

ANNE PRELLER

Une catégorie duale de la catégorie des anneaux idempotents

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 1
, p. 26-30

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_1_26_0>

© Université de Lyon, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE CATEGORIE DUALE DE LA CATEGORIE DES ANNEAUX IDEMPOTENTS^(*)

Anne PRELLER

Nous désignons par $\mathcal{A}B$ la catégorie des anneaux booléens et des homomorphismes booléens, par $\mathcal{J}$ la catégorie des anneaux idempotents et des homomorphismes d'anneaux. Nous dirons b -algèbre (resp. i -algèbre) pour un objet de $\mathcal{A}B$ (resp. de $\mathcal{J}$) et de même b -morphisme et i -morphisme

Rappelons que la catégorie $\mathcal{E}B$ formée des espaces booléens et des applications continues est équivalente à la catégorie duale de $\mathcal{A}B$ et que cette équivalence est établie par le foncteur contravariant $\ast : \mathcal{A}B \rightarrow \mathcal{E}B$ qui associe à une b -algèbre B son espace dual $B^\ast$ et à un b -morphisme $f : B_1 \rightarrow B_2$ sa transposée $f^\ast : B_2^\ast \rightarrow B_1^\ast$. Le théorème de Stone est fondamental pour montrer que ce foncteur $\ast$ est bien une équivalence.

Halmos remarque dans "Boolean Algebras" après la démonstration du théorème de Stone que la plus grande partie de la théorie reste valable si l'on remplace compact par localement compact.

Voilà comme nous préciserons cette remarque :

1) Le théorème de Stone reste valable pour les i -algèbres.

Soit A une i -algèbre $A^0 \subset 2^A$ l'ensemble des i -morphisms de A dans 2

(2 désigne l'ensemble $\{0,1\}$ que nous considérerons soit comme b-algèbre, soit comme i-algèbre, soit même comme b-espace muni de la topologie discrète). A^0 est un b-espace, car il est fermé dans 2^A et $A^{\times} = A^0 - \{0\}$ est un espace localement compact de dimension 0. Appelons donc i-espace tout espace X localement compact de dimension 0.

Notons $X^{\times}$ l'i-algèbre formée des compacts ouverts de X. Le théorème de Stone s'énonce maintenant comme suit :

- a) Soit A une i-algèbre. L'application $\tau : A \rightarrow A^{\times \times}$ qui au point $a \in A$ associe la partie $\tau(a) = \{h, h \in A^{\times} \mid h(a) = 1\}$ de $A^{\times}$ est un isomorphisme de A sur $A^{\times \times}$.
- b) Soit X un i-espace. L'application τ qui au point $x \in X$ associe l'i-morphisme $\tau(x)$ de $X^{\times}$ dans 2 défini par $\tau(x)(a) = 1 \Leftrightarrow x \in a$ est un homéomorphisme.

La catégorie des i-espaces et des applications continues n'est pourtant pas un modèle de la catégorie duale de J.

- 2) La catégorie des objets de EB au-dessous de 1 (b-espace dual de la b-algèbre 2) est équivalente à la catégorie duale de J.

Nous le démontrerons en trois lemmes :

Lemme 1 : Le foncteur injection $S : \mathcal{A}B \rightarrow \mathcal{J}$ possède un adjoint à gauche T qui est fidèle.

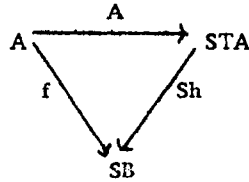
En effet, soit A une i-algèbre, A est une algèbre sur le corps 2. Désignons par TA l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à A. C'est-à-dire $TA = A \times 2$ avec l'addition : $(a, \epsilon) + (b, \eta) = (a+b, \epsilon+\eta)$

$$\text{la multiplication : } (a, \epsilon)(b, \eta) = (ab + \epsilon b + \eta a, \epsilon \eta)$$

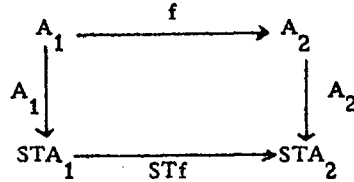
Il est clair que TA est un anneau idempotent avec unité, que l'application

$\phi_A : A \rightarrow STA$ définie par $\phi_A(a) = (a, 0)$ est un i-morphisme injectif, et que

$\phi_A(A)$ un idéal maximal de TA . De plus, pour toute b -algèbre B et tout i -morphisme $f : A \rightarrow SB$ il existe un unique b -morphisme $h : TA \rightarrow B$ tel que $Sh \circ \phi_A = f$. En diagramme :



Ceci nous garantit bien un foncteur adjoint à gauche $T : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{AB}$ où Tf pour $f : A_1 \rightarrow A_2$ est défini par l'égalité $STf \circ \phi_{A_1} = \phi_{A_2} \circ f$ ou en diagramme



Comme les i -morphisms ϕ_A sont des monomorphismes T est bien fidèle.

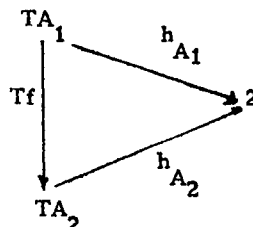
En particulier nous pouvons dire avec des abus de langage évidents : l'application $\phi : A^\circ \rightarrow (TA)^\times$ qui à $h \in A^\circ$ fait correspondre son unique prolongement $\phi(h) \in TA^\times$ est une bijection.

