

HENRI LEBESGUE

Exposition d'un mémoire de M. W. Crofton

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 12
(1912), p. 481-502

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__481_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[C2]

EXPOSITION D'UN MEMOIRE DE M. W. CROFTON ⁽¹⁾;

PAR M. HENRI LEBESGUE

Je desire attirer l'attention des lecteurs des *Nouvelles Annales* sur des énoncés élégants qui sont à peu près ignorés en France, bien qu'ils soient susceptibles de suggérer un grand nombre d'exercices intéressants.

1. Soit

$$(1) \quad x \sin \theta - y \cos \theta - p = 0 \quad (0 \leq \theta < \pi)$$

l'équation d'une droite D en coordonnées rectangulaires.

(1) *Philosophical Transactions*, 1868, *Comptes rendus*, t. LXV, et LXVIII

J-A Serret a vérifié les deux principaux énoncés de Crofton (*Comptes rendus*, t. LXVIII, *Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 1869).

On trouvera un exposé des raisonnements de Crofton dans un Ouvrage de E Czuber dont une traduction belge, intitulée *Probabilités et moyennes géométriques*, a été publiée chez Hermann. Crofton obtient ses résultats en utilisant les théorèmes généraux sur les probabilités pour le calcul de certaines probabilités géométriques, cela le conduit en somme tout simplement à évaluer des intégrales multiples par des changements de variables. Ici, je suis exactement les raisonnements de Crofton, en supprimant seulement les allusions aux probabilités, ce qui ne diminue en rien leur caractère suggestif, on pourrait s'écarter moins encore des raisonnements de Crofton en remarquant que certaines de ses démonstrations sont en somme des considérations de géométrie infinitésimale susceptibles de remplacer les calculs de déterminants fonctionnels que j'effectue directement.

L'intégrale

$$(2) \quad I = \iint dp d\theta,$$

étendue à toutes les droites D remplissant une certaine condition, par exemple coupant une courbe C donnée, a un sens très clair : si l'on considère p, θ comme deux coordonnées ordinaires d'un point d , c'est l'intégrale étendue au domaine Δ du plan (p, θ) dont tous les points d correspondent à des droites D coupant C .

Si l'on dit qu'on compte dans I chaque droite D autant de fois qu'elle a de points de rencontre avec C , cela veut dire qu'on décompose Δ en régions R_1, R_2, \dots , les points d de R_k correspondant aux droites D coupant C en k points, et qu'on prend pour I la somme $\sum k I_k$, I_k étant l'intégrale étendue à R_k . Ceci étant, nous démontrerons, avec Cauchy ⁽¹⁾, le théorème suivant :

La longueur L d'une courbe C est la moitié de $\iint dp d\theta$ dans laquelle on compte chaque droite D du plan autant de fois qu'elle a de points communs avec C ⁽²⁾.

Soit M , de coordonnées x, y , l'un des points de rencontre de D et de C ; soit s l'abscisse curviligne de M sur C et soit α l'angle de Ox et de la tangente à C au

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, t. XIII.

⁽²⁾ Pour éviter des difficultés inutiles à considérer ici, j'introduis les restrictions suivantes : C a une longueur finie et est formée d'un nombre fini d'arcs le long de chacun desquels C a une tangente variant d'une façon continue; le nombre maximum des points communs à C et à une droite D est fini.

L'intégration en dp étant effectuée, I s'écrit $\int_0^\pi P d\theta$, où P est la longueur totale de la projection orthogonale de C sur une droite de direction θ . C'est sous cette forme que Cauchy énonce son résultat. On pourra transformer de même les énoncés suivants.

point M. Les paramètres p, θ de la droite D vérifient l'équation (1) qui, différenciée, donne

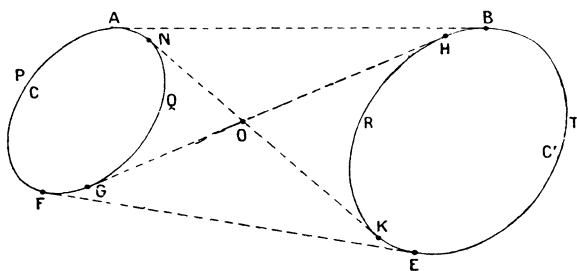
$$\sin(\theta - \alpha) ds = dp;$$

donc on a

$$\begin{aligned} I &= \iint dp d\theta = \iint |\sin(\theta - \alpha)| ds d\theta \\ &= \int_0^L \left[\int_{\alpha}^{\pi + \alpha} \sin(\theta - \alpha) d\theta \right] ds = 2L. \end{aligned}$$

Si l'on étendait l'intégrale I à toutes les droites coupant C, mais chaque droite n'intervenant qu'une fois dans I, la valeur de cette intégrale serait évidemment la longueur de la plus petite courbe convexe fermée Γ , telle que tout point de C soit point de Γ ou soit point intérieur à Γ . Après avoir donné cette forme d'énoncé, Crofton en déduit de jolies conséquences : Soient C et C', deux contours convexes fermés, extérieurs l'un à

