PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JACQUES BICHOT

Modules continus

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1971, tome 8, fascicule 1
, p. 55-61
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1971__8_1_55_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1971 t.8-1

MODULES CONTINUS

Jacques BICHOT

Utumi étudia dans plusieurs articls des anneaux, et particulièrement des anneaux réguliers, possèdant une propriété plus faible que l'auto-injectivité : il les appelle anneaux continus. En nous inspirant de ses travaux, nous avons cherché à dégager divers affaiblissements de la notion de module *quasi-injectifs.* La seule qui soit à notre connaissance, entièrement originale est celle de module *fortement continu.* Parmi les résultats relatifs aux anneaux d'endomorphismes, le plus intéressant est sans doute celui qui montre que l'anneau des endomorphismes d'un module continu et très complémenté est continu à droite.

1. Terminologie .

On désigne toujours par M un module à gauche sur un anneau unitaire A.

Pour les notions relatives aux sous-modules compléments, facteurs directs absolus, cf. [4] . Comme en [1], nous appelons *infra-injectifs* les modules dont tout sous-module complément est facteur direct absolu. Suivant [2] , nous disons que M est *bien complémenté* lorsque tout sous-module de M possède une plus grande extension essentielle dans M.

Nous introduisons en outre le vocabulaire suivant :

(1.1) M est *directement complémenté* si tout sous-module complément de M en est facteur direct (il est équivalent de dire que tout sous-module de M est essentiel dans un facteur direct de M).

(1.2) M vérifie la *propriété d'addition des facteurs directs* lorsque, si N et N' sont des facteurs directs de M tels que $N \cap N' = 0$, alors $N \oplus N'$ est facteur direct de M (il est équivalent de dire que, si N et N' sont des facteurs directs tels que $N \cap N'$ soit encore facteur direct, alors $N + N'$ est facteur direct, ou encore que, si N et N' sont des facteurs directs tels que $N \cap N' = o$, il existe un supplémentaire de N contenant N').

(1.3) M est *iso-direct* si tout sous-module de M isomorphe à un facteur direct de M est lui-même facteur direct ; M est *iso-complémenté* si tout sous-module isomorphe à un sous-module complément est aussi un complément.

(1.4) M est *continu* si M est iso-direct et directement complémenté.

(1.5) Un *endomorphisme* φ de M est *continu* si $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-module complément de M (il revient au même de dire que, si N est un sous-module complément de M contenu dans $\mathrm{Im}(\varphi)$, alors $\varphi^{-1}(N)$ est complément, ou encore que, si X est un sous-module contenant $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et Y une extension essentielle de X dans M, alors $\varphi(X)$ est essentiel dans $\varphi(Y)$.

(1.6) M est *très bien complémenté* s'il est bien complémenté et si chaque endomorphisme de M est continu (exemple : les modules dont le sous-module singulier est nul).

(1.7) M est *fortement continu* si M est infra-injectif et si tout monomorphisme d'un sous-module de M dans M se prolonge en un endomorphisme de M.

2. Propriétés générales.

(2.1) Pour que M soit infra-injectif, il faut et il suffit que M soit directement complémenté et vérifie la propriété d'addition des facteurs directs.

(2.2) Soit M un module tel que tout monomorphisme d'un sous-module de M dans M se prolonge en un endomorphisme de M. Alors M est iso-direct. En particulier si M est fortement continu, alors M est continu.

(2.3) Si M est continu, M est infra-injectif.

(2.4) Pour que M soit fortement continu , il faut et il suffit que M soit stable par lese endomorphismes continus de son enveloppe injective.

(2.5) Chacune des propriétés :

i) M est directement complémenté ;
ii) M vérifie la propriété d'addition des facteurs directs ;
iii) M est iso-direct ;
iv) M est iso-complémenté ;
v) M est continu ;
vi) M est fortement continu ;
vii) Tout endomorphisme de M est continu ;
viii) M est très bien complémenté ;

se conserve par passage à un facteur direct de M.

(2.6) Lorsque M est quasi-injectif, les deux propriétés ; tout endomorphisme de M est continu ; M est très bien complémenté - restent valables pour chaque sous-module de M (ces propriétés sont alors en fait équivalentes ; cf. (3.8)).

(2.7) Soit N un sous-module de M, $f : N \to M$ un morphisme tel que $N \cap f(N) = o$, P et Q des extensions essentielles maximales de N et f(N) dans M. Si $M' = P \oplus Q$ est iso-complémenté (ce qui est le cas lorsque M est continu), alors il existe un prolongement $g : P \to M$ de f tel que $g(P) \subset Q$.

(2.8) Soit $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ un module continu, avec $n > 1$. Si, pour chaque k, M_k est isomorphe à un sous-module de $\bigoplus_{i \neq k} M_i$, alors M est quasi-injectif. En particulier, s'il existe un entier $n > 1$ tel que M^n soit continu, alors M est quasi-injectif (et s'il existe un module libre ayant une base formée de 2 éléments au moins, qui soit continu, alors A est auto-injectif à gauche).

