condition de Ore à droite.

4.4. COROLLAIRE. - Si R est noethérien à droite avec assez d'idéaux bilatères à droite, alors $SP(R)$ est un espace topologique quasi-compact et noethérien.

4.5. PROPOSITION. - Si R est noethérien à droite avec assez d'idéaux bilatères à droite, alors pour tout idéal bilatère premier P inversible dans un sur-anneau, R_P est local, noethérien à droite avec assez d'idéaux bilatères à droite et premier. De plus tout idéal à droite I de R_P est fermé dans la topologie

$\text{Rad}R_P$ -adique, c'est-à-dire : $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (I + (\text{Rad}R_P)^n)$.

4.6. PROPOSITION. - *Si R est premier, noethérien à droite, avec assez d'idéaux bilatères à droite et si tout idéal premier non nul est inversible alors R est héréditaire à droite et à gauche, noethérien à gauche, avec assez d'idéaux bilatères à gauche.*

Les anneaux R considérés dans la proposition 4-6 sont alors exactement, les ordres de Dedekind de J.C. Robson, essentiellement bornés, dans Q simple artinien. La proposition 4.6 est à rapprocher d'un théorème bien connu, dit d'Asano-Michler, établi pour un anneau premier, noethérien à droite et à gauche, borné à droite et à gauche et dans lequel tout idéal premier non nul est inversible.

5 - BIBLIOGRAPHIE.

- [1] P. GABRIEL, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France, 90, 1962, p. 323-448.
- [2] O. GOLDMAN, *Rings and modules of quotients*, J. of Algebra, 13, p. 10-47, september 1969.
- [3] A. HUDRY, *Sur la localisation dans une catégorie de modules*, C. R. Acad. Sc. Paris, T. 270, p. 925-928, 13 avril 1970.
- [4] A. HUDRY, *Sur les anneaux localement homogènes*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 271, p. 1214-1217, 21 décembre 1970.
- [5] N. POPESCU, *Théorie générale de la décomposition*, Revue Roumaine, 12, n°9, 1967.

A. HUDRY
Département de mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE