

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 280-283

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__280_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

M. E.-N. Barisien. — *Résolution d'équations au moyen d'identités.* — On peut appeler les équations de ce genre *équations-énigmes*, car elles seraient presque impossibles à résoudre sans la connaissance d'identités appropriées. En voici deux exemples intéressants :

I. Résoudre l'équation du huitième degré

$$(2x^2 + a^2)^4 + (2x^2 - a^2)^4 + (4ax)^4 \\ - (4x^4 + 12a^2x^2 + a^4)^2 = b^8.$$

On a l'identité

$$(2x^2 + a^2)^4 + (2x^2 - a^2)^4 + (4ax)^4 \\ = (4x^4 + 12a^2x^2 + a^4)^2 + (4x^4 - 12a^2x^2 + a^4)^2,$$

de sorte que l'équation devient

$$(4x^4 - 12a^2x^2 + a^4)^2 = b^8$$

et se décompose en deux équations bicarrées

$$(4x^4 - 12a^2x^2 + a^4 - b^4)(4x^4 - 12a^2x^2 + a^4 + b^4) = 0.$$

Et les huit racines sont

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right\} = \pm \sqrt{\frac{3a^2 \pm \sqrt{8a^4 + b^4}}{2}},$$

$$\left. \begin{matrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix} \right\} = \pm \sqrt{\frac{3a^2 \pm \sqrt{8a^4 - b^4}}{2}}.$$

II. Résoudre l'équation du huitième degré

$$2(3x^2 + a^2)^4 - (3x^2 + 2ax - a^2)^4 - (4ax)^4 = b^8.$$

Or on a l'identité

$$\begin{aligned} 2(3x^2 + a^2)^4 \\ = (3x^2 + 2ax - a^2)^4 + (3x^2 - 2ax - a^2)^4 + (4ax)^4. \end{aligned}$$

L'équation devient donc

$$(3x^2 - 2ax - a^2)^4 = b^8.$$

Elle se décompose ainsi

$$\begin{aligned} (3x^2 - 2ax - a^2 - b^2)(3x^2 - 2ax - a^2 + b^2) \\ [(3x^2 - 2ax - a^2)^2 + b^4] = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3x^2 - 2ax - a^2 - b^2)(3x^2 - 2ax - a^2 + b^2) \\ (3x^2 - 2ax - a^2 - b^2\sqrt{-1})(3x^2 - 2ax - a^2 + b^2\sqrt{-1}) = 0. \end{aligned}$$

On est donc ramené à résoudre quatre équations du second degré, ce qui donne les huit racines

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = \frac{a \pm \sqrt{4a^2 + 3b^2}}{3},$$

$$\left. \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right\} = \frac{a \pm \sqrt{4a^2 - 3b^2}}{3},$$

$$\left. \begin{matrix} x_5 \\ x_6 \end{matrix} \right\} = \frac{a \pm \sqrt{4a^2 + 3b^2\sqrt{-1}}}{3},$$

$$\left. \begin{matrix} x_7 \\ x_8 \end{matrix} \right\} = \frac{a \pm \sqrt{4a^2 - 3b^2\sqrt{-1}}}{3}.$$

Si $b = 0$, ces racines deviennent les deux racines quadruples $x = a$ et $x = -\frac{a}{3}$.

M. Joseph Joffroy. — *Fermat* a trouvé une propriété arithmétique qui est traduite par l'égalité

$$a^p = mp + a.$$

Généralisée elle devient

$$(1) \quad a^{p+k(p-1)} = mp + a,$$

p étant premier et les autres nombres entiers quelconques.

Application de la formule (1). — Soit

$$(2) \quad x^{37} + y^{37} = z^{37};$$

(1) fournit aisément

$$x^{37} = \begin{cases} 2m + x, \\ 3m + x, \\ 5m + x, \\ 7m + x, \\ 13m + x, \\ 19m + x, \\ 36m + x. \end{cases}$$

Donc $x^{37} - x$ qui est multiple de 2, 3, 5, 7, 13, 19, 37 est multiple de leur produit et je puis écrire

$$x^{37} - x = 2.3.5.7.13.19.37m = Pm,$$

$$y^{37} - y = Pm',$$

$$z^{37} - z = Pm'',$$

$$x^{37} + y^{37} - z^{37} + Pm_1 = x + y - z,$$

ou, en vertu de (2),

$$(3) \quad x + y - z = Pm_1,$$

il est aisé de prouver que Pm_1 est positif; (3) donne

$$x = Pm_1 + (z - y)$$

et, si j'ai $x < y < z$, donne

$$x > P + 1 \quad \text{ou} \quad x > 1919191.$$

Conclusion. — Si l'équation (2) admet des solutions entières,

elles sont supérieures à ce nombre, ce qui n'invite pas à penser que cette équation en admet.

Remarque. — De la formule

$$a^{p+k(p-1)} = mp + a$$

je tire aussi aisément

$$a^{85} = 2.3.5.7.13.29.85 = 6729450m + a,$$

$$a^{49} = 2.3.5.7.13.17.49 = 2274090m + a,$$

et j'en conclus comme ci-dessus pour les solutions entières de

$$x^{85} + y^{85} = z^{85},$$

$$y^{49} + y'^{49} = z^{49},$$

supposées possibles, des nombres considérables.

La même remarque est applicable à autant d'équations de *Fermat* que l'on veut considérer.