NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LUCIEN GODEAUX

Sur la quatrième congruence de cubiques gauches de M. Stuyvaert

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__1_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[M³5j]

SUR LA QUATRIÈME CONGRUENCE DE CUBIQUES GAUCHES DE M. STUYVAERT;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Dans de belles recherches de Géométrie, couronnées par l'Académie royale de Belgique [1], M. Stuyvaert a défini six types de congruences linéaires de cubiques gauches. Ce sont les congruences dont chaque courbe est représentée par l'évanouissement de la matrice

$$\begin{Vmatrix} \varphi_{11}(x, \alpha) & \varphi_{12}(x, \alpha) & \varphi_{13}(x, \alpha) \\ \varphi_{21}(x, \alpha) & \varphi_{22}(x, \alpha) & \varphi_{23}(x, \alpha) \end{Vmatrix} = 0,$$

les six fonctions φ étant linéaires par rapport aux coordonnées ponctuelles (x_1, x_2, x_3, x_4) et par rapport aux paramètres $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Parmi ces congruences, les deux premiers types ont été étudiés par M. Stuyvaert [2]; j'ai ensuite établi

(1) *Cinq études de Géométrie analytique* (Prix François Deruyts, 1906). Gand, Librairie Van Gœthem, 1907, p. 94-119 (2ᵉ étude).

(2) *Une congruence linéaire de cubiques gauches* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1907); *Deuxième congruence linéaire*

qu'une certaine transformation birationnelle de l'espace fournit immédiatement la plupart des propriétés des types I, III et VI ([1]). Dans la Note suivante, j'établis une transformation birationnelle de l'espace qui transforme le type IV en une congruence bilinéaire de droites. La même transformation fournit de nouveaux types de congruences linéaires de cubiques que je signale.

Rappelons avant de commencer les propriétés de la congruence IV de M. Stuyvaert. Cette congruence est représentée par la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_3 c'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_3 c''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x & \alpha_1 d'_x & \alpha_1 d''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

Les cubiques qui la forment s'appuient quatre fois sur la sextique de genre trois

$$\left\| \begin{matrix} a_x & a'_x & a''_x & b_x \\ c_x & c'_x & c''_x & 0 \\ d_x & d'_x & d''_x & f_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

cinq fois sur la cubique gauche

$$\left\| \begin{matrix} a'_x & c'_x & d'_x \\ a'_x & c''_x & d'_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

et une fois sur la droite

$$d'_z = d'_x = 0.$$

La transformation birationnelle T. — 1. Soient

---

de cubiques gauches (*Rendiconti del Circ. Matem. di Palermo*, 1908, t. XXVI).

([1]) *Nouveaux types de congruences linéaires de cubiques gauches* (*Nouv. Ann. de Math.*, 4e série, t. IX); *Sur la sixième congruence de cubiques gauches de M. Stuyvaert* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1909).

C_6^3 une sextique gauche de genre trois et C_3 une cubique gauche dont les équations sont respectivement

$$(C_6^3) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{array} \right\| = 0,$$

$$(C_3) \qquad \left\| \begin{array}{ccc} a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{array} \right\| = 0.$$

La courbe C_3 s'appuie donc en huit points sur C_6^3 (¹).

Il y a une infinité de surfaces cubiques F, formant un faisceau, qui passent par les courbes C_6^3 et C_3 ; elles ont pour équation

$$(F) \qquad \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{array} \right| = 0,$$

λ_1 et λ_2 étant des paramètres variables.

Désignons par O_1, O_2, O_3, O_4 les sommets du tétraèdre fondamental.

Établissons une homographie H entre les surfaces F et les plans passant par la droite $d \equiv O_2 O_3$. Nous prendrons pour l'équation du plan correspondant à la surface F donnée par le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$,

$$\lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_4 = 0.$$

Une bisécante de la cubique C_3 peut être représentée par les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mu a_x + \mu' a'_x + \mu'' a''_x = 0, \\ \mu b_x + \mu' b'_x + \mu'' b''_x = 0. \end{array} \right.$$

(¹) STUYVAERT, *loc. cit.* (Étude I, p. 27).

Si nous écrivons les relations

$$\frac{y_2}{\mu} = \frac{y_3}{\mu'} = \frac{y_4}{\mu''},$$

elles feront correspondre à la droite unissant le point $P(y_1, y_2, y_3, y_4)$ au point O_1, la bisécante de C_3 représentée par les équations (1), et réciproquement. Nous aurons ainsi une correspondance birationnelle K entre la gerbe de sommet O_1 et la congruence des bisécantes de C_3.