(2.9) Soit A un anneau.

a) si A est intègre, alors A est iso-direct à gauche $\Longleftrightarrow$ A est iso-direct à droite $\Longleftrightarrow$ A est un corps.

b) Tout anneau régulier (au sens de Von Neumann) est iso-direct (à droite et à gauche).

c) Si A est un anneau de Baer, on a équivalence entre : A est régulier ; A est iso-direct à droite ; A est iso-direct à gauche.

d) Si A est un anneau régulier, alors : A est continu à gauche $\Longleftrightarrow$ A est directement complémenté à gauche $\Longrightarrow$ A est un anneau de Baer.

e) Soit A un anneau semi-premier commutatif, et I un idéal de A. Le seul complément relatif de I est Ann(I) et la plus grande extension essentielle de I est donc Ann(Ann(I)).

f) Pour un anneau commutatif A, on a, en notant A^{Δ} l'idéal singulier :

A est un anneau de Baer $\Longleftrightarrow$ $A^{\Delta} = o$ et A est directement complémenté $\Longleftrightarrow$ $A^{\Delta} = o$ et A est infra-injectif.

(Dans le cas non commutatif on a encore : $A^{\Delta}_{g} = o$ et A directement complémenté à gauche $\Longrightarrow$ A de Baer $\Longrightarrow$ $A^{\Delta}_{d} = o$).

3. Anneaux d'endomorphismes.

Soient E l'anneau des endomorphismes de M, J l'idéal bilatère de E formé des endomorphismes de M dont le noyau est essentiel dans M, et $\bar{E} = E/J$ l'anneau associé de M (cf [3]). On notera E_M etc.. s'il intervient plusieurs modules.

On sait que, si I est l'enveloppe injective de M, il existe un monomorphisme canonique de $\bar{E}_M$ dans $\bar{E}_I$ obtenu en associant à la classe $\bar{f}$ d'un endomorphisme f de M la classe $\bar{g}$ d'un prolongement quelconque de f à I.

(3.1) Soient M un module fortement continu et I son enveloppe injective. Le monomorphisme canonique $\bar{E}_M \longrightarrow \bar{E}_I$ est alors un isomorphisme (en particulier l'anneau associé à un module fortement continu est régulier auto-injectif à droite).

(3.2) Soit M un module continu. J_M est alors le radical de Jacobson de E_M et l'anneau associé $\bar{E}_M$ est régulier (pour un anneau continu à gauche, on a donc équivalence entre la régularité, la nullité du radical de Jacobson, la nullité de l'idéal singulier à gauche).

(3.3) Soit M un module infra-injectif. Les familles finies d'idempotents orthogonaux de $\bar{E}$ se relèvent dans E (c'est-à-dire que si $u_1,\ldots,u_n$ sont des idempotents orthogonaux dans $\bar{E}$, il existe des projecteurs orthogonaux $p_1,\ldots,p_n$ de M tels que $u_i = \bar{p_i}$).

(3.4) On sait que si l'anneau des endomorphismes d'un module M est local alors M est indécomposable. Réciproquement, lorsque M est continu, si M est indécomposable, alors E est local.

(3.5) Soit M un module continu très bien complémenté. L'anneau des endomorphismes de M est alors régulier et continu à droite.

(3.6) Etant donné un sous-module X du module M, on notera Q(X) l'intersection des noyaux d'endomorphismes de M contenant X, et si M est bien complémenté, $\omega(X)$ la plus grande extension essentielle de X dans M.

a) Si M est très bien complémenté, alors $\omega(X) \subseteq Q(X)$.

b) Si M est très bien complémenté et directement complémenté, alors $\omega(X) = \varphi(X)$.

Notons alors F(X) l'idéal à gauche de E formé des endomorphismes qui s'annulent sur X, on a $F(X) = Ep$, où p est un projecteur sur un supplémentaire de $\omega(X)$, et $\omega(X) = \mathrm{Ann}_d(F(X)).M$.

c) Si M est continu et très bien complémenté, alors pour tout idéal à droite K de E, on a $\omega(K) = \mathrm{Ann}_d(\mathrm{Ann}_g(K))$ et $\omega(K.M) = \omega(K).M$.

En particulier, pour un anneau régulier continu à gauche A, on a pour tout idéal à gauche K de A : $\omega(K) = \mathrm{Ann}_g(\mathrm{Ann}_d(K))$ (remarquer que A est alors un anneau de Baer).

(3.7) Soit M un module infra-injectif et N un sous-module essentiel de M. Pour que N soit infra-injectif, il faut et il suffit que N soit stable par les projecteurs de M.

(3.8) Soit M un module infra-injectif ; on a équivalence entre :

a) M est bien complémenté;
b) Les facteurs directs de M sont stables par les endomorphismes de M à noyau essentiel ;
c) Tout endomorphisme φ de M tel qu'il existe un facteur direct K vérifiant la condition $\mathrm{Im}(\varphi) \subset K \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ essentiel dans M, est nul.

(a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) est vrai sans hypothèse sur M).

En particulier, un module infra-injectif dont tous les endomorphismes sont continus est bien (et même très bien) complémenté.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BICHOT — *Essentialité et importance dans les modules.* Thèse 3e cycle Lyon (1968).

[2] J.Y. CHAMARD-BOIS — *Compléments et modules riches en co-irréductibles.* Thèse 3e cycle (1967).

[3] L. LESIEUR et R. CROISOT — *Cœur d'un module*. Journal de Math. pures et appl. tome XLII fasc. 4 (1963) 367-407.

[4] G. RENAULT — *Etude des sous-modules compléments dans un module.* Thèse (1966).

[5] Y. UTUMI — *On continuous rings and self injective rings* Trans. Am. Math. Soc. vol. 118 (1965) 158-173.

Manuscrit remis le 12 septembre 1971.

J. BICHOT
E.S.I. Beyrouth' B.P. 1314 - LIBAN
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 nov. 1918
69 - VILLEURBANNE