Lemme 2 : $\mathcal{J}$ est équivalente à $\mathcal{AB}_2$, la catégorie des objets de $\mathcal{AB}$ au-dessus de 2.

En effet, soit A une i -algèbre et h_A l'unique b -morphisme de TA dans 2 dont le noyau est égal à $\phi_A(A)$.

Nous poserons donc $FA = h_A$.

Soit $f : A_1 \rightarrow A_2$ un i -morphisme $Tf : TA_1 \rightarrow TA_2$ est un b -morphisme qui rend le diagramme suivant commutatif.



Nous poserons donc $Ff = Tf$.

Pour montrer que le foncteur (covariant) F est une équivalence nous utiliserons le lemme de Gabriel :

1) tout objet $h : B \rightarrow 2$ de $\mathcal{AB}_2$ est isomorphe à un objet FA , en

l'occurrence à $F \ker h$ ($\ker h$ désigne ici $h^{-1}(\{0\})$).

2) la restriction de F à $\text{Hom}_{\mathcal{J}}(A_1, A_2)$ est une bijection sur

$\text{Hom}_{\mathcal{AB}_2}(FA_1, FA_2)$.

L'injectivité est une conséquence immédiate de la fidélité de T .

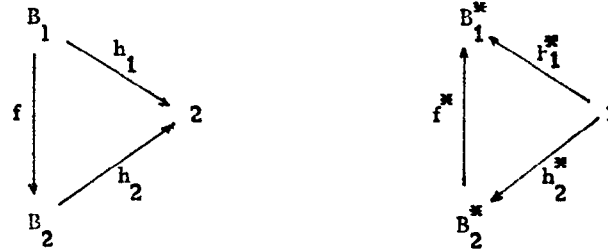
Si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{AB}_2}(FA_1, FA_2)$ nous avons $h_{A_2} \circ f = h_{A_1}$, donc $\phi_{A_1}(A_1) = \ker(h_{A_2} \circ f)$

ce qui entraîne $f(\phi_{A_1}(A_1)) \subset \phi_{A_2}(A_2)$. Il est clair ensuite que

$$f = F(\phi_{A_2}^{-1} \circ f \circ \phi_{A_1}).$$

Lemme 3 : La catégorie duale de $\mathcal{AB}_2$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{EB}^1$.

En effet, comme le foncteur $\ast : \mathcal{AB} \rightarrow \mathcal{EB}$ transforme le diagramme



il est bien clair que par extension le foncteur $\ast$ définit une équivalence de $\mathcal{AB}_2$ dans $\mathcal{EB}^1$.

3) Interprétation :

Un objet $\alpha : 1 \rightarrow X$ de $\mathcal{EB}^1$ est entièrement déterminé par son but X et le point ω de X , image par α de l'unique point de 1 . De même un morphisme $f \in \text{hom}_{\mathcal{EB}^1}(\alpha_1, \alpha_2)$ est une application continue $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ (Y_i but de α_i) telle que $f \circ \alpha_1 = \alpha_2$, c'est-à-dire $f(\omega_1) = \omega_2$. Il est facile de voir que l'on définit ainsi un isomorphisme de $\mathcal{EB}^1$ dans la catégorie $\mathcal{JE}$ des espaces

Catégorie des anneaux idempotents.

booléens pointés, catégorie dont les objets (X, ω) sont des espaces booléiens X dans lequel on a distingué un point ω et dont les morphismes sont les applications continues entre ces espaces qui conservent le point distingué. Avec cette nouvelle interprétation, l'équivalence entre $\mathbb{J}$ et $\mathbb{J} \mathbb{E}$ associe à l'i-algèbre A l'espace $(TA^{\#}, h_A)$ et à l'i-morphisme $f : A_1 \rightarrow A_2$ l'application pointée $Tr^{\#} : TA_2^{\#} \rightarrow TA_1^{\#}$ telle que $Tr^{\#}(h_{A_2}) = h_{A_1}$. Remarquons encore que la bijection $\phi : A^{\circ} \rightarrow TA^{\#}$ qui à $h \in A^{\circ}$ associe son "prolongement" $\phi(h)$ à TA est un homéomorphisme et que $\phi(c) = h_A$. Si pour l'i-morphisme $f : A_1 \rightarrow A_2$ nous posons $f^{\circ} : A_2^{\circ} \rightarrow A_1^{\circ}$, $f^{\circ}(h) = h \circ f$, nous aurons $f^{\circ} = \phi^{-1} \circ Tr^{\#} \circ \phi$ et finalement le foncteur $\circ : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{J} \mathbb{E}$ qui à l'i-algèbre A associe le b-espace pointé $(A^{\circ}, 0)$ et à l'i-morphisme $f : A_1 \rightarrow A_2$ la transposée $f^{\circ} : A_2^{\circ} \rightarrow A_1^{\circ}$ est une équivalence.

Anne PRELLER
 Assistante associée
 Département de Mathématiques
 15, quai Claude Bernard LYON