Fig. 1.



l'autre; menons les quatre tangentes communes à C et C' et désignons par I, I', $\alpha, \beta, \gamma, J_1, J_2$ les valeurs de l'intégrale $\iint dp d\theta$ étendue successivement aux droites coupant respectivement les contours convexes C, C', ABTEFP, ANOGFP, BHOKET, aux droites coupant à la fois C et C', aux droites passant entre C et C'. Dans ces intégrales, ne faisons compter qu'une fois

chaque droite considérée; alors on a évidemment

$$\alpha = I + I' - J_1 + J_2,$$

$$\beta + \gamma = I + I' + J_2.$$

Mais I et I' sont les longueurs L et L' de C et C' , α est la longueur Y du contour ABTEFP, c'est-à-dire « la longueur d'un fil tendu entourant extérieurement C et C' », $\beta + \gamma$ est la longueur X du « fil tendu croisé entourant C et C' » et l'on a

$$(3) \quad J_1 = X - Y \quad (1),$$

$$(4) \quad J_2 = X - L - L'.$$

Pour définir les droites qui donnent J_2 , il suffit de connaître les arcs NQG, HRK; la valeur que nous trouvons pour J_2 ne dépend évidemment que de ces arcs. En faisant grandir ces arcs on pourra supposer, par exemple, qu'ils deviennent les deux branches d'une hyperbole et NOK, GOH deviendront les asymptotes de cette hyperbole. Alors l'intégrale J_2 nous fait connaître « la différence entre la longueur d'une hyperbole et la longueur de ses asymptotes ». Expression dont le lecteur précisera facilement le sens.

2. Nous allons évaluer maintenant des produits d'intégrale. Un tel produit sera une intégrale quadruple

$$J = \int \int \int \int dp \, dp' \, d\theta \, d\theta'.$$

Les deux droites D, D' , qui déterminent les valeurs des variables dans cette intégrale, se coupent en un point M dont les coordonnées vérifient l'équation (1)

(1) On prouvera facilement que, si les deux contours C et C' se coupent, on a

$$J_1 = L + L' - Y.$$

et l'équation analogue relative à p' et θ' . En différenciant ces relations on a dp et dp' , donc le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(p, p')}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \sin \theta' & -\cos \theta' \end{vmatrix} = \sin(\theta' - \theta),$$

et, par suite ;

$$\begin{aligned} J &= \int \int \int \int d\rho \, dp' \, d\theta \, d\theta' \\ &= \int \int \int \int |\sin(\theta' - \theta)| \, d\theta \, d\theta' \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Supposons que D et D' soient assujetties comme précédemment à rencontrer des courbes C , C' , composées chacune d'un nombre fini d'arcs convexes ⁽¹⁾, ou à rencontrer à la fois deux telles courbes ou à passer entre elles ; alors on connaît la valeur de J . Or, dans ces cas, θ et θ' sont assujettis à varier entre des limites fonctions de x, y qui correspondent aux diverses tangentes issues du point x, y aux courbes C et C' . Donc on peut effectuer les intégrations en θ et θ' et l'on exprime ainsi J sous forme d'une intégrale double en $dx \, dy$.

Considérons une courbe fermée convexe. Soient (C) l'ensemble des droites qui la rencontrent, (Γ) l'ensemble complémentaire. Nous allons considérer, avec Crofton, le cas où D et D' font partie de (C) et (Γ) .

Supposons que le point $M(x, y)$ soit extérieur à C' et que de ce point on voit C sous un angle α ; calculons le coefficient de $dx \, dy$ dans l'intégrale double.

⁽¹⁾ Lorsque cette condition n'est pas remplie, l'interprétation géométrique de $\int \int |\sin(\theta' - \theta)| \, d\theta \, d\theta'$ ne paraît guère possible si l'on ne veut utiliser que les éléments géométriques usuels.

Si D et D' font partie de (C), on a

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \int \int |\sin(\theta - \theta')| d\theta d\theta' \\
 &= \int_0^\alpha d\theta \left[\int_0^\theta \sin(\theta - \theta') d\theta' + \int_\theta^\alpha \sin(\theta' - \theta) d\theta' \right] \\
 &= 2(\alpha - \sin \alpha);
 \end{aligned}$$

pour D appartenant à (C) et D' à (Γ), on a

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \int \int |\sin(\theta - \theta')| d\theta d\theta' \\
 &= \int_0^\alpha d\theta \left[\int_\alpha^\pi \sin(\theta' - \theta) d\theta' \right] = 2 \sin \alpha;
 \end{aligned}$$

pour D et D' faisant partie de (Γ), on a

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \int \int |\sin(\theta - \theta')| d\theta d\theta' \\
 &= \int_\alpha^\pi d\theta \left[\int_\alpha^\theta \sin(\theta - \theta') d\theta' + \int_\theta^\pi \sin(\theta' - \theta) d\theta' \right] \\
 &= 2(\pi - \alpha - \sin \alpha).
 \end{aligned}$$

Comme vérification remarquons que, pour $\alpha = 0$, ce dernier résultat se réduit à 2π , ce qui est bien la somme, pour α quelconque, du premier, du troisième et du double du deuxième résultat, c'est-à-dire ce qu'on doit obtenir quand D et D' sont absolument quelconques. De là résulte aussi que, pour M intérieur à C, le coefficient de $dx dy$ est 2π quand D et D' font partie de (C) et est nul dans les deux autres cas considérés.

Pour ce premier cas où D et D' font partie de (C), l'intégrale quadruple J est égale à L^2 et la contribution du domaine intérieur à C dans l'intégrale en $dx dy$ est, on vient de le voir, 2π fois l'aire de ce domaine. Concluons avec Crofton, que :

Si l'on désigne par x, y les coordonnées d'un point extérieur à un contour convexe fermé C de lon-

gueur L et limitant une aire S , et si α est l'angle sous lequel on voit le contour C du point x, y , on a

$$\iint (\alpha - \sin \alpha) dx dy = \frac{1}{2} L^2 - \pi S,$$

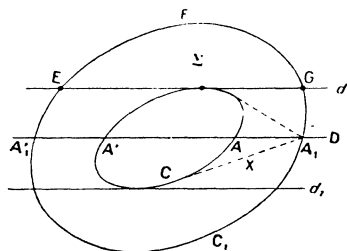
l'intégrale étant étendue à toute la partie du plan extérieure à C .

Pour le cas où D faisant partie de (C) et D' de (Γ) , on a

$$J = 2 \iint \sin \alpha dx dy;$$

mais, comme cette intégrale étendue à tout le plan est infinie, Crofton ne l'étend qu'à un anneau limité par C et par une courbe convexe enveloppante C_1 , ce qui revient à calculer $\iint dp d\theta \left[\iint dp' d\theta' \right]$ pour toute droite de (C) associée à toute droite de (Γ) qui la coupe dans l'anneau. Pour des valeurs données de p et θ , l'intégrale $\iint dp' d\theta'$ est étendue aux droites ne rencontrant pas C et rencontrant la droite $D(p, \theta)$ dans l'anneau limité par C et C_1 . Soient A, A' ; A_1, A'_1 les points de rencontre de D avec C et avec C_1 ; l'intégrale

Fig. 2.



en $dp' d\theta'$ est étendue aux droites passant entre C et la courbe infiniment petite réduite à A_1 et aux droites

analogues passant entre C et A'. Donc, formule (4), cette intégrale est égale à

$$X + X' - 2L,$$

en désignant par X la longueur du contour convexe formé par un arc de C et les deux tangentes à C issues de A; X' est la quantité analogue relative à A'. Donc on a

$$J = \int \int (X + X') dp d\theta - 2L^2 = 2 \int \int \sin x dx dy.$$

Le cas intéressant est celui où X est constant, alors on a

$$\int \int \sin x dx dy = L(X - L)$$

Dans tous les cas, comme X est fonction de l'abscisse curviligne s_1 de A₁ sur C₁, par un changement de variable analogue à celui du début du n° 1, on a

$$J = 2 \int \int \sin x dx dy = \int (\cos \lambda - \cos \mu) X ds_1 - 2L^2,$$

λ et μ étant les angles des tangentes à C issues de A₁ avec la tangente à C₁ en ce point; on suppose $\theta < \lambda < \mu < \pi$, $\mu - \lambda = \alpha$. Au changement de variables ici employé est lié la formule

$$2L = \int (\cos \lambda - \cos \mu) ds,$$

qui devient

$$L = \sin \frac{\alpha}{2} \int \sin \frac{\lambda + \mu}{2} ds_1, \quad L = \int \sin \frac{\alpha}{2} ds_1,$$

respectivement si, le long de C₁, α est constant ou si X est constant, auquel cas, d'après le raisonnement bien connu qui conduit aux théorèmes de Grave et de Chasles sur les arcs d'ellipse et d'hyperbole, on a $\lambda + \mu = \pi$. On pourra appliquer ces formules au cas

où, C étant une ellipse, C_1 est le cercle orthoptique de C ou est une ellipse homofocale à C .

Crofton considère aussi le cas où D faisant partie de (C) , D' n'est assujettie qu'à rencontrer C_1 ; alors $J = 2 \int \int x \, dx \, dy$, l'intégrale étant étendue à l'anneau [formules (5) et (6)].

Conservant les mêmes notations que ci-dessus, raisonnons d'une façon analogue. $\int \int dp' \, d\theta'$ sera maintenant étendue à toutes les droites rencontrant AA_1 ou $A'A'_1$; donc ce sera $2 (AA_1 + A'A'_1)$, par suite

$$\frac{J}{2} = \int \int x \, dx \, dy = \int_0^\pi d\theta \left[\int (AA_1 + A'A'_1) \, dp \right].$$

L'intégration en dp donne comme résultat l'aire de la partie de l'anneau limité par C et C_1 qui se trouve entre les tangentes d et d_1 qui sont parallèles à D . Appelons Θ l'aire de l'anneau, Σ l'aire du segment EFG extérieur à C et limité par d à l'intérieur de C_1 ; marquons un sens de parcours sur C et soit φ l'inclinaison de d ; φ sera égal à θ ou à $\theta + \pi$; Σ est une fonction de φ et l'on a

$$\int \int_{\text{anneau}} x \, dx \, dy = \pi \Theta - \int_0^{2\pi} \Sigma \, d\varphi.$$

formule particulièrement intéressante quand Σ est constant. On pourra en particulier l'appliquer à deux ellipses homothétiques et concentriques (1).

J'ai déjà dit qu'il n'y aurait aucune difficulté théorique nouvelle si l'on étendait l'intégrale J à des droites D, D' assujetties à occuper certaines situations vis-à-vis

(1) Une formule analogue peut être établie pour deux hyperboles homothétiques, concentriques et situées dans le même angle des asymptotes.

de courbes C, C' convexes ou non. Seulement il faudra se rappeler que l'intégrale $\int \int |\sin(\theta - \theta')| d\theta d\theta'$, qu'il faut calculer, pourra changer d'expression chaque fois que le point x, y traversera C, C' , une tangente singulière de C ou C' ou une tangente commune à ces courbes. Ces courbes et droites partagent le plan en régions et les énoncés ne peuvent être simples que si le nombre de ces régions est petit. Crofton examine entièrement le cas où D et D' rencontrent deux courbes convexes C et C' , C' entourant C , auquel cas il n'y a que trois régions. Il obtient aussi le résultat suivant pour le cas où D et D' sont assujettis à passer entre les branches d'une hyperbole ou d'une courbe analogue.

Soit α celui des angles des tangentes à une hyperbole, issues du point extérieur x, y , dans lequel ne se trouve aucun point de la courbe; on a

$$\int \int (\alpha - \sin \alpha) dx dy = \frac{1}{2} \Delta^2,$$

l'intégration étant étendue à toute la partie du plan extérieure à l'hyperbole et Δ étant la différence entre la longueur de l'hyperbole et la longueur de ses asymptotes.

Comme autre cas où il n'y a que deux régions, on peut encore signaler celui où D et D' devraient rencontrer une même épi ou hypocycloïde fermée n'ayant pas d'autres points singuliers que ses points de rebroussements. Le lecteur pourra faire le calcul pour une courbe ayant la forme d'une hypocycloïde à trois rebroussements.

3. Considérons maintenant le produit K de k intégrales I , relatives à des droites $D_i (p_i, \theta_i); \dots; D_k(p_k, \theta_k)$. Désignons par x_α, y_α les coordonnées du

point A_α de rencontre de D_α et de $D_{\alpha+1}$. A_α désignera aussi l'angle compris entre 0 et π de ces deux droites. a_α sera la distance de $A_{\alpha-1}$ et A_α . Les indices i et $k+1$ seront considérés comme identiques. On a

$$\begin{aligned} K &= \int \dots \int_{2k} dp_1 \dots dp_k d\theta_1 \dots d\theta_k \\ &= \int \dots \int_{2k} dx_1 dy_1 dp_3 \dots dp_k d\theta_1 \dots d\theta_k \sin A_1. \end{aligned}$$

De la dérivation des égalités

$$\begin{aligned} x_2 \sin \theta_2 - y_2 \cos \theta_2 &= x_1 \sin \theta_2 - y_1 \cos \theta_2, \\ x_2 \sin \theta_3 - y_2 \cos \theta_3 &= p_3, \end{aligned}$$

faite en supposant x_2, y_2, θ_2, p_3 , seuls variables, on tire

$$\left| \frac{D(\theta_2, p_3)}{D(x_2, y_2)} \right| = \left| \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{(x_1 - x_2) \cos \theta_2 + (y_1 - y_2) \sin \theta_2} \right| = \frac{\sin A_2}{a_2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} (8) \quad K &= \int \dots \int_{2k} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 dp_3 \dots dp_k \\ &\quad \times d\theta_1 d\theta_3 \dots d\theta_k \sin A_1 \frac{\sin A_2}{a_2} \\ &= \int \dots \int_{2k} dx_1 dy_1 \dots dx_{k-1} dy_{k-1} \\ &\quad \times d\theta_1 d\theta_k \sin A_1 \frac{\sin A_2}{a_2} \dots \frac{\sin A_{k-1}}{a_{k-1}}. \end{aligned}$$

En supposant $x_k, y_k, \theta_1, \theta_k$ seuls variables, dérivons les égalités

$$\begin{aligned} x_k \sin \theta_1 - y_k \cos \theta_1 &= x_1 \sin \theta_1 - y_1 \cos \theta_1, \\ x_k \sin \theta_k - y_k \cos \theta_k &= x_{k-1} \sin \theta_k - y_{k-1} \cos \theta_k; \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{D(\theta_1, \theta_k)}{D(x_k, y_k)} \right| &= \left| \frac{\sin(\theta_k - \theta_1)}{[(x_1 - x_k) \cos \theta_1 + (y_1 - y_k) \sin \theta_1] \right. \\ &\quad \left. \times [(x_{k-1} - x_k) \cos \theta_k + (y_{k-1} - y_k) \sin \theta_k]} \right| = \frac{\sin A_k}{a_1 a_k}. \end{aligned}$$

Donc :

$$(9) \quad K = \int \dots \int \dots \int \frac{\sin A_1 \dots \sin A_k}{a_1 \dots a_k} dx_1 dy_1 \dots dx_k dy_k.$$

D'où des énoncés tels que celui-ci : L'intégrale précédente, étendue à tous les groupes de k points A_1, \dots, A_k tels que chaque droite D_α coupe un contour convexe fermé C_α de longueur L_α , est égale au produit $L_1 L_2 \dots L_\alpha$ des longueurs de ces contours.

Un tel énoncé fait intervenir un domaine d'intégration fort compliqué et ne permet pas d'abaisser l'ordre de l'intégrale K dont on est parti. Ceci peut cependant se faire dans une certaine mesure; pour le cas de trois droites, par exemple, on a vu, formule (8), que

$$K = \iiint \iiint \int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 d\theta_1 d\theta_3 \frac{\sin A_1 \sin A_2}{a_2};$$

or les intégrations en $d\theta_1$ et $d\theta_3$ peuvent être effectuées de suite. Mais après le domaine d'intégration est encore formé de tous les couples de points tels que la droite qui les porte rencontre une courbe donnée.

Laissons donc de côté ce mode de généralisation, qui fournit cependant des exercices précieux pour les professeurs, et essayons maintenant de généraliser en remplaçant l'intégrale I primitive par une autre intégrale. Cela est possible d'une infinité de manières; choisissons les intégrales qu'étudie Crofton.

4. Prenons pour I l'intégrale double $\int \int dx dy$, d'où $J = \iiint \iiint dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$ et introduisons les coordonnées p, θ de la droite joignant les deux points $x_1, y_1; x_2, y_2$, ainsi que les distances ρ_1, ρ_2 de ces points au pied de la perpendiculaire abaissée de l'ori-

gine sur la droite. On a

$$\begin{aligned} x_1 &= -p \sin \theta + \rho_1 \cos \theta, & x_2 &= -p \sin \theta + \rho_2 \cos \theta, \\ y_1 &= p \cos \theta + \rho_1 \sin \theta, & y_2 &= p \cos \theta + \rho_2 \sin \theta, \end{aligned}$$

d'où, par un calcul facile et qu'on pourrait d'ailleurs supprimer en partie à l'aide de ce qui précède,

$$J = \iint \int \int |\rho_2 - \rho_1| dp d\theta d\rho_1 d\rho_2.$$

Or les intégrations en $d\rho_1 d\rho_2$ peuvent être effectuées; supposons que l'intégrale I soit étendue à l'intérieur d'un contour convexe C, alors ρ_1 et ρ_2 peuvent varier entre deux limites a, b ($a > b$), fonctions de p, θ et telles que $c = b - a$ soit la longueur de la corde découpée dans C par la droite p, θ . Et l'on a

$$\begin{aligned} & \int \int |\rho_2 - \rho_1| d\rho_1 d\rho_2 \\ &= \int_a^b d\rho_1 \left[\int_a^{\rho_1} (\rho_1 - \rho_2) d\rho_2 + \int_{\rho_1}^b (\rho_2 - \rho_1) d\rho_2 \right] = \frac{1}{3} c^3, \end{aligned}$$

d'où le résultat de Crofton :

C étant un contour convexe limitant une aire S, et c étant la longueur de la corde de C qui est portée par la droite

$$x \sin \theta - y \cos \theta - p = 0,$$

on a l'égalité

$$\int \int c^3 dp d\theta = 3 S^2;$$

l'intégrale étant étendue à toutes les sécantes de C.

Ce théorème est susceptible des mêmes modes de généralisation que celui précédemment étudié. On pourra supposer que les deux intégrales I, dont J est le produit, ne sont pas relatives au même domaine. Si, par exemple, la droite (p, θ) considérée a dans un domaine convexe C_1 d'aire S_1 un segment c_1 et si l est

la distance des milieux de c et c_1 , on a

$$\iint cc_1 l dp d\theta = SS_1,$$

quand les courbes C et C_1 sont entièrement extérieures l'une à l'autre.

On pourra aussi multiplier plus de deux intégrales I ; pour trois intégrales nous aurons trois points x_1, y_1 ; x_2, y_2 ; x_3, y_3 dont il sera naturel d'exprimer les coordonnées à l'aide du rayon R de la circonférence passant par ces trois points, des coordonnées ξ, η de son centre et des inclinaisons $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ des rayons des trois points. On verra que les intégrations en $d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3$ peuvent être effectuées et l'on exprimera ainsi le produit de trois aires par une intégrale triple étendue à une famille de cercles. Pour obtenir un énoncé simple, il faut, comme précédemment, que le nombre des régions soit petit. Un cas où l'on n'aurait qu'une région serait celui où les courbes limitant les domaines seraient extérieures les unes aux autres et telles que toute circonférence qui les coupe toutes trois ne coupant chacune d'elles qu'en deux points. Je laisse au lecteur le soin de formuler le résultat qui est relativement simple.

Crofton considère encore l'intégrale $I = \int d\varphi$, où φ représente l'inclinaison de la tangente dirigée à une courbe convexe C . Pour avoir toutes les tangentes on prendra φ de 0 à 2π et $I = 2\pi$. Pour calculer $J = I^2 = 4\pi^2$, introduisons les coordonnées x, y du point de rencontre des deux tangentes d'inclinaison φ et φ' . Si ξ et η sont les coordonnées du point de contact de la première on a :

$$(10) \quad x \sin \varphi - y \cos \varphi = \xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi.$$

En dérivant et en se rappelant que $d\xi$ et $d\eta$ sont

proportionnels à $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$, on a

$$(11) \quad dx \sin \varphi - dy \cos \varphi = [(\xi - x) \cos \varphi + (\eta - y) \sin \varphi] d\varphi$$

et une égalité analogue en φ' . Or la quantité entre crochets est la distance des points $\xi, \eta; x, y$, c'est-à-dire la longueur T de l'une des tangentes issues de x, y à C . T' étant l'autre tangente et α l'angle de ces deux tangentes, en remarquant que les deux combinaisons φ, φ' et φ', φ donnent le même point x, y , on a

$$J = 2 \int \int \frac{\sin \alpha}{TT'} dx dy.$$

Crofton considère aussi l'intégrale $\int ds$ étendue à la même courbe. Puisque l'on a

$$ds = R d\varphi,$$

R étant le rayon de courbure en ξ, η ; on aura aussi

$$\int \int ds ds' = 2 \int \int \sin \alpha \frac{RR'}{TT'} dx dy.$$

D'où ces deux résultats de Crofton :

x, y étant les coordonnées rectangulaires d'un point extérieur à une courbe convexe C de longueur L ; T, T' les longueurs des tangentes à C issues de x, y ; α leur angle; R et R' les rayons de courbure de C aux points de contact des tangentes considérées, on a

$$2\pi^2 = \int \int \sin \alpha \frac{dx dy}{TT'}, \quad L^2 = 2 \int \int \sin \alpha \frac{RR'}{TT'} dx dy;$$

les intégrales étant étendues à la partie du plan extérieure à C .

Au lieu de faire le produit de plusieurs intégrales I de même expression, on peut aussi multiplier des intégrales de formes différentes. La considération du produit

des deux précédentes intégrales I conduit à un résultat qui, avec les notations précédentes, est exprimé par l'égalité

$$2\pi L = \iint \sin \alpha \frac{R + R'}{TT'} dx dy.$$

Combinons aussi la première intégrale I avec les deux dernières et calculons par exemple $\iint \iint dp d\theta d\varphi$. x, y étant les coordonnées du point commun à la droite (p, θ) et à la tangente d'inclinaison φ , passons des variables p, θ, φ aux variables x, y, θ . La différentielle totale $d\varphi$ vient d'être calculée (11) et la différentiation de l'équation (1) donne dp , d'où

$$\left| \frac{D(p, \theta, \varphi)}{D(x, y, \theta)} \right| = \frac{|\sin(\theta - \varphi)|}{T}.$$

L'intégration en $d\theta$ peut être effectuée; elle donne $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$; donc, en étendant toujours les intégrales à la partie du plan extérieure à C, on a

$$\pi L = \iint \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) dx dy;$$

$$L^2 = 2 \iint \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{R}{T} + \frac{R'}{T'} \right) dx dy.$$

§. L'intégrale $\iint dp d\theta$ présente un intérêt qu'il faut signaler. On peut définir la mesure d'un ensemble quelconque de points en disant que c'est un nombre positif ou nul attaché à l'ensemble et tels que deux ensembles égaux, c'est-à-dire superposables, aient même mesure, et que l'ensemble formé par la réunion de plusieurs (1) autres, sans éléments communs deux à

(1) Si par « plusieurs » on entend un nombre fini, la définition s'applique aux ensembles mesurables au sens de M. Jordan; si « plusieurs » peut signifier une infinité dénombrable, la définition s'applique à tous les ensembles dits *mesurables*.

deux, ait pour mesure la somme des mesures des ensembles composants.

Cette définition suffit pour définir la mesure à un facteur près, dont l'existence correspond à la possibilité de choisir à volonté l'unité de mesure. On peut prendre la même définition pour la mesure d'un ensemble quelconque dont les éléments sont, non plus des points, mais d'autres êtres géométriques. Pour étudier le cas des ensembles de droite, faisons correspondre comme au début à chaque droite $D(p, \theta)$ de l'ensemble un point d de coordonnées ordinaires rectangulaires p, θ . Un déplacement dans le plan des D revient au changement de variables

$$(12) \quad \begin{cases} \theta_1 = \theta + a, \\ p_1 = p + b \cos \theta + c \sin \theta, \end{cases}$$

où a, b, c sont des constantes. Nous avons donc à déterminer la mesure des ensembles de points d en considérant comme superposables deux ensembles transformables l'un dans l'autre par une des transformations (12). Or ceci est très simple. Divisons le plan en quadrilatères curvilignes par les droites $x = nh$ et les courbes $y = nh + \cos x$, h étant un nombre positif fixes et n prenant toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles. Ces quadrilatères sont superposables au sens indiqué, ils ont donc même mesure. Ils ont, d'autre part, évidemment même aire.

Soient alors π et π_1 deux domaines simples, deux domaines polygonaux par exemple, du plan des d . Soit m (ou m_1) le nombre des quadrilatères qui sont contenus dans π (ou π_1) et soit M (ou M_1) le nombre des quadrilatères qui contiennent des points de π (ou π_1). On a

$$\frac{m}{M_1} \leq \frac{\text{aire } \pi}{\text{aire } \pi_1} \leq \frac{M}{m_1},$$

et l'on sait que, quand h tend vers zéro, les deux membres extrêmes ont la même limite. Mais on a aussi

$$\frac{m}{M_1} \leq \frac{\text{mesure } \pi}{\text{mesure } \pi_1} \leq \frac{M}{m_1},$$

donc

$$(13) \quad \frac{\text{mesure } \pi}{\text{aire } \pi} = \frac{\text{mesure } \pi_1}{\text{aire } \pi_1} = \lambda;$$

λ est arbitraire. On peut prendre $\lambda = 1$. Partant de là on peut construire une théorie de la mesure des ensembles de droites qu'on peut résumer en disant qu'un ensemble E de droite D est dit *mesurable* lorsque l'ensemble e des points d correspondants est mesurable ⁽¹⁾ et qu'ils ont même mesure $\int \int dp d\theta$ ⁽²⁾.

Ces conclusions supposent toutefois qu'on ait donné une valeur finie à la constante λ de l'équation (13) et il est obligé qu'il en soit ainsi si l'on désire qu'un ensemble E de droites, auquel correspond un ensemble e de points d couvrant une partie du plan, ait une mesure finie. Mais si e est une courbe ordinaire, un arc analytique par exemple, et si l'on ne s'occupe du problème de la mesure que pour les ensembles C formés de droites appartenant à E , on pourra donner à λ une valeur infinie. Il est facile de voir que le problème de la mesure est alors indéterminé; soit, en effet, R le rayon de courbure de la courbe A enveloppe des droites D , formant E , au point d'abscisse curviligne s de cette courbe; quelle que soit la fonction positive f , l'inté-

(1) Au sens ordinaire du mot, c'est-à-dire la superposition étant définie par la considération des déplacements ordinaires dans le plan des d .

(2) Le raisonnement précédent s'appuie uniquement sur le fait qu'une transformation quelconque du groupe (12) est biunivoque, continue, qu'elle conserve les aires et qu'elle dépend de trois paramètres.

grale

$$\int f\left(R, \frac{dR}{ds}, \frac{d^2R}{ds^2}, \dots\right) ds,$$

étendue à l'ensemble des points de contact des droites de \mathcal{C} , donne une solution du problème. Les deux intégrales $\int d\varphi$, $\int ds$, considérées par Crofton, sont des cas particuliers de celle-ci qui ne fournit cependant pas la solution la plus générale du problème (1).

L'insuffisance des conditions du problème de la mesure que nous rencontrons ici est analogue à l'insuffisance connue de ces mêmes conditions pour caractériser la longueur d'une courbe plane ou gauche ou l'aire d'une surface.

(1) Le problème est d'ailleurs fort imprécis. Si Λ est donnée et si l'on ne s'occupe de satisfaire aux conditions du problème de la mesure que pour des ensembles de tangentes à Λ , il se peut même que la seconde condition de ce problème perde tout sens, cela arrivera notamment si R ne reprend jamais deux fois la même valeur, auquel cas $\int \varphi(s) ds$ donnera une solution du problème, quelle que soit $\varphi(s)$ positive.

Si l'on veut résoudre le problème pour tous les ensembles de droites qui enveloppent des courbes formées d'un nombre fini d'arcs analytiques, le problème se précise beaucoup plus et il se pourrait que l'intégrale du texte en fournisse la solution la plus générale.

Quand on ne s'occupe que d'ensembles dont les éléments, dépendant des coordonnées p_1, p_2 , sont définis par des égalités analytiques de la forme $p = f_i(t_1, t_2, \dots, t_n)$, il est naturel d'attacher une importance particulière aux solutions du problème de la mesure de la forme

$$\iint \cdot \int F\left(p_1, \dots, \frac{dp_1}{dt_1}, \dots, \frac{d^2 p_n}{dt_1^2}, \dots\right) dt_1 \dots dt_n$$

La théorie des groupes donne des procédés permettant la recherche de ces intégrales. Dans un article du *Bulletin de la Société mathématique*, 1896, M. E. Cartan a étudié toutes celles de ces intégrales qui ne portent que sur des fonctions des paramètres, pour le cas des droites dans le plan et pour les cas des plans et des droites dans l'espace, en signalant leur importance au point de vue de la mesure.

6. Il est facile maintenant de faire comprendre comment des questions de probabilités ont pu conduire Crofton à l'étude des intégrales indiquées. Supposons qu'on jette au hasard une aiguille sur le sol et que la position de cette aiguille détermine la droite prise au hasard dans le plan. On pourra se demander quelle est la probabilité pour que cette droite satisfasse à certaines conditions. Cette probabilité a un sens statistique assez net; il s'agit de la définir et de la calculer mathématiquement. Comme dans tout autre essai de traduction mathématique d'un problème physique, il nous faut ici introduire des hypothèses. Celles que l'on adopte sont relatives à ce que l'on doit appeler des circonstances également probables, comme dans le cas des probabilités ordinaires. Nous supposerons que la façon de jeter l'aiguille au hasard est telle qu'il y a probabilité égale pour que la droite appartienne à un ensemble E ou à un ensemble E_1 , pourvu que E et E_1 se déduisent l'un de l'autre par un déplacement du plan (¹).

On est alors conduit à admettre que le rapport des probabilités pour que la droite fasse partie d'un ensemble e ou d'un ensemble e_1 est le rapport des mesures de e et de e_1 . D'où la définition et la détermination mathématique des probabilités.

Les considérations du paragraphe 1 sont utilisées par Crofton pour des problèmes de probabilités relatives à la droite. Les considérations du paragraphe 2

(¹) Il n'est raisonnable de supposer cette condition à peu près réalisée physiquement que si l'on ajoute que les droites composant E et E_1 doivent être à une distance inférieure à une longueur donnée d'un point donné. Toutes les positions que l'aiguille peut effectivement prendre forment un ensemble dont la probabilité doit être prise égale à un.

sont relatives à des problèmes où l'on étudie les angles dont, par exemple, les deux côtés rencontrent une même courbe convexe. La mesure des ensembles d'angles présente cette particularité nouvelle que, tous les éléments des ensembles n'étant plus nécessairement superposables, il est bien certain *a priori* que les conditions du problème de la mesure seront insuffisantes pour la définition d'une mesure unique (1).

Par exemple, $f(\theta - \theta')$ étant une fonction positive $\iiint \iiint f(\theta - \theta') dp dp' d\theta d\theta'$, étendue aux paramètres p, p', θ, θ' fixant la position des deux côtés de l'angle, sera une solution du problème de la mesure.

Crofton suppose qu'on choisisse au hasard, indépendamment l'un de l'autre, les deux côtés de l'angle et il applique le théorème des probabilités composées, ce qui est très légitime si l'on a égard à la définition statistique de la probabilité. Il est donc conduit à prendre $f = 1$ (2).

(1) Cette insuffisance n'est pas de nature différente de celle déjà rencontrée. Dans les deux cas il y a insuffisance, parce que le groupe de transformations, qui nous est donné comme conservant la mesure, ne contient pas assez de paramètres pour qu'il nous soit possible de décomposer tous les ensembles à mesurer en ensembles infiniment petits de mesures égales.

(2) On peut noter qu'il se présente ici une circonstance, qu'on rencontre fréquemment; il suffit d'admettre la partie qualitative du théorème pour que la partie quantitative en soit une conséquence nécessaire. Admettons, en effet, que la probabilité relative à une position d'un angle ne dépende que des probabilités relatives aux positions de ses côtés. Il faudra évaluer cette probabilité avec une mesure des angles qui soit seulement fonction des mesures m et n des ensembles formés par les côtés de l'angle. Or cette fonction, $f(m, n)$ doit être croissante et par rapport à m et par rapport à n et l'on doit avoir

$$f(m + m', n + n') = f(m, n) + f(m, n') + f(m', n) + f(m', n'),$$

d'où l'on déduit de suite $f = Cmn$. D'où le théorème des probabilités composées.

Les intégrales du paragraphe 4 sont considérées par Crofton à l'occasion de questions relatives à des couples de points dans un domaine convexe et à des couples de tangentes d'une courbe donnée.

Le lecteur, qui s'intéresserait à ces questions de mesure et qui désirerait connaître ce qui a été fait relativement aux mesures d'ensembles de plans ou de droites de l'espace, devrait se reporter aux travaux déjà cités de Cauchy, de Crofton, de M. Czuber et de M. Cartan, ainsi qu'aux travaux de géométrie de Minkowski (1).