

J. BICHOT

Propriétés d'unicité des supplémentaires

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1972, tome 9, fascicule 3
, p. 59-65

[<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_3_59_0>](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_3_59_0)

© Université de Lyon, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIETES D'UNICITE DES SUPPLEMENTAIRES

J. BICHOT

Les anneaux considérés sont tous unitaires. Les modules, sauf mention explicite du contraire, sont des modules à gauche.

I. - Généralement, un facteur direct d'un module M possède dans M plusieurs supplémentaires. Nous nous proposons d'étudier, sous le nom de *U.S. modules*, les modules M tels que chaque facteur direct de M possède dans M un seul supplémentaire.

Comme premier exemple, signalons que tous les modules monogènes sur un anneau commutatif sont des *U.S. modules*. (Il suffit de considérer A/K , K étant un idéal de l'anneau commutatif A . $I+J = I+J' = A$ et $I \cap J = I \cap J' = K$ implique alors $J = J'$. En effet, $I \cap (J+J') = I(J+J') = IJ + IJ' = K$).

Tout facteur direct d'un *U.S. module* est un *U.S. module*. Par contre, si M est un module non nul, M^2 n'est en *aucun* cas un *U.S. MODULE* (la diagonale possède deux supplémentaires distincts, $\{0\} \times M$ et $M \times \{0\}$). Cela montre en particulier qu'il n'existe pas d'anneau A tel que tout A -module à gauche de type fini soit *U.S.*.

Il est facile de voir que le treillis des sous-modules d'un module M est distributif si et seulement si pour tout couple X, Y de sous-modules de M tels que $X \subseteq Y$ le module Y/X est *U.S.* (utiliser la distributivité sous la forme $P \cap Q = P \cap Q'$ et $P+Q = P+Q'$ implique $Q = Q'$). Cela fournit une preuve du fait que : un sous-module d'un *U.S. module* n'est pas nécessairement un *U.S. module*. (Les anneaux commutatifs auraient tous un treillis d'idéaux distributif : par exemple les anneaux commutatifs intègres seraient tous des anneaux de Prüfer.).

II. - Le résultat fondamental concernant l'unicité du supplémentaire d'un facteur direct d'un module M est dû à Fuchs. Soit $M = N \oplus N'$; pour que N' soit l'unique supplémentaire de N dans M , il faut que N' soit stable par les endomorphismes de M et il suffit que N' soit stable par les projecteurs de M . (La démonstration du théorème 22-3 de [4], relative aux groupes abéliens, est intégralement valable pour les modules). Donnons deux corollaires immédiats de ce théorème :

M est un U.S.module si et seulement si $M = M_1 \oplus M_2 = N \oplus N'$ implique
 $N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$.

Soit $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ une décomposition d'un U.S.module M , N un facteur direct de M et J une partie non vide de I . Il vient $N \cap (\bigoplus_{i \in J} M_i) = \bigoplus_{i \in J} (N \cap M_i)$

Dans un anneau A , un idéal à gauche I est stable par les endomorphismes de ${}_A A$ si et seulement si I est bilatère. Or on vérifie le lemme suivant :

Soit e un idempotent de l'anneau A ; l'idéal Ae est bilatère si et seulement si pour tout idempotent e' de A la condition $eA = e'A$ implique $e = e'$. Si donc Ae est le seul supplémentaire de $A(1-e)$, alors $(1-e)A$ est le seul supplémentaire de eA . Nous pouvons donc énoncer :

Un anneau A est un u-s-module en tant que A -module si et seulement si A est un U-S-module en tant que A -module à droite. Nous parlerons donc de U.S.anneau.

Le théorème de Fuchs permet encore d'établir ce lemme :

Soit A un anneau, K, J et J' des idéaux à gauche de A tels que $J+J' = A$ et $J \cap J' = K$. Pour que J/K soit l'unique supplémentaire de J'/K dans A/K il faut et il suffit que J soit un idéal bilatère. Ceci permet de caractériser les anneaux tels que tous les modules monogènes soient U.S. :

Soit A un anneau, on a équivalence entre les trois propriétés :

- $\alpha)$ Tout A -module à gauche monogène est un U.S.-module
- $\beta)$ Tout idéal à gauche de A est bilatère
- $\gamma)$ Tout idéal principal à gauche de A est bilatère.

Dans le cas des anneaux réguliers (au sens de Von Neumann) on peut améliorer la propriété de la façon suivante :

Soit A un anneau régulier, on a équivalence entre les propriétés :

- $\alpha)$ Tout A -module à gauche monogène est un U.S.-module ;
- $\alpha')$ Tout A -module à droite monogène est un U.S.-module ;
- $\beta)$ (ou $\beta')$ ou $\gamma)$ ou $\gamma')$ Tout idéal à gauche (à droite ; principal) est bilatère ;
- $\delta)$ A est un U.S. anneau ;
- $\epsilon)$ Tous les idempotents de A sont centraux ;
- $\zeta)$ Le seul élément nilpotent de A est zéro.