La correspondance K est telle qu'au plan

$$v_2 y_2 + v_3 y_3 + v_4 y_4 = 0$$

correspond la quadrique

$$\begin{vmatrix} v_2 & v_3 & v_4 \\ a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} = 0.$$

En général, *à un cône d'ordre n et de sommet* O_1, *la transformation* K *fait correspondre une surface d'ordre* $2n$ *passant n fois par* C_3, *et réciproquement.*

2. A l'aide de l'homographie H et de la transformation K, nous pouvons établir une correspondance birationnelle T entre les points (x) et (y) de l'espace. Remarquons pour cela qu'une corde de C_3 rencontre une surface F en trois points dont deux sont sur C_3; les coordonnées du troisième point peuvent donc s'écrire en fonctions rationnelles des coefficients de l'équation de F.

Soient $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $Q(y_1, y_2, y_3, y_4)$ deux points de l'espace. Nous dirons que ces points se correspondent par T si les conditions suivantes sont vérifiées :

a. L'homographie H fait correspondre le plan QO_2O_3 et la surface F passant par P.

b. La droite QO_1 et la corde de C_3 issue de P se correspondent dans la transformation K.

Une telle transformation T est évidemment birationtionnelle.

ρ étant un facteur de proportionnalité et les déterminants cubiques étant dénotés par leur première ligne, les coordonnées de Q s'exprimeront au moyen de celles de P par les formules

$$(\tau)\quad \begin{cases} \rho y_1 = | a_x \quad b_x \quad d_x | (a_x b'_x - a'_x b_x), \\ \rho y_2 = | a_x \quad b_x \quad c_x | (a'_x b''_x - a''_x b'_x), \\ \rho y_3 = | a_x \quad b_x \quad c_x | (a''_x b_x - a_x b''_x), \\ \rho y_4 = | a_x \quad b_x \quad c_x | (a_x b'_x - a'_x b_x). \end{cases}$$

Dans la suite, nous désignerons par Σ_1, Σ_2 les espaces lieux des points respectivement de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4).

La transformation T mute un plan de Σ_2, d'équation

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 = 0,$$

en une surface du cinquième ordre dont l'équation peut s'écrire

$$(1)\quad \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & u_1 \\ a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} \\ | a_x \quad b_x \quad c_x | & | a_x \quad b_x \quad d_x | \end{vmatrix} = 0.$$

La dernière ligne s'annule pour les points de la courbe C_6^3, donc la surface passe par cette courbe. Tous les termes du déterminant précédent s'annulent pour les points de C_3, donc cette courbe est double pour la surface (1). Enfin, si l'on introduit l'hypothèse

$$(C'_3) \qquad \left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

les termes de la première colonne sont nuls, donc la surface (1) passe simplement par la cubique gauche C'_3.

Les équations des courbes C_6^3, C_3 et C'_3 ne dépendant pas des coefficients u_1, u_2, u_3, u_4, on peut énoncer le théorème suivant :

Les plans de Σ_2 se transforment en des surfaces du cinquième ordre passant simplement par les deux courbes C_6^3, C'_3 et doublement par la cubique C_3.

Les trois courbes C_6^3, C_3 et C'_3 sont évidemment singulières pour la transformation T ; nous allons voir que ce sont les seules dans l'espace Σ_1. Pour cela, il nous suffira de démontrer que l'intersection de deux surfaces telles que (1) se compose de ces courbes et d'une courbe variable du quatrième ordre, ou encore que la courbe de Σ_1 correspondant à une droite de Σ_2, est du quatrième ordre.

La courbe correspondant à la droite

$$u_y = 0, \qquad v_y = 0$$

est représentée par

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & u_1 \\ a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & v_1 \\ a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} v_2 & v_3 & v_4 \\ a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_x & b_x & d_x \end{vmatrix} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Cette matrice s'annule pour les points d'une courbe du seizième ordre. Mais C_3 annule tous les termes de (2) et C'_3 tous les termes de la première colonne; par suite la courbe du seizième ordre se décompose en trois fois C_3, une fois C'_3 et en une courbe d'ordre quatre mobile.

A une droite de Σ_2 correspond une courbe du quatrième ordre.

Les seules lignes singulières de Σ_1 sont C_6^3, C_3 et C'_3.

