

JEAN BRACONNIER

Une remarque sur les groupes de Galois topologiques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1970,
tome 7, fascicule 2
, p. 137-142

[<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1970__7_2_A4_0>](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1970__7_2_A4_0)

© Université de Lyon, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR LES GROUPES DE GALOIS TOPOLOGIQUES

Jean BRACONNIER

On peut étendre [3] le théorème d'Artin relatif aux groupes finis d'automorphismes d'un corps [1] aux groupes compacts d'automorphismes, à l'aide de la théorie de Krull des extensions galoisiennes [2]. On trouvera ci-dessous une démonstration directe de ce résultat, qui permet de retrouver et généraliser cette théorie de Krull.

1. Groupes de Galois topologiques.

(1.1) Soient L et M des corps (commutatifs) ; on désigne par $\text{Mor}(L, M)$ l'ensemble des morphismes de L dans M et on munit cet ensemble de la *topologie de convergence simple* (L et M étant discrets). $\text{Mor}(L, M)$ est ainsi un sous-espace fermé de M^L (muni de ladite topologie) ; on note $\text{Aut}(L)$ le groupe des automorphismes de L ; muni de la topologie induite par celle de $\text{Mor}(L, L)$,

$\text{Aut}(L)$ est un *groupe topologique* : dans ce groupe, un *système fondamental de voisinages de id_L* est formé par les *sous-groupes stabilisateurs des parties finies de L* . En général, $\text{Aut}(L)$ n'est pas fermé dans $\text{Mor}(L, L)$.

Soient K un corps et L et M des extensions de K ; on note $\text{Mor}_K(L, M)$ l'ensemble des K -morphisms de L dans M : $\text{Mor}_K(L, M)$ est fermé dans $\text{Mor}(L, M)$. On note $\text{Gal}(L/K)$ le groupe des K -auto-morphisms de L ; c'est évidemment un sous-groupe fermé de $\text{Aut}(L)$. Lorsque F décrit l'ensemble des parties finies de L , $\text{Gal}(L/K(F))$ décrit un système fondamental de voisinages de id_L dans $\text{Gal}(L/K)$.

(1.2) Soit L un corps. Soit G un sous-groupe de $\text{Aut}(L)$: on note $\text{Inv}_L(G)$ le corps des invariants de G dans L . Il est clair que $\text{Inv}_L(G) = \text{Inv}_L(\overline{G})$; par suite, on a $\overline{G} \subset \text{Gal}(L/\text{Inv}_L(G))$.

(1.3) Proposition. - Soit $K \rightarrow L$ une extension algébrique sur K .
Pour toute extension $K \rightarrow M$ de K , l'espace $\text{Mor}_K(L, M)$ est compact.

Soit $x \in L$; $\text{Mor}_K(L, M).x$ est alors une partie finie de M .
Par suite, $\text{Mor}_K(L, M) \subset \prod_{x \in L} \text{Mor}_K(L, M).x \subset M^L$ est relativement compact, donc compact.

(1.4) Corollaire. - Soit $K \rightarrow L$ une extension algébrique sur K .
Alors $\text{Gal}(L/K)$ est un groupe compact.

En effet, on a alors $\text{Gal}(L/K) = \text{Mor}_K(L, L)$.

Remarques.

1) Soit $K \rightarrow L$ une extension algébrique sur K ; posons $G = \text{Gal}(L/K)$; G est un groupe *profini*. Soit F une partie finie de L ; l'ensemble $G.F$ est fini et $\text{Gal}(L/K(G.F)) = \bigcap_{\sigma \in G} \sigma . \text{Gal}(L/K(F)) . \sigma^{-1}$ est un sous-groupe *distingué* et ouvert de G . Lorsque F varie, $\text{Gal}(L/K(G.F))$ décrit évidemment un système fondamental de voisinages de id_L dans G .

2) Soit $K \rightarrow L$ une extension de K telle que $\text{dimal}_K(L)$ soit fini ; alors $\text{Gal}(L/K)$ est localement compact (il possède en effet un sous-groupe ouvert compact d'après (1.3)).

2. Le théorème d'Artin.

(2.1) Théorème. - Soient L un corps, G un sous-groupe compact de $\text{Aut}(L)$ et $K = \text{Inv}_L(G)$. Alors L est une extension algébrique et galoisienne sur K et $G = \text{Gal}(L/K)$.

a) Si G est fini, le théorème se réduit au théorème classique d'Artin.

b) Soit $x \in L$: $G.x$ est fini ; par suite $G \cap \text{Gal}(L/K(G.x))$ est un sous-groupe ouvert de G . On a $\sigma(K(G.x)) = K(G.x)$ pour tout $\sigma \in G$; ainsi $\sigma \mapsto \sigma|_{K(G.x)}$ est un homomorphisme $\varphi : G \rightarrow \text{Gal}(K(G.x)/K)$. Le noyau de φ est $G \cap \text{Gal}(L/K(G.x))$;

donc $\varphi(G)$ est fini. D'après a), $K(G.x)$ est une extension de degré fini et galoisienne sur $\text{Inv}_{K(G.x)}(\varphi(G)) = K$. Comme $x \in K(G.x)$, ceci montre que L est algébrique et galoisien sur K .

c) Soit $G' = \text{Gal}(L/K)$. D'après b) et (1.4) G' est compact. Soit F une partie finie de L ; $G'.F$ est fini ; soit L_F le sous-corps de L engendré par $G'.F$. $\text{Gal}(L/L_F)$ est un sous-groupe ouvert de $\text{Aut}(L)$ et $G' \cap \text{Gal}(L/L_F) = \text{Gal}(L/K(G'.F))$ est un sous-groupe ouvert de G' . On a $\sigma'(L_F) = L_F$ pour tout $\sigma' \in G'$; ainsi $\sigma' \mapsto \sigma'|_{L_F}$ est un homomorphisme $\psi : G' \rightarrow \text{Gal}(L_F/(L_F \cap K))$. Le noyau de ψ est $\text{Gal}(L/K(G'.F))$; donc $\psi(G')$ est fini. D'après a), L_F est une extension de degré fini et galoisienne sur $\text{Inv}_{L_F}(\psi(G)) = L_F \cap K$ et $\psi(G) = \text{Gal}(L_F/(L_F \cap K))$. Par suite, on a $G' = G \text{Gal}(L/K(G'.F)) \subset G \text{Gal}(L/L_F)$.

d) Quand F décrit l'ensemble des parties finies de L , il est clair que $\text{Gal}(L/L_F)$ décrit un système fondamental de voisinages de id_L dans $\text{Aut}(L)$. On a donc $G' \subset \bigcap_F G \text{Gal}(L/L_F) = \bar{G} = G$. Donc $G = G'$.

(2.2) **Corollaire.** - Soit G un sous-groupe relativement compact de $\text{Aut}(L)$. Alors $\bar{G} = \text{Gal}(L/\text{Inv}_L(G))$.

Cela résulte de (2.1), si l'on remarque que $\text{Inv}_L(G) = \text{Inv}_L(\bar{G})$.

(2.3) **Corollaire.** - Soit $K \rightarrow L$ une extension d'un corps K , telle que $K = \text{Inv}_L(\text{Gal}(L/K))$. Pour que L soit algébrique (et galoisien) sur K , il faut et il suffit que $\text{Gal}(L/K)$ soit compact.

C'est nécessaire d'après (1.4). C'est suffisant d'après (2.1).

(2.4) **Corollaire.** - Soit $K \rightarrow L$ une extension d'un corps K .

Alors $\lambda : G \mapsto \text{Inv}_L(G)$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes compacts de $\text{Gal}(L/K)$ sur l'ensemble des sous-extensions L' de L telles que L soit algébrique et galoisien sur L' , dont la réciproque est $\delta : L' \mapsto \text{Gal}(L/L')$.

Si L' est une sous-extension de L telle que L soit algébrique et galoisien sur L' , $\text{Gal}(L/L')$ est compact et, par définition, $\text{Inv}_L(\text{Gal}(L/L')) = L'$; donc δ est une section de λ .

(2.1) montre que δ est une rétraction de λ .

Dans le cas où L est une extension algébrique et galoisienne sur K , le corollaire ci-dessus est le théorème de Krull, si l'on remarque que tout sous-groupe fermé de $\text{Gal}(L/K)$ est compact et que L est galoisien sur chaque sous-extension de L .

-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- (1) - E. ARTIN, *Galois theory*, University of Notre-Dame (1959).
 - (2) - N. BOURBAKI, *Eléments de mathématique, Algèbre, ch. 5*, Paris (Hermann), (1959).
 - (3) - I. I. PIATECKY-SHAPIRO et I. R. CHAFAREVITCH, *Izv. Akad. Nauk. SSSR., sér.math.* 30, (1966), p. 671-704 [= A.M.S. translations, sér. 2, vol. 69 p. 111-145].
- (cf. plus précisément le lemme 1 du § 3 : la démonstration en est d'ailleurs incomplète ; la traduction anglaise est entachée de nombreuses fautes d'impression).

Manuscrit remis en avril 1971

J. BRACONNIER
Professeur
Département de Mathématiques
Université Claude-Bernard
43, boulevard du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE