

TH. GOT

Démonstration d'un théorème de Kummer sur un type de déterminants

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 274-277

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__274_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[B1c]

**DÉMONSTRATION D'UN THEOREME DE KUMMER
SUR UN TYPE DE DÉTERMINANTS;**

PAR M. TH. GOT,
Ancien Ingénieur de la Marine,
Professeur au Lycée d'Agen.

Dans le Tome 133 (1909) du *Journal de Crelle*, M. Saalschütz donne une série de formules relatives à certains déterminants qu'il appelle *Zirkulante* et qu'on pourrait appeler, je crois, *circulaires*. La dernière formule qu'il indique se trouve déjà dans Kummer (au signe près, qu'il ne précise pas); c'est pour l'expression du nombre des classes d'idéaux, que ce dernier l'emploie, dans son Mémoire du *Journal de Liouville*, t. XVI (1851).

Comme M. Saalschütz ne donne pas la démonstration de la formule, et que la démonstration de Kummer est incomplète, je crois utile d'en donner une nouvelle, d'autant plus que cette formule paraît susceptible d'autres applications.

Soit D le déterminant circulaire d'ordre $n - 1$:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix}.$$

La formule à démontrer est la suivante :

Si l'on a

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0,$$

mineurs relatifs aux éléments de la diagonale principale, du déterminant (3), dans lequel on a fait $u = 0$. Soient $M_1, M_2, \dots, M_n$ ces mineurs.

Tous ces mineurs sont égaux ; en effet, le déterminant ne change pas de valeur si l'on recule les p premières colonnes de $n - 1 - p$ rangs, puis les p premières lignes de $n - 1 - p$ rangs, ce qui entraîne un nombre *pair* de permutations de lignes ou de colonnes ; le $(p + 1)^{\text{ième}}$ terme de la diagonale principale devient alors le premier et l'on constate que le nouveau déterminant est identique au premier. Tout revient donc à démontrer que l'un de ces mineurs, M_1 par exemple, est égal à $(-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} D$:

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

En ajoutant toutes les lignes à la seconde et tenant compte de (1) on remplace les éléments de cette ligne par $-a_2, -a_3, \dots, -a_n$ et l'on voit alors que $-M_1$ est formé des mêmes lignes que D , à leur ordre près.

Pour ramener à leur place les $n - 2$ dernières lignes de M_1 , il faut effectuer $n - 4 + n - 5 + \dots + 1$ permutations de lignes, c'est-à-dire $\frac{(n+4)(n-3)}{2}$.

On a donc

$$-M_1 = (-1)^{\frac{(n+4)(n-3)}{2}} D.$$

D'ailleurs $\frac{(n+4)(n-3)}{2} + 1$ et $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ sont de même parité ; on a donc bien

$$u(\omega_1) u(\omega_2) \dots u(\omega_{n-1}) = n M_1 = (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} n D.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Cette formule donne la norme du nombre $u(\omega)$ dans le corps circulaire $c\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)$, sous une forme commode.

D'ailleurs, tout entier de ce corps peut se mettre aisément sous la forme $u(\omega)$ dans laquelle la somme des coefficients $a_1, a_2, \dots, a_n$ est nulle; ils ne sont alors pas entiers, mais cette transformation peut cependant être avantageuse.