3. Recherchons quels lieux engendrent les points de Σ_2 qui correspondent aux points singuliers de Σ_1.

A un point P de C_6^3 correspondent évidemment tous les points d'une droite passant par O_1 et que la transformation K fait correspondre à la corde de C_3 issue de P. Le lieu de telles cordes est une surface d'ordre huit passant quatre fois par C_3; par suite la transformation K la mute en un cône du quatrième ordre de sommet O_1 et la surface correspondant à C_6^3 est déterminée. On peut affirmer que ce cône est dépourvu de singularités, car il est de genre trois, ses génératrices étant en correspondance birationnelle avec les points de C_6^3.

La surface $[C_6^3]$ lieu des points de Σ_2 qui se transforment en des points de C_6^3 est un cône du quatrième ordre de sommet O_1.

Soit $[C_3]$ le lieu des points de Σ_2 qui correspondent aux points de C_3. Pour que le transformé d'un point Q de Σ_2 soit sur C_3, il faut et il suffit que la surface cubique F correspondante au plan O_2O_3Q et la corde de C_3 correspondante à la droite O_1Q, se touchent.

(Le point de contact, qui correspond à Q, est en effet nécessairement sur C_3.)

Le lieu des cordes de C_3 qui touchent une surface F (nécessairement le long de C_3) est une surface d'ordre dix passant cinq fois par C_3; la transformation K la mute donc en un cône d'ordre cinq de sommet O_1. L'homographie H fait correspondre à la surface F considérée, un plan passant par $O_2 O_3$ et ce plan rencontre donc $[C_3]$ en une courbe du cinquième ordre. D'autre part, on constate aisément que par un point de $O_2 O_3$ passent deux pareilles courbes, donc la surface $[C_3]$ passe doublement par cette droite et est d'ordre sept. Enfin, une droite issue de O_1 rencontre encore la surface $[C_3]$ en deux points, donc O_1 est un point quintuple.

La surface $[C_3]$, *lieu des points auxquels correspondent des points de* C_3, *est d'ordre sept, passe doublement par la droite* $O_2 O_3$, *et possède un point quintuple* O_1.

Il est facile de montrer qu'à un point de C_3 correspondent les points d'une conique de la surface $[C_3]$. Considérons un point P de C_3; au cône projetant C_3 de P, la transformation K fait correspondre un plan π passant par O_1. Une surface cubique F est tangente en P à chaque génératrice du cône, et inversement une seule génératrice touche une surface F en P; par suite, si nous considérons dans π les faisceaux droites dont les sommets sont O_1 et le point de rencontre de π avec $O_2 O_3$, ils sont homographiques et le lieu des intersections des rayons correspondants est la conique transformée du point P.

Soit enfin $[C'_3]$ la surface transformée de C'_3, nous allons voir qu'elle coïncide avec le plan $O_1 O_2 O_3$. A ce plan, la transformation K fait correspondre la quadrique

$$a_x b'_x - a'_x b_x = 0,$$

et l'homographie H, la surface cubique

$$| \, a_x \quad b_x \quad c_x \, | = 0.$$

Ces deux surfaces se rencontrent en deux courbes C_3, C'_3. Inversement, à un point de C'_3 correspond une droite du plan $O_1 O_2 O_3$ passant par O_1, par suite.

La surface $[C'_3]$, *lieu des points de* Σ_2 *auxquels correspondent des points de* C'_3, *coïncide avec le plan* $O_1 O_2 O_3$.

Une droite de Σ_2 rencontre les surfaces $[C_6^3]$, $[C_3]$ et $[C'_3]$ respectivement en quatre, sept et un point; on en conclut que :

Aux droites de Σ_2 *correspondent des courbes du quatrième ordre s'appuyant quatre fois sur* C_6^3, *sept fois sur* C_3 *et une fois sur* C'_3.

4. Soit π un plan de Σ_1; d'après la théorie des transformations birationnelles, on sait déjà qu'il lui correspond dans Σ_2 une surface du quatrième ordre. Nous allons voir que cette surface passe par la droite $O_2 O_3$ et est un monoïde dont le sommet est en O_1.

Soit π' un plan passant par $O_2 O_3$. Il lui correspond par H une surface cubique F. Les cordes de C_3 qui s'appuient sur l'intersection de cette surface avec le plan π forment une surface d'ordre six passant trois fois par C_3. La transformation K mute cette surface en un cône cubique de sommet O_1 et π' rencontre donc la surface du quatrième ordre transformée de π en une cubique, donc cette surface passe simplement par la droite O_2O_3.

A une droite issue de O_1, K fait correspondre une corde de C_3. Par le point d'intersection de celle-ci avec π, passe une surface F. Le plan correspondant à cette surface dans l'homographie H marque un seul point de la transformée de π; par suite cette transformée a un point triple en O_1.

A une droite de Σ_1 correspond dans Σ_2 une courbe du cinquième ordre. Deux surfaces du quatrième ordre, transformées de deux plans de Σ_1, ont donc en commun, outre d, une courbe variable d'ordre cinq et une courbe C_{10} d'ordre dix.

Aux plans de Σ_1 *correspondent des monoïdes du quatrième ordre dont le point multiple est en* O_1 *et qui passent par la droite* O_2O_3 *et par la courbe* C_{10}.

La transformation T *possède dans* Σ_2 *un point singulier isolé, une droite et une courbe d'ordre dix singulières.*

5. Désignons par $[O_1]$, $[O_2O_3]$, $[C_{10}]$ les surfaces de Σ_1 dont les points correspondent respectivement au point O_1 et aux points des courbes O_2O_3, C_{10}.

On arrive aisément aux théorèmes suivants :

La surface $[O_1]$ *lieu des points de* Σ_1 *correspondants à* O_1 *est la surface cubique que l'homographie* H *fait correspondre au plan* $O_1O_2O_3$.

La surface $[O_2O_3]$ *lieu des points de* Σ_1 *correspond à ceux de* O_2O_3, *est la quadrique transformée du plan* $O_1O_2O_3$ *au moyen de la transformation* K.

Passons à la recherche de la surface $[C_{10}]$.

Sur une surface cubique F, passant par C_6^3 et C_3, il se trouve six cordes de C_3. A tous les points d'une de ces cordes, correspond un même point unique de Σ_2. Recherchons le lieu C de ce point.

Le lieu des cordes de C_3 appartenant à une surface F, est une surface S du huitième ordre. Considérons en effet un plan π, une droite x extérieure à ce plan et ne rencontrant pas C_3 et deux ponctuelles (X_1), (X_2) de support x. Par un point X_1 passe une corde de C_3; par le point où cette corde rencontre r passe une surface F qui marque sur x trois points X_2. Inversement, à un point X_2 correspondent six points X_1. Une coïncidence des points X_1, X_2 est généralement un point de la surface S; il y a une exception pour le point commun au plan π et à la droite x, qui absorbe une coïncidence. D'après le principe de Chasles, S est donc $9 - 1 = 8$. Cette surface contient C_6^3 et a été rencontrée plus haut.

La transformation K mute S en un cône $[C_6^3]$ du quatrième ordre de sommet O_1. La courbe C se trouve évidemment sur ce cône. Un plan passant par O_1 contient quatre génératrices de $[C_6^3]$; chacune d'elles contient, en dehors de O_1, un et un seul point de C. Sur la surface $[O_1]$, se trouvent six cordes de C_3, donc C passe six fois par O_1 et cette courbe est du dixième ordre; par suite elle coïncide avec C_{10}. Un plan passant par O_2O_3 contient six points de C_{10} en dehors de O_2O_3, donc cette droite est une quadrisécante.

La courbe singulière C_{10} *a un point sextuple en* O_1 *et s'appuie quatre fois sur la droite* O_2O_3.

La surface $[C_{10}]$ *lieu des points de* Σ_1 *correspondant aux points de* C_{10} *est du huitième ordre, passe quatre fois par* C_3 *et une fois par* C_6^3.

Une droite de Σ_1 rencontre $[O_1]$, $[O_2O_3]$, $[C_{10}]$

respectivement en trois, deux et huit points; donc :

Aux droites de Σ_1 *correspondent des courbes du cinquième ordre s'appuyant deux fois sur* O_2O_3; *huit fois sur* C_{10} *et ayant un point triple en* O_1.

On remarquera que C_{10} fait partie de l'intersection de $[C_6^3]$ et de $[C_3]$, d'après la théorie des transformations birationnelles. On vérifiera alors aisément que $[C_3]$ passe doublement par C_{10}, car une droite issue de O_1 et s'appuyant sur C_{10} ne rencontre $[C_3]$ qu'en deux points distincts.

Congruences linéaires de cubiques gauches. — 6. La transformation T mute une droite a de Σ_2 s'appuyant sur la droite O_2O_3, en une courbe du quatrième ordre qui dégénère en une cubique gauche γ et une bisécante a' de C_3.

Si P est le point d'appui de a sur O_2O_3, la droite a' correspond, par la transformation K, à la droite PO_1; cette droite a' se trouve donc sur la quadrique

$$a_x b'_x - a'_x b_x = 0,$$

et s'appuie ainsi en un point sur C'_3. En utilisant un théorème précédent, nous pouvons énoncer celui-ci :

A une droite de Σ_2 *s'appuyant sur la droite* O_2O_3 *correspond dans* Σ_1 *une cubique gauche s'appuyant en quatre points sur* C_6^3 *et en cinq points sur* C_3.

Supposons que la droite a appartiennent à une congruence linéaire G (O_2O_3 étant naturellement singulière pour cette congruence). Les cubiques γ correspondantes formeront évidemment une congruence Γ dont l'ordre est égal à l'unité, car si par un point P de Σ_1 passaient plusieurs courbes de Γ, par le point de Σ_2 correspondant à P passeraient plusieurs droites de G, ce qui n'a généralement pas lieu.

La classe de Γ est, comme on sait, le nombre de ses courbes γ s'appuyant en deux points sur une droite. En transformant au moyen de T, on voit que la classe de Γ est le nombre de droites de G s'appuyant en deux points sur une courbe d'ordre cinq possédant un point triple en O_1 et deux points simples sur O_2O_3.

Nous examinerons les différents cas qui peuvent se présenter pour les congruences Γ.

7. Prenons pour G la congruence formée par les droites s'appuyant sur O_2O_3 et sur une courbe D, d'ordre n, s'appuyant $n-1$ fois sur O_2O_3 m fois sur C_{10} (1) et enfin passant m_1 fois par O_1 (m_1 étant égal à zéro ou un).

La transformée de D, débarrassée des composantes provenant des points communs à D et aux éléments singuliers de T dans Σ_2, est une courbe Δ d'ordre $3n - m + 1 - 3m_1$. La congruence Γ est donc le lieu des cubiques gauches γ s'appuyant en un point sur Δ.

La courbe Δ s'appuie sur C_6^3, C_3, C'_3 respectivement en $4(n-m_1)-m$, $5n-2m+2-5m_1$, $1-m_1$ points; ces points d'appui sont fournis par les intersections de D avec les surfaces $[C_6^3]$, $[C_3]$, $[C'_3]$ en dehors des points singuliers de T dans Σ_2.

Passons à la recherche de la classe de Γ. Les bisécantes d'une courbe du cinquième ordre transformée d'une droite de Σ_2, s'appuyant sur O_2O_3, forment une surface d'ordre cinq passant deux fois par O_2O_3 et ayant un point triple en O_1. Cela étant, d'après la

(1) En dehors de O_1.

remarque faite tantôt, la classe de Γ sera le nombre des points d'intersection de D avec cette surface, en dehors de O_2O_3 et de O_1 ; c'est-à-dire $3n+2-3m_1$.

Selon que m prendra les valeurs 0 ou 1, nous obtiendrons deux congruences Γ_1, Γ_2 dont nous résumerons les propriétés dans les tableaux à double entrée suivants (le nombre placé à l'intersection d'une ligne et d'une colonne fournit le nombre de points communs aux deux courbes de tête) :

	C_6^3	C_3	C_3'	Δ	γ
C_6^3		8	8	$4n-m$	4
C_3	8		5	$5n-2m+2$	5
C_3'	8	5		1	0
Δ	$4n-m$	$5n-2m+2$	1		1
γ	4	5	0	1	

(Γ_1) (classe $= 3n+2$).

	C_6^3	C_3	Δ	γ
C_6^3		8	$4n-m-4$	4
C_3	8		$5n-2m-3$	5
Δ	$4n-m-4$	$5n-2m+3$		1
γ	4	5	1	

(Γ_2) (classe $= 3n-1$).

On voit que la congruence IV de M. Stuyvaert s'obtient pour $n=1$, $m=0$; car Δ devient alors une bisécante de C_3.

La transformation T *mute les cubiques de la* *congruence* IV *de M. Stuyvaert en les droites d'une congruence bilinéaire.*

8. La congruence G peut être formée par des faisceaux de rayons dont les plans passent par O_2O_3 et dont les sommets sont sur cette droite, un point de O_2O_3 étant le sommet de n faisceaux et un plan par O_2O_3 contenant un seul faisceau.

Les cubiques de la congruence Γ correspondante se distribuent par faisceaux sur les surfaces du troisième ordre F passant par C_6^3 et C_3, une surface contenant un seul faisceau.

