

J. HAAG

Sur la sommation de certaines séries

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 12
(1912), p. 181-185

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__181_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D 2b]

SUR LA SOMMATION DE CERTAINES SÉRIES;

PAR M. J. HAAG.

Nous nous proposons d'indiquer certaines catégories de séries que l'on peut sommer par l'application de la théorie des séries entières et dont des exemples ont été plusieurs fois demandés aux examens oraux de l'École Polytechnique.

1. *Si le terme général d'une série est une fraction rationnelle en n dont tous les pôles sont entiers et simples, on peut toujours sommer cette série.*

Soit, en effet, la série

$$u_n = \frac{P(n)}{(n+a)(n+b)\dots(n+l)},$$

où $a, b, \dots, l$ sont p nombres entiers, positifs ou négatifs, et où $P(n)$ désigne un polynome en n de degré au plus égal à $p-2$, afin qu'il y ait convergence. On suppose, en outre, qu'on ne donne à n que des valeurs supérieures au plus grand des nombres $-a, -b, \dots$,

et, par suite,

$$f(x) = -\log(1-x) \left(\frac{A}{x^a} + \frac{B}{x^b} + \dots + \frac{L}{x^l} \right) \\ - \sum \frac{A}{x^a} \left(x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^a}{a} \right),$$

le signe Σ indiquant une somme qui doit porter sur tous les nombres $a, b, \dots, l$.

Si l'on fait maintenant tendre x vers 1, le premier terme de $f(x)$ tend vers zéro, comme on le voit en posant $1-x=y$ et se rappelant que $A+B+\dots+L=0$. On a donc finalement la formule élégante

$$(1) \quad U = - \sum A \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{a} \right).$$

Remarquons que si $a=0$, les termes correspondants n'existent pas, car $\alpha(x) = -A \log(1-x)$.

Exemple. — Soit à calculer la série

$$U = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)}$$

(examens oraux de l'École Polytechnique, 1911).

On écrit d'abord

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n(n+1)(n+3)}.$$

Or

$$\frac{2n+5}{n(n+1)(n+3)} = \frac{5}{3} \frac{1}{n} - \frac{3}{2} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{6} \frac{1}{n+3}.$$

Appliquant la formule (1), on a immédiatement

$$U = +\frac{3}{2} + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{65}{36}.$$

2. Si le terme général d'une série est le produit par $\frac{1}{n!}$ d'une fraction rationnelle en n dont tous les pôles sont simples, entiers et négatifs, on peut toujours sommer cette série.

Soit, en effet, la série

$$u_n = \frac{P(n)}{(n+a)(n+b)\dots(n+l)} \frac{1}{n!},$$

où $a, b, \dots, l$ sont des entiers positifs et $P(n)$ un polynome quelconque en n . On a

$$\frac{P(n)}{(n+a)(n+b)\dots(n+l)} = \sum \frac{A}{n+a} + \sum M_p n^p.$$

On est donc ramené à une somme de séries appartenant aux deux types suivants :

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)n!}, \quad W_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{n!}.$$

Or, celles-ci se calculent aisément en partant du développement de e^x . On a, en effet,

$$x^{a-1} e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+a-1}}{n!},$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+a}}{n!(n+a)} &= \int_0^1 e^x x^{a-1} dx \\ &= e^1 [x^{a-1} - (a-1)x^{a-2} \\ &\quad + (a-1)(a-2)x^{a-3} - \dots] + (-1)^a (a-1)! \end{aligned}$$

En faisant $x = 1$, il vient

$$\begin{aligned} V &= e[1 - (a-1) + (a-1)(a-2) \\ &\quad - (a-1)(a-2)(a-3) + \dots + (-1)^{a-1}(a-1)!] \\ &\quad + (-1)^a (a-1)! \end{aligned}$$

Quant à W_p , on l'obtiendra en faisant $x = 1$ dans la série entière

$$X_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p x^{n-1}}{n!},$$

laquelle se détermine, de proche en proche, au moyen de la relation de récurrence

$$X_p = X_{p-1} + x X'_{p-1},$$

sachant en outre que

$$X_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x.$$