On remarquera que ces diverses propriétés n'impliquent nullement la commutativité de A . Tout corps non commutatif est un anneau régulier les vérifiant. La démonstration de $\delta) \Rightarrow \epsilon)$ peut s'appuyer sur le lemme : Dans un anneau A , si e est un idempotent tel que les idéaux eA et Ae soient bilatères, e est central.

$\zeta) \Rightarrow \epsilon)$ figure en [2] exercice 17 du paragraphe 6. La réciproque s'appuie sur la propriété suivante des anneaux réguliers : si $a \in A$ et si I est un idéal à gauche de A , alors $(aA) \cap I = aI$. On en tire $aA = a^2A$ pour tout $a \in A$.

Pour les produits d'anneaux, on a la propriété suivante, immédiate :

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'anneaux et $A = \prod_{i \in I} A_i$ l'anneau produit des A_i

- 1) A est un U.S. anneau si et seulement si chaque A_i est un U.S. anneau.
- 2) Tout A -module à gauche monogène est U.S. si et seulement si, pour chaque $i \in I$, tout A_i -module à gauche monogène est U.S.

III - Rappelons quelques définitions. Un sous-module N d'un module M est facteur direct absolu de M si tout complément relatif de N dans M est un supplémentaire de N . Si chaque sous-module complément de L est facteur direct absolu, M est dit infra-injectif. Si tout sous-module de M possède une plus grande extension essentielle dans M , M est dit bien complémenté.

Nous avons démontré en [1] qu'un module M est à la fois infrainjectif et bien complémenté si et seulement si les sous-modules compléments de M forment un sous-treillis du treillis des sous-modules de M . Enfin un module M est dit uniforme si tout sous-module non nul de M est essentiel dans M , et deux modules uniformes sont dits similaires, ou encore de même type si leurs enveloppes injectives sont isomorphes.

Première remarque : *Tout U.S.module infra-injectif est bien complémenté.*

(Si N est un sous-module de M , et N^e un complément relatif de N dans M , l'unique supplémentaire N^{cc} de N^c est la plus grande extension essentielle de N dans M).

En utilisant cette remarque, le théorème de Fuchs et le fait que tout module quasi-injectif est infra-injectif, on obtient la propriété :

Si E est un U.S.module quasi-injectif, tout sous-module de E est un U.S.module.

Le résultat suivant répond dans une certaine mesure à la question de savoir si un module admettant une décomposition donnée en sous-modules uniformes est ou non U.S. :

Soit M un module infra-injectif et bien complémenté, somme directe d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ de sous modules uniformes telle que, pour chaque type de modules uniformes, il existe seulement un nombre fini des X_i qui soient de type t . Alors, pour que M soit un U.S.module, il faut et il suffit que les X_i soient deux à deux non isomorphes.

La démonstration repose sur le lemme suivant : Sous les hypothèses du théorème, si V est un facteur direct de M tel que $V \cap X_i = 0$ pour tout $i \in I$, alors $V = 0$. En désignant par V^c un complément relatif quelconque de V , et par V_i^c un complément relatif de V contenant X_i , l'isomorphie de V^c et V_i^c montre que V^c possède un sous-module W_i isomorphe à X_i . On démontre alors par récurrence que la famille $(W_i)_{i \in I}$ est linéairement indépendante. Un résultat de J. Fort [3] permet d'affirmer que tout sous-module non nul de M , en particulier V si V n'est pas nul, contient un sous-module uniforme non nul, disons U . U et les W_i forment une famille linéairement indépendante. D'après les théorèmes de dimension de Miyashita [5] le cardinal de l'ensemble des sous-modules d'une famille linéairement indépendante de sous-modules uniformes qui sont du type de U et majoré par le cardinal de l'ensemble des sous-modules uniformes de ce type dans une famille linéairement indépendante maximale, comme les X_i .

On aboutit donc à $p+1 \leq p$, p étant un cardinal fini : d'où la nullité de V .

Ce lemme une fois établi, si $N \oplus N' = M$, on désigne par J l'ensemble des indices i tels que $N \cap X_i \neq 0$ et, de même, par J' l'ensemble des i tels que $N' \cap X_i \neq 0$. On met alors N sous la forme $V \oplus (\bigoplus_{i \in J} X_i)$, on vérifie que $V \cap X_i = 0$ pour tout $i \in I$, d'où $N = \bigoplus_{i \in J} X_i$ et $N' = \bigoplus_{i \in J'} X_i$; d'où $J' = I - J$ qui montre que J' ; donc N' , est complètement déterminé par J , c'est-à-dire par N .

Comme corollaire, citons :

Soit M un module semi-simple, pour que M soit un U.S.module, il faut et il suffit que chaque composant isotypique de M soit simple.

Soit M un module injectif bien complété, admettant une décomposition en somme directe d'injectifs indécomposables $(M_i)_{i \in I}$: M est un U.S.module si et seulement si les M_i sont deux à deux isomorphes.

Le problème du passage de la propriété U.S. à l'enveloppe injective reçoit une réponse positive dans le cas ci-dessous :

Soit M un U.S.module infra-injectif, et E son enveloppe injective.

Si E est bien complété, par exemple si le sous-module singulier de M est nul, alors E est un U.S.module.

En combinant cette remarque avec le théorème précédant, on obtient le résultat négatif suivant concernant les infra-injectifs :

Soit N un module uniforme de sous-module singulier nul. Si N' est un module uniforme similaire à N et non isomorphe à N , $N \times N'$ n'est pas infra-injectif.

IV - Nous donnons maintenant quelques résultats relatifs à la situation duale du paragraphe III. Dans un module M , Y est un supplément de X si $Y+X = M$ et si Y est minimal pour cette propriété. M est dit bien supplémenté si, dans la situation $X+Y = M$, il existe toujours un supplément de X contenu dans Y . M est un α -module si tout sous-module X contient un plus petit sous-module $\alpha(X)$ tel que $X+Y = M \Rightarrow \alpha(X) + Y = M$, et si α est une application croissante.

X est clos si X ne possède pas de sous-module propre X' tel que $X+Y = M \Rightarrow X'+Y = M$.
 M est infra-projectif si tout sous-module clos possède des suppléments, et si ces suppléments sont en fait des supplémentaires. (cf. [1]). On a les résultats :

- 1) Tout U.S. module infra-projectif et bien supplémenté est un α -module.
- 2) Soit P un module quasi-projectif et bien supplémenté ; si P est un U.S.module, tout quotient de P est encore un U.S.module.
- 3) Soit M un U.S.module infra-projectif, et P une couverture infra-projective de M . (par exemple une couverture projective, s'il en existe). Si P est un U.S.module, alors P est U.S.
- 4) Soit A un anneau bien supplémenté (on dit encore : semi-parfait, et la notion est bilatère). On a équivalence entre

- A est un U.S.anneau,
- Tout A -module à gauche monogène est un U.S.module,
- Tout A -module à droite monogène est un U.S.module.

5) Soit M un α -module infra-projectif, somme directe d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ de sous-modules indécomposables ayant la propriété : Pour tout facteur direct V de M distinct de M , il existe un indice $i_0 \in I$ tel que $V + (\bigoplus_{i \neq i_0} X_i) \neq M$.
 Alors M est U.S.

Cette propriété a lieu en particulier si la famille $(X_i)_{i \in I}$ est finie et composée de sous-modules deux à deux non isomorphes.

V - Notons une propriété des anneaux d'endomorphismes. Renault a démontré en 6 (Lemme 4.1) cette propriété : Soit E un module injectif dont le sous-module singulier E^Δ est nul. Pour qu'il n'existe pas d'endomorphismes nilpotents non nuls de E - c'est-à-dire pour que l'anneau $\text{End}(E)$ soit réduit - il faut et il suffit que, pour tout endomorphisme f de E et tout sous-module injectif E_1 on ait $f(E_1) \subseteq E_1$. Interprétée à la lumière du théorème de Fuchs, la propriété se lit : il faut et il suffit que E soit un U.S.module.

D'autre part, on vérifie aisément le lemme : Soit M un module dont le sous-module singulier M^Δ est nul, E l'enveloppe injective de M . Si $\text{End}(E)$ est réduit, alors $\text{End}(M)$ l'est aussi. (Si $f \in \text{End}(M)$ vérifie $f^2 = 0$, on vérifie que tout prolongement g de f à E est tel que g^2 prolonge f^2 , et que $\text{Ker}(g^2)$ est un facteur direct, d'où $g^2 = 0$).

On énonce alors :

Soit M un module infra-injectif tel que le sous-module singulier M^Δ soit nul : Si M est un U.S.module, $\text{End}(M)$ est réduit. Dans le cas où M est quasi-injectifs la réciproque est exacte : si $\text{End}(M)$ est réduit, M est U.S.

(En effet, si M est infra-injectif et U.S., E est encore U.S. : la propriété de Renault et le lemme donnent alors le résultat. Réciproquement, M étant stable par les endomorphismes de E , $\text{End}(E)$ est réduite, E est U.S., et M l'est aussi).

Les anneaux commutatifs munis d'éléments nilpotents non nuls - par exemple $\mathbb{Z}/(4)$ - montrent que $\text{End}(M)$ n'est pas réduit pour tout U.S.module M .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. BICHOT : Essentialité et Importance dans les modules.
Thèse de 3e cycle - Lyon 1968.
- [2] BOURBAKI : Algèbre - Chapitre 8 : Modules et Anneaux semi-simples.
Hermann.
- [3] J. FORT : Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module. CR Acad. Sc. T. 262, 1966, 1239-1242.
- [4] L. FUCHS : Abelian groups. Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences - Budapest 1958.
- [5] Y. MIYASHITA : On quasi-injective modules.
J. Fac. Sc. Hokkaido Univ. 18 (1965) 158-187.
- [6] G. RENAULT : Anneaux réduits non commutatifs.
J. Math. Pures et appliquées 46 (1967) p. 203-214.

Manuscrit remis le 21 février 1973.

J. BICHOT
Maître-assistant
Université Claude Bernard
Département de mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE