

ANDRÉ ROUX

Objet étalé et faisceau

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 3
, p. 42-56

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_3_42_0

© Université de Lyon, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OBJET ÉTALE ET FAISCEAU

par André ROUX

1. Rappel.

\mathcal{O} étant une petite catégorie, soit $\mathcal{O}^\circ(E)$ la catégorie des foncteurs de \mathcal{O}° dans $E(\ast)$. $\mathcal{O}^\circ(E)$ est une catégorie complète et factorielle.

Soient $\text{hom} : \mathcal{O}^\circ \times \mathcal{O} \rightarrow E$ le bifoncteur canonique de \mathcal{O} ; $h : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^\circ(E)$ le foncteur défini par $h(U) = \text{hom}(?, U)$;

$(h^\circ, \perp_{\mathcal{O}^\circ(E)}) : \mathcal{O}^\circ \times \mathcal{O}^\circ(E) \rightarrow \mathcal{O}^\circ(E)^\circ \times \mathcal{O}^\circ(E)$ le bifoncteur produit ;

$c : \mathcal{O}^\circ \times \mathcal{O}^\circ(E) \rightarrow E$ le foncteur coévaluation de \mathcal{O} défini par $c(U, \phi) = \phi(U)$;

$e_U : \mathcal{O}^\circ(E) \rightarrow \mathcal{O}^\circ \times \mathcal{O}^\circ(E)$ le foncteur défini par $e_U(\phi) = (U, \phi)$;

$\text{Hom} : \mathcal{O}^\circ(E)^\circ \times \mathcal{O}^\circ(E) \rightarrow E$ le bifoncteur canonique de $\mathcal{O}^\circ(E)$.

1.1 Théorème : Les bifoncteurs c et $\text{Hom} \cdot (h^\circ, \perp_{\mathcal{O}^\circ(E)})$ de $\mathcal{O}^\circ \times \mathcal{O}^\circ(E)$ dans E sont canoniquement isomorphes.

1.2 Proposition . Pour tout objet U de \mathcal{O} :

a) le foncteur $c_U = c \cdot e_U : \mathcal{O}^\circ(E) \rightarrow E$ préserve les limites (droite et gauche) ;

b) pour qu'un morphisme $\phi \xrightarrow{\alpha} \psi$ de $\mathcal{O}^\circ(E)$ soit un mono resp. épi-morphisme, il faut et il suffit qu'il en soit de même de $\alpha(U)$ dans E .

(*) désigne la catégorie $\mathbb{E}ns$ ou la catégorie $\mathbb{A}b$; dans ce dernier cas \mathcal{O} sera une catégorie préadditive, et les foncteurs seront réputés additifs.

c) $h(U)$ est un objet projectif de $\mathcal{O}^0(E)$, i.e.

$\text{Hom}(h(U) ?)$ préserve les sommes fibrées finies.

1.3 Proposition : L'ensemble $(h(U))_{U \in \text{Ob}(\mathcal{O})}$ est un ensemble de générateur de $\mathcal{O}^0(E)$.

Un petit foncteur $\phi : I \rightarrow \mathcal{O}$ est appelé un \varinjlim -représentant de l'objet ϕ de $\mathcal{O}^0(E)$ si ϕ est limite à droite du petit foncteur $h.\phi : I \rightarrow \mathcal{O}^0(E)$.

1.4 Proposition : Soient ϕ et ψ des objets de $\mathcal{O}^0(E)$, $\phi : I \rightarrow \mathcal{O}$ resp. $\psi : J \rightarrow \mathcal{O}$ -

un \varinjlim -représentant de ϕ - resp de ψ - dans \mathcal{E} , les objets $\text{Hom}(\phi, \psi)$,

$\varinjlim_I \psi(\phi(i))$ et $\varinjlim_I \varinjlim_J \text{hom}(\phi(i), \psi(j))$ sont canoniquement isomorphes.

Pour un objet ϕ de $\mathcal{O}^0(E)$, soit \mathcal{O}_ϕ la petite catégorie des objets de \mathcal{O} pointés par ϕ , et soit $\phi : \mathcal{O}_\phi \rightarrow \mathcal{O}$ le petit foncteur canonique de \mathcal{O}_ϕ dans \mathcal{O} .

1.5 Théorème : Pour tout objet ϕ de $\mathcal{O}^0(E)$, $\phi : \mathcal{O}_\phi \rightarrow \mathcal{O}$ est un \varinjlim -représentant de ϕ .

1.6 Corollaire : Le foncteur h préserve les limites à gauche.

$\sigma : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{T}$ étant un foncteur, le foncteur H^σ , préservant les limites à gauche, de \mathcal{T} dans $\mathcal{O}^0(E)$, défini par $H^\sigma(E) = \text{hom}_{\mathcal{T}}(\sigma(?); E)$, est appelé le foncteur σ -section.

Si \mathcal{T} est complète à droite, pour tout objet ϕ de $\mathcal{O}^0(E)$, l'objet $q(\phi) = \varinjlim_{\mathcal{O}_\phi} \sigma.\phi$ est appelé l'objet de \mathcal{T} étalé par σ , défini par le foncteur ϕ , et le foncteur $q : \phi \rightarrow q(\phi)$ est appelé le foncteur étalement par σ dans \mathcal{T} .

1.7 Théorème : \mathcal{T} étant complète à droite, pour tout foncteur $\sigma : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{T}$, le couple de foncteurs (q, H^σ) est une adjonction entre $\mathcal{O}^0(E)$ et \mathcal{T} .

En particulier q préserve les limites à droite, et il existe des morphismes fonctoriels canoniques $\epsilon : \sim = q.H^\sigma \rightarrow 1_{\mathcal{T}}$ et

$$\exists : 1_{\mathcal{O}^0(E)} \rightarrow H^\sigma.q = \sim (*).$$

1.8 Proposition : $\mathcal{O}^0(E)_d(\mathcal{T})$ étant la sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}^0(E)(\mathcal{T})$ des

(*) lire $\exists = \text{nolispe}$ et $\sim = \text{adlit}$.

foncteurs de $\mathcal{O}^0(E)$ dans T préservant les limites à droite, les foncteurs $\sigma \rightarrow \underline{\sigma}$ de $\mathcal{O}(T)$ dans $\mathcal{O}^0(E)_{\mathcal{d}}(T)$ et $\mu \rightarrow \mu.h$ de $\mathcal{O}^0(E)_{\mathcal{d}}(T)$ dans $\mathcal{O}(T)$ sont réciproques l'un de l'autre.

Remarque : tous les résultats précédents sont maintenant classiques ; on en trouvera les démonstrations dans [1].

2. Extension au cas général : la catégorie $\mathcal{d}(\mathcal{O})$.

Une classe \mathcal{C} satisfaisant à tous les axiomes d'une catégorie sauf (peut-être) à celui exprimant que pour tout couple (X, Y) d'objets de \mathcal{C} , les morphismes de X dans Y forment un ensemble, est appelée une hypercatégorie (ou grosse catégorie). En se plaçant dans une classe suffisamment grande on a de même les notions d'hyperfoncteur, d'hypercatégories complètes, exacte, abélienne,...

\mathcal{O} étant une catégorie, soit $\mathcal{O}^0(E)$ l'hypercatégorie complète et factorielle des foncteurs de \mathcal{O}^0 dans E , les définitions et propriétés données en 1, s'adaptant alors de façon évidente.

Pour tout petit foncteur $a : I \rightarrow \mathcal{O}$, le petit foncteur $h.a : I \rightarrow \mathcal{O}^0(E)$ admet une limite à droite $\underline{a} = \lim_{\rightarrow I} h.a$ (i.e. pour tout objet U de \mathcal{O} , $a(U) = \lim_{\rightarrow I} \text{hom}_{\mathcal{O}}(U, a(i))$).

2.1 Définition : On appelle foncteur contravariant \lim_{\rightarrow} -représentable sur \mathcal{O} , un objet ϕ de $\mathcal{O}^0(E)$ isomorphe à un objet \underline{a} de $\mathcal{O}^0(E)$ où $a : I \rightarrow \mathcal{O}$ est un petit foncteur ; a est un \lim_{\rightarrow} -représentant du foncteur ϕ .

2.2 Lemme : Soient $a : I \rightarrow \mathcal{O}$, et $\mathcal{B} : J \rightarrow \mathcal{O}^0(E)$ des petits foncteurs ; l'ensemble $\lim_{\rightarrow I} \lim_{\rightarrow J} \mathcal{B}(j)(a(i))$ est en bijection canonique avec $\text{Hom}(\underline{a}, \lim_{\rightarrow J} \mathcal{B})$ (qui est donc un ensemble).

2.3 Définition : On appelle catégorie droite $\mathcal{d}(\mathcal{O})$ de \mathcal{O} , la sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}^0(E)$ dont les objets sont les foncteurs contravariants \lim_{\rightarrow} -représentables.

$a : I \rightarrow \mathcal{O}$ et $b : J \rightarrow \mathcal{O}$ étant des petits foncteurs, on a

$$\text{hom}_{d(O)}(a, b) = \lim_{\leftarrow I} \lim_{\rightarrow J} \text{hom}(a(i), b(j))$$

(vu l'aspect de cette formule, on voit tout l'intérêt qu'il y a à considérer la composition des morphismes de $d(O)$ comme composition de morphismes fonctoriels). Le foncteur h est alors considéré à valeurs dans $d(O)$; il est pleinement fidèle et préserve les limites à gauche.

2.4 Théorème : $d(O)$ est une sous-catégorie complète à droite de l'hypercatégorie $O^o(E)$.

2.5 Corollaire : Pour tout objet U de O , $h(U)$ est un objet projectif de $d(O)$ (qui possède donc assez de projectifs). Les $h(U)$, où U parcourt les objets de O , forment une classe de générateurs.

2.6 Lemme : Soit $\sigma : O \rightarrow T$ un foncteur de O dans une catégorie T complète à droite. Si $a : I \rightarrow O$ et $b : J \rightarrow O$ sont des \lim_{\rightarrow} -représentants d'un objet ϕ de $d(O)$, les objets de T , $\lim_{\rightarrow I} \sigma.a$ et $\lim_{\rightarrow J} \sigma.b$ sont isomorphes.

2.7 Proposition : Avec les notations du lemme précédent, $\phi \rightarrow \lim_{\rightarrow I} \sigma.a$ est un foncteur covariant q préservant les limites à droite, de $d(O)$ dans T .

2.8 Théorème : $d(O)_d(T)$ étant la sous-catégorie pleine de $d(O)(T)$ des foncteurs préservant les limites à droite, de $d(O)$ dans une catégorie T complète à droite, les foncteurs $\sigma \rightarrow q$ de $O(T)$ dans $d(O)_d(T)$ et $\mu \rightarrow \mu.h$ de $d(O)_d(T)$ dans $O(T)$ sont réciproques l'un de l'autre.

Les conditions classiques pour l'existence d'un adjoint à droite à q paraissant imposer à $d(O)$ des conditions peu naturelles et très restrictives, on se limite ici à un cas particulier assez fréquent dans les applications.

Une triangulation sur la catégorie T est la donnée d'un triplet (I, q, j) , où I est un foncteur de $\text{Mor}(T)$ dans T , q un morphisme du foncteur source σ dans I , et j un morphisme de I dans la foncteur but β , tels que $j.q$ soit le morphisme canonique de σ dans β , et pour tout $\alpha \in \text{Mor}(T)$, q_α est un épimorphisme et j_α est un monomorphisme.

2.9 Théorème : On suppose que :

1. T possède une triangulation (I, q, j) ;
2. \mathcal{O} est une sous-catégorie de T , telle que la restriction de I à la sous-catégorie de $\text{Mor}(T)$ dont les objets ont leur source dans \mathcal{O} soit à valeur dans \mathcal{O} (en particulier \mathcal{O} est alors saturée par les isomorphismes de T) ;
3. Pour tout objet E de T , la sous-catégorie $S\mathcal{O}(E)$ des sous-objets de E appartenant à \mathcal{O} , et correspondant aux monomorphismes du type de la triangulation est une petite sous-catégorie (en particulier ceci a lieu lorsque T est localement petite).

Alors pour tout objet E de T , soit $H^{\circ}(E)$ le foncteur de \mathcal{O}° dans E défini par $U \mapsto \varinjlim_{S\mathcal{O}(E)} \text{hom}_T(U, V)$; le foncteur $H^{\circ} : E \mapsto H^{\circ}(E)$, de T dans $d(\mathcal{O})$ est adjoint à droite au foncteur \mathcal{O} .

2.10. Remarques :

1. Sous les hypothèses du théorème, l'adjonction définissant un morphisme $\epsilon : \nu = \mathcal{Q}.H^{\circ} \rightarrow 1_T$, pour que sur un objet E de T , ϵ_E soit un isomorphisme de \tilde{E} sur E , il faut et il suffit que E soit limite à droite du foncteur inclusion de $S\mathcal{O}(E)$ dans E . En particulier E est alors limite monique d'un petit foncteur à valeurs dans \mathcal{O} . De plus si \mathcal{O} est une sous-catégorie de T stable par sommes directes finies, pour tous $x : U \rightarrow E$, $y : V \rightarrow E$, de $S\mathcal{O}(E)$, $I(x \ast y)$ est un objet de $S\mathcal{O}(E)$ majorant U et V , et par suite $S\mathcal{O}(E)$ est en fait un système inductif au sens le plus ordinaire dans \mathcal{O} .

2. Les hypothèses du théorème peuvent être modifiées de la façon suivante :

1) T est colocalement petite (car T étant complète à droite, il existe une triangulation sur T).

2) \mathcal{O} est une sous-catégorie de T saturée par les épimorphismes de T ;

3) \mathcal{T} est localement petite.

3. Toutes les démonstrations de ces théorèmes sont élémentaires, mise à part celle, assez technique, du théorème 2.4.

3. Objets étalés et faisceaux.

3.1 Définition;: Une sous-catégorie \mathcal{O} d'une catégorie \mathcal{T} , complète à droite, est pré-ouverte (dans \mathcal{T}) si elle satisfait à la condition suivante :

Pour tout petit foncteur $a : I \rightarrow \mathcal{O}$ de limite à droite dans \mathcal{T} , $a(i) \xrightarrow{a_i} E = \varinjlim_I a$, et pour tout morphisme $\alpha : V \rightarrow E$ de source un objet de \mathcal{O} et de but E , il existe :

a) un petit foncteur $b : I \rightarrow \mathcal{O}$ tel que dans \mathcal{O} , V soit un objet placé sous

$$b(b(i) \xrightarrow{b_i} V)_{i \in I} ;$$

b) un morphisme $\vec{0}^I = (\alpha_i)_{i \in I} : b \rightarrow a$, tel que dans \mathcal{T} , $b(i) \xrightarrow{b_i} V = \varinjlim_I b$,

$$\text{et pour tout } i \text{ de } I, \alpha \cdot b_i = a_i \cdot \alpha_i.$$

Il revient au même de dire que $\alpha : \varinjlim_I a_i$.

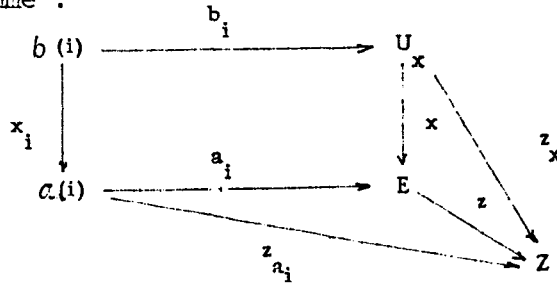
On notera qu'une sous-catégorie pré-ouverte est une sous-catégorie pleine.

Dans la suite, \mathcal{O} est une petite sous-catégorie préouverte d'une catégorie \mathcal{T} complète à droite.

3.2 Théorème : Pour que le morphisme $\epsilon : \mathcal{V} \rightarrow 1_{\mathcal{T}}$, pris pour un objet E de \mathcal{T} , soit un isomorphisme de \tilde{E} sur E , il faut et il suffit que E soit limite dans \mathcal{T} d'un petit foncteur à valeurs dans \mathcal{O} .

Soit $\phi : (U, x) \rightarrow U_x$ le foncteur canonique de $\mathcal{O}_{H^0(E)}$ dans \mathcal{O} , de limite à droite (dans \mathcal{T}) $U_x \xrightarrow{x} E = \varinjlim_{\mathcal{O}_{H^0(E)}} \phi$; si $\epsilon_E : \tilde{E} \rightarrow E$ est un isomorphisme, E est limite à droite dans \mathcal{T} de ϕ . Réciproquement, soit $a : I \rightarrow \mathcal{O}$ un petit foncteur de limite à droite dans \mathcal{T} , $a(i) \xrightarrow{a_i} E = \varinjlim_I a$, il suffit de démontrer que $E = \varinjlim_{\mathcal{O}_{H^0(E)}} \phi$. Soit $U_x \xrightarrow{z_x} Z$ un objet de \mathcal{T} placé sous ϕ ; Z est canoniquement placé sous a par $a(i) \xrightarrow{z_{a_i}} Z$, donc il existe un unique morphisme $z : E \rightarrow Z$

tel que, pour tout i de I , $z_{a_i} = z \cdot a_i$; il reste donc à montrer que pour tout U_x on a $z_x = z \cdot \bar{x}$; or il existe un petit foncteur $b : I \rightarrow \mathcal{O}$, tel que dans \mathcal{O} U_x soit placé sous $b(b(i) \xrightarrow{b_i} U_x)$ et un morphisme $\vec{\sigma}^I = (x_i) : b \rightarrow a$ rendant commutatif le diagramme :

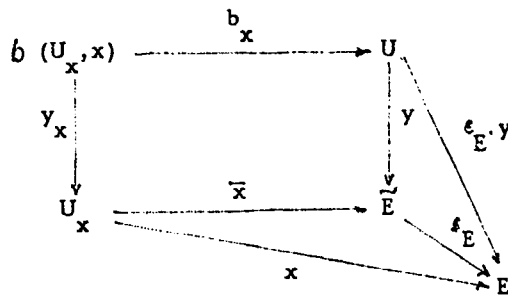


Par suite $z_x \cdot b_i = z_{\bar{x}} \cdot b_i = z_{a_i} \cdot z_i = z_{a_i} \cdot x_i = z \cdot a_i \cdot x_i = z \cdot \bar{x} \cdot b_i$, d'où en passant à la limite suivant I , $z_x = z \cdot \bar{x}$.

Remarque : dans le cas général de 1., on ne sait rien sur ϵ , si ce n'est que $H^0(\epsilon)$ admet ϵ_{H^0} comme section (comme dans toute adjonction) ; il est facile de voir que dans la cas où E est limite d'un petit foncteur à valeurs dans \mathcal{O} , $\epsilon_E : \tilde{E} \rightarrow E$ est sectionnable.

3.3 Proposition : $H^0(\epsilon)$ est un isomorphisme de $H^0 \cdot \sim$ sur H^0 (et par suite l'isomorphisme réciproque est 3_{H^0}).

E étant un objet de \mathcal{T} , pour tout $U_x = (U, x)$ on a $x = \epsilon_E \cdot \bar{x}$; il suffit de montrer que pour tout $U \xrightarrow{y} \tilde{E}$ on a $y = \overline{\epsilon_E \cdot y}$; or il existe un petit foncteur $b : \mathcal{O}_{H^0}(E) \rightarrow \mathcal{O}$ tel que U soit placé sous $b(b(U_x, x) \xrightarrow{b_x} U)$ et un morphisme $\vec{\sigma}^{\mathcal{O}_{H^0}(E)} = (y_x) : b \rightarrow \phi$ rendant commutatif le diagramme



Par suite $\varepsilon_E \cdot y \cdot b_x = \varepsilon_E \cdot \bar{x} \cdot y_x = x \cdot y_x$, d'où $\overline{\varepsilon_E \cdot y \cdot b_x} = \overline{\varepsilon_E \cdot y} \cdot b_x = \overline{\bar{x} \cdot y_x} = \bar{x} \cdot y_x = y \cdot b_x$,
 et en passant à la limite suivant I , $\overline{\varepsilon_E \cdot y} = y$.

3.4 Définition : On appelle sous-catégorie des objets de T étalés au-dessus de O , à

la sous-catégorie pleine $i_0 : T_0 \rightarrow T$ de T dont les objets sont les limites dans T des petits foncteurs à valeur dans O .

T_0 est la sous-catégorie pleine de T dont les objets sont les images par q des objets de $O^o(E)$. O est une sous-catégorie de T_0 et le foncteur q , donc a fortiori le foncteur ν , est considéré comme à valeur dans T_0 .

3.5. Théorème. a) Le couple de foncteurs (i_0, ν) est une adjonction entre T_0 et

T (ou encore ν est un réflecteur) ;

b) la catégorie T_0 est la sous-catégorie complète à droite engendrée par O .

Soient F un objet de T_0 et E un objet de T , $\text{hom}_T(i_0(F), E) =$

$$\begin{aligned} \varprojlim_{O_{H^o(F)}} \text{hom}_T(U, E) &= \varprojlim_{O_{H^o(F)}} \text{Hom}(h(U), H^o(E)) = \varprojlim_{O_{H^o(F)}} \text{Hom}(h(U), H^o(\tilde{E})) \\ &= \varprojlim_{O_{H^o(F)}} \text{hom}_T(U, \tilde{E}) = \text{hom}_{T_0}(F, \tilde{E}), \end{aligned}$$

ce qui démontre a), et b) s'en déduit canoniquement.

Remarques : 1. Soit O' une sous-catégorie de O , telle que O' soit pré-ouverte dans T et \tilde{O} soit une sous-catégorie de T_0 , alors $T_0 = T_{O'}$.

2. Si O est la somme directe d'une famille de sous-catégories $(O_i)_{i \in I}$ de T , la limite dans T d'un petit foncteur à valeurs dans O est somme directe de limites de petits foncteurs (éventuellement vides) à valeurs dans chaque O_i ; de façon imagée on peut dire qu'un objet étalé au-dessus de O est somme directe d'objets étalés au-dessus de chaque O_i .

3.6. Définition : Un objet U de O est limite normale d'un petit foncteur

$a : I \rightarrow O$, si U est limite à droite dans T (ou T_0).

3.7. Théorème . Pour que le morphisme $\mathfrak{z} : \mathcal{L}^0(E) \rightarrow \mathcal{V}$ induise sur un objet Φ de $\mathcal{O}^0(E)$ un isomorphisme de Φ sur $\hat{\Phi}$, il faut et il suffit que Φ préserve les limites à gauche normales de \mathcal{O}^0 (i.e. renverse les limites à droite normales de \mathcal{O} en limites à gauche de E).

Soit Φ un objet de $\mathcal{O}^0(E)$; $\hat{\Phi}$ étant la restriction à \mathcal{O}^0 du foncteur $\text{hom}_T(\mathcal{V}, \mathcal{Q}(\Phi))$, $\hat{\Phi}$ préserve les limites à gauche normales de \mathcal{O}^0 , et par suite si \mathfrak{z}_Φ est un isomorphisme de Φ sur $\hat{\Phi}$, il en est de même de Φ . Réciproquement, Φ étant un objet de $\mathcal{O}^0(E)$ préservant les limites à gauche normales de \mathcal{O}^0 , soit :

$\Phi : (U, X) \rightarrow U_x$ le foncteur de \mathcal{O}_Φ dans \mathcal{O} , de limite dans T , $U_x \xrightarrow{x} \mathcal{Q}(\Phi)$, $U \xrightarrow{y} \mathcal{Q}(\Phi)$ étant un morphisme de T dont la source est un objet de \mathcal{O} , il existe un petit foncteur $b : \mathcal{O}_\Phi \rightarrow \mathcal{O}$ tel que dans \mathcal{O} , U soit placé sous $b(b(U, x) \xrightarrow{b_x} U)$ et un morphisme $\bar{y} : \bar{\mathcal{O}}^\Phi = (y_x) : b \rightarrow \Phi$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \rightarrow & b(U, x) & \xrightarrow{b_x} & U \\ & \downarrow y_x & & \downarrow y \\ \rightarrow & U_x & \xrightarrow{x} & \mathcal{Q}(\Phi) \end{array}$$

on a $U = \varinjlim_{\mathcal{O}_\Phi} b$, d'où $\bar{y} = \varinjlim_{\mathcal{O}_\Phi} \Phi(y_x)(x) \in \Phi(U)$; soit $y \rightarrow \bar{y}$, le morphisme de $\hat{\Phi}$ dans Φ ainsi défini, on a $\bar{y} \cdot b_x = \bar{x} \cdot y_x$ pour tout U_x , d'où par passage à la limite suivant \mathcal{O} , $\bar{y} = y$.

D'autre part, si $y = \bar{x}'$, où $x' \in \Phi(U)$, on a $x' = \varinjlim_{\mathcal{O}_\Phi} \Phi(b_x)(x') = \bar{y} = \bar{x}'$. Par suite \mathfrak{z}_Φ est un isomorphisme de Φ sur $\hat{\Phi}$.

Remarque : dans le cas général de 1., on ne sait rien sur \mathfrak{z} ; si ce n'est que $\mathcal{Q}(\mathfrak{z})$ admet $\varepsilon_{\mathcal{Q}}$ comme rétraction (comme dans toute adjonction); il est facile de voir que dans le cas où Φ préserve les limites à gauche normales de \mathcal{O}^0 , $\mathfrak{z}_\Phi : \Phi \rightarrow \hat{\Phi}$ est rétractable.

3.8. Proposition : $\mathcal{Q}(\mathfrak{z})$ est un isomorphisme de \mathcal{Q} sur $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{V}$ (et par suite l'isomorphisme réciproque est $\varepsilon_{\mathcal{Q}}$).

En effet, $q(\phi)$ étant un objet de T_0 , $\varepsilon_{q(\phi)}$ est un isomorphisme de $\widetilde{q(\phi)} = q(\check{\phi})$ sur $q(\phi)$.

3.9. Définition. On appelle sous-catégorie des faisceaux sur la sous-catégorie

pré-ouverte O de T , la sous-catégorie pleine $j_0 : F_0 \rightarrow O^0(E)$ de $O^0(E)$ dont les objets sont les foncteurs de O^0 dans E préservant les limites à gauche normales de O^0 .

F_0 est la sous-catégorie pleine de $O^0(E)$ dont les objets sont les images par H^0 des objets de T . O étant une sous-catégorie pleine de T , le foncteur h est à valeur dans F_0 et le foncteur H^0 , donc a fortiori μ , est considéré comme à valeurs dans F_0 .

3.10. Théorème. a) Le couple de foncteurs (μ, j_0) est une adjonction entre

$O^0(E)$ et F_0 (ou encore, μ est un coréfecteur ;) ;

b) La catégorie F_0 est la sous-catégorie complète à gauche de $O^0(E)$ engendrée par $h(O)$; de plus $O^0(E)$ étant complète, il en est de même de F_0 .

Soient Ψ un objet de $O^0(E)$ et ϕ un objet de F_0 ; $\text{Hom}(\Psi, j_0(\phi)) = \text{Hom}(\Psi, \check{\phi}) = \text{hom}_T(q(\Psi), q(\phi)) = \text{hom}_T(q(\check{\Psi}), q(\phi)) = \text{hom}_{F_0}(\check{\Psi}, \phi)$ ce qui démontre a), et b) s'en déduit canoniquement.

3.11. Théorème. $(q, j_0, H^0, i_0, \beta, \varepsilon)$ est une équivalence entre les catégories F_0 et T_0 .

Soient ϕ et ψ deux objets de F_0 , q sur $\text{Hom}(\phi, \psi)$ se décompose en les bijections canoniques : $\text{Hom}(\phi, \psi) \rightarrow \text{Hom}(\phi, H^0.q(\psi)) \rightarrow \text{hom}_T(q(\phi), q(\psi))$, par suite q est pleinement fidèle sur F_0 .

3.12. Remarques : 1) Les bonnes propriétés sous-catégoriques de F_0 dans $O^0(E)$ et T_0 dans T ne sont pas conservées par cette équivalence, mais dualisées.

2) F_0 étant une catégorie complète, il en est de même de T_0 , même si T n'est pas complète à gauche (T_0 n'est évidemment pas une sous-catégorie complète de T lorsque T est complète).

4. Extension au cas général et exemples.

Les conditions dans lesquelles on se place sont celles du théorème 2.9. On suppose de plus que 0 est une sous-catégorie pré-ouverte de la catégorie complète à droite T .

Un petit foncteur à valeurs dans 0 est monique si les morphismes images sont des monomorphismes de T . On démontre alors par des procédés analogues à ceux du paragraphe 3, les théorèmes suivants :

- 4.1 Théorème . a) Pour que le morphisme $\varepsilon : \nu \rightarrow 1_T$ pris pour un objet E de T soit un isomorphisme de \tilde{E} sur E , il faut et il suffit que E soit limite dans T d'un petit foncteur monique à valeurs dans 0 .
- b) $H^0(\varepsilon)$ est un isomorphisme de $H^0.\nu$ sur H^0 (dont l'isomorphisme réciproque est 3_{H^0}).
- c) T_0 étant la sous-catégorie pleine et complète à droite engendrée par 0 , (i_0, ν) est une adjonction entre T_0 et T .
- 4.2 Théorème. a) Pour que le morphisme $3 : 1_{d(0)} \rightarrow \nu$ induise sur un objet ϕ de $d(0)$ un isomorphisme de ϕ sur $\tilde{\phi}$, il faut et il suffit que ϕ préserve les limites à gauche normales de 0^0 .
- b) $q(3)$ est un isomorphisme de q sur $q.\nu$ (dont l'isomorphisme réciproque est ε_q).
- c) F_0 étant la sous-catégorie pleine de $d(0)$ dont les objets sont les images par H^0 des objets de T , (ν, j_0) est une adjonction entre $d(0)$ et F_0 , qui est une catégorie complète à droite mais non pas une sous-catégorie complète à droite de $d(0)$.

4.3. Théorème : $(\mathcal{G}, j_0, H^0, i_0, 3, \varepsilon)$ est une équivalence entre les catégories F_0 et T_0 .

4.4. Remarque : Il est évident que dans le cas où O est une petite sous-catégorie de T (ou tout au moins dont le squelette est une petite catégorie) vérifiant les hypothèses du théorème 2.9. , on peut conjuguer les deux procédés décrits ci-dessus ; en particulier T_0 est complète et tout objet de T_0 est limite à droite (monique) de la catégorie de ses sous-objets appartenant à O (si de plus O est stable par sommes directes finies dans T , cette catégorie est simplement un système inductif monique).

4.5 Exemples et co-exemples.

1) X espace topologique, T catégorie des espaces fibrés sur X , O sous-catégorie des ouverts de X , T_0 sous-catégorie des espaces étalés sur X , $O^0(E)$ catégorie des préfaisceaux, F_0 sous-catégorie des faisceaux ; le langage utilisé ici est tiré de cet exemple.

2) $T = Ab$, O sous-catégorie des groupes abéliens finis, T_0 sous-catégorie des groupes abéliens de torsion ; si on prend O' la sous-catégorie de O dont les objets sont les $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^n$ ($p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$), on a $T_0 = T_{O'}$; soit O''_p ($p \in \mathbb{P}$) la sous-catégorie de O' dont les objets sont les $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^n$ ($n \in \mathbb{N}$), on a $O' = \coprod_{p \in \mathbb{P}} O''_p$ donc en utilisant la remarque fait en 3.5. on obtient la décomposition classique d'un groupe de torsion en ses composantes p -primaires.

3) Par dualité, $T =$ catégorie des groupes topologiques, O sous-catégorie des groupes finis discrets, T_0 sous-catégorie des groupes compacts totalement discontinus, F_0 catégorie des pro-groupes finis.

5. Sous-catégorie ouverte.

Soit T une catégorie complète à droite et à produits fibrés finis.

5.1 Définition : Une sous-catégorie $\mathcal{O} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{T}$ est ouverte dans \mathcal{T} si elle vérifie

les conditions suivantes :

a) Pour tout petit foncteur $a : I \rightarrow \mathcal{O}$, de limite à droite

$a(i) \xrightarrow{a_i} \varinjlim_I a$ dans \mathcal{T} , et pour tout morphisme de \mathcal{T} , $\alpha : F \rightarrow \varinjlim_I a$,

si l'on construit les produits fibrés

$$\begin{array}{ccc} \alpha^+(a(i)) & \xrightarrow{a_i(\alpha)} & F \\ \downarrow \alpha^+(a_i) & & \downarrow \alpha \\ a(i) & \xrightarrow{a_i} & \varinjlim_I a \end{array}$$

alors $F = \varinjlim_I \alpha^+(a)$ et par suite $\alpha = \varinjlim_I \alpha^+(a_i)$.

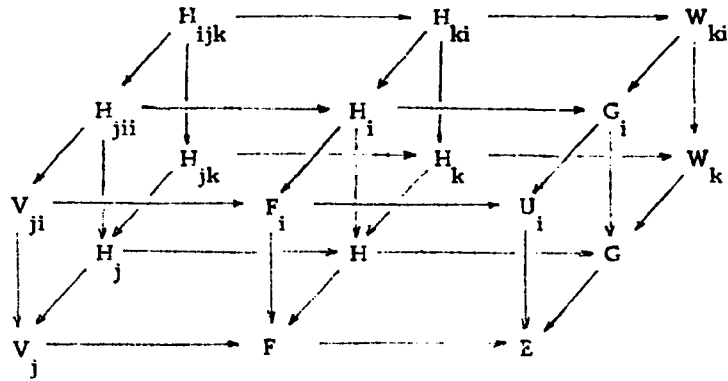
b) Si de plus F est un objet de \mathcal{O} , $\alpha^+(a)$ est à valeurs dans \mathcal{O} , ainsi que les morphismes $\alpha^+(a_i)$ et $a_i^+(\alpha)$, pour tout i de I .

D'après b), si \mathcal{O} est une sous-catégorie ouverte de \mathcal{T} , \mathcal{O} est pré-ouverte et à produits fibrés finis (dans \mathcal{T}).

5.2 Théorème. Si \mathcal{O} est une petite sous-catégorie ouverte de \mathcal{T} , la catégorie

$\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ des objets de \mathcal{T} étalés au-dessus de \mathcal{O} est une sous-catégorie à produits fibrés finis de \mathcal{T} .

Soient $a : I \rightarrow \mathcal{O}$, $b : J \rightarrow \mathcal{O}$, $c : K \rightarrow \mathcal{O}$ des petits foncteurs à valeurs dans \mathcal{O} , de limites à droite dans \mathcal{T} : $(a(i) = U_i \rightarrow E)$ ($b(j) = V_j \rightarrow F$) et $(c(k) = W_k \rightarrow G)$, et soit $f : F \rightarrow E$ et $g : G \rightarrow E$. Dans le diagramme de carrés cartésiens ci-dessous, pour tout $(i, j, k) \in I \times J \times K$, les objets U_i , V_j , W_k , V_{ji} , W_{ki} , H_{ijk} sont des objets de \mathcal{O} , et $(i, j, k) \mapsto H_{ijk}$ est un foncteur de $I \times J \times K$ dans \mathcal{O} . De même on a des foncteurs évidents que l'on n'explique pas ; en particulier, $\varinjlim_{I \times J \times K} H_{ijk} = \varinjlim_J \varinjlim_I \varinjlim_K H_{ijk} = \varinjlim_J \varinjlim_I H_{ji} = \varinjlim_I H_i = H$, c.q. f. d.



Remarque : Le théorème ci-dessus se transcrit également dans le cas où \mathcal{O} est une sous-catégorie ouverte d'une catégorie T vérifiant les hypothèses du théorème 2.9.

5.3 Décomposition stricte et triangulation stable sur T_0 .

Soit \mathcal{O} une sous-catégorie ouverte de T telle que \mathcal{O} soit petite ou vérifie les hypothèses de 2.9. T_0 étant alors une sous-catégorie à sommes et produits fibrés finis de T , est stable pour les décompositions strictes à gauche et à droite de T .

Si de plus T est colocalement petite, T admet une triangulation par monomorphisme fort, pour laquelle (à ma connaissance tout au moins) T_0 n'est pas stable ; mais d'autre part, T admet une triangulation par épimorphisme fort, que l'on peut définir comme limite à droite de décompositions strictes à droites ; T_0 étant stable pour ces dernières et par limites à droite, est également stable pour la triangulation par épimorphisme fort. (cf. [2] et [3]).

Remarques : 1) On notera que la catégorie des groupes finis n'est pas une sous-catégorie ouverte de la catégorie Gr des groupes ; cependant, l'unicité de la triangulation de Gr entraîne sa stabilité sur la sous-catégorie complète à gauche des groupes profinis.

2) Le cas des espaces étalés au-dessus d'un espace topologique relève directement de 5.3.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] . P. GABRIEL et M. ZISMAN : Séminaire homotopique, Strasbourg
1963-64.
- [2] . R. PUPIER : Sur les catégories complètes, Pub.
Dép. Math. Lyon (1965) t.2 fasc. 2 p.1-65
- [3] . A. ROUX : Foncteurs d'équivalence dans une
catégorie, Pub. Dép. Math. Lyon (1964)
(t.1 , exp. 16).

Manuscrit remis le 10 juillet 1966

A. ROUX
Maître assistant
Département de Mathématiques
15 quai Claude Bernard
LYON