Le centre d'un faisceau de rayons de G, étant sur O_2O_3, est transformé en une droite de la quadrique $[O_2O_3]$, dont l'équation est

$$a_x b'_x - a'_x b_x = 0.$$

Une telle droite est donc rencontrée par les cubiques de n faisceaux de Γ. Une surface F ne contenant qu'un seul de ces faisceaux et toutes les surfaces F ne contenant pas les génératrices de $[O_2O_3]$, les cubiques d'un faisceau de Γ passent par un même point de la génératrice correspondante de la quadrique $[O_2O_3]$.

Pour chercher la classe de Γ, considérons la surface S_5 lieu des bisécantes de la transformée d'une droite de Σ_1, s'appuyant sur O_2O_3; cette droite est double pour S_5. Soient (X_1), (X_2) deux ponctuelles situées sur O_2O_3. Par un point X_1 menons les deux génératrices de S_5, les plans passant par O_2O_3 et contenant ces génératrices contiennent chacun un faisceau de droites de G; les sommets de ces faisceaux marquent sur O_2O_3 deux points X_2. Inversement, à un point X_2 correspondent $3n$ points X_1. D'après le principe de Chasles, il y a $3n+2$ coïncidences et Γ est de classe $3n+2$ d'après la remarque faite plus haut.

Si l'on établit une correspondance $(n, 1)$ *entre les surfaces cubiques* F *passant par* C_6^3, C_3 *et les génératrices bisécantes de* C_3 *de la quadrique*

$$a_x b'_x - a'_x b_x = 0,$$

la cubique gauche s'appuyant quatre fois sur C_6^3, *cinq fois sur* C_3 *et une fois sur la génératrice de la quadrique correspondant à la surface* F *sur laquelle cette cubique se trouve, engendre une congruence* Γ_3 *d'ordre un et de classe* $3n + 2$.

9. A une droite de Σ_1 correspond une courbe d'ordre cinq ; à un point de C'_3 correspond une droite passant par O_1 et s'appuyant sur O_2O_3. On en conclut qu'à une bisécante de C'_3 correspond dans Σ_2 une courbe d'ordre cinq dégénérée en deux droites passant par O_1 et situées dans le plan $O_1O_2O_3$, et une cubique gauche γ passant par O_1 et s'appuyant encore huit fois sur C_{10}. Les bisécantes de C'_3 forment une congruence linéaire, par suite les courbes γ' forment une congruence linéaire Γ_4.

Par un raisonnement employé plus haut, on verra que la classe de Γ_4 est le nombre de bisécantes de C'_3 s'appuyant en deux points sur la transformée d'une droite de Σ_2. Une telle courbe est d'ordre quatre et s'appuie une fois sur C'_3 ; par suite la classe cherchée est égale à quinze.

Les cubiques s'appuyant en huit points sur une courbe du dixième ordre et passant par un point sextuple de cette courbe, forment une congruence Γ_4 *d'ordre un et de classe quinze.*

10. Prenons pour C_6^3 et C_3 les équations employées par M. Stuyvaert et rappelées dans l'introduction de ce travail, c'est-à-dire

$$(\mathrm{C}_6^3)\qquad \begin{Vmatrix} a_x & a'_x & a''_x & b_x \\ c_x & c'_x & c''_x & 0 \\ d_x & d'_x & d''_x & f_x \end{Vmatrix} = 0,$$

$$(\mathrm{C}_3)\qquad \begin{Vmatrix} a'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & c''_x & d''_x \end{Vmatrix} = 0.$$

La cubique C'_3 a maintenant pour équations

$$(\mathrm{C}'_3)\qquad \begin{Vmatrix} a'_x & a''_x & b_x \\ c'_x & c''_x & 0 \end{Vmatrix} = 0,$$

et dégénère donc en une droite et une conique.

Les équations de la transformation T deviennent

$$\begin{aligned} y_1 : y_2 : y_3 : y_4 \\ = \begin{vmatrix} a_x & a'_x & a''_x \\ c_x & c'_x & c''_x \\ d_x & d'_x & d''_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a'_x & c'_x \\ a''_x & c''_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a'_x & a''_x & b_x \\ c'_x & c''_x & 0 \\ d'_x & d'_x & f_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c'_x & d'_x \\ c''_x & d'_x \end{vmatrix} \\ : \begin{vmatrix} a'_x & a''_x & b_x \\ c'_x & c''_x & 0 \\ d'_x & d''_x & f_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d'_x & a'_x \\ d''_x & d''_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a'_x & a''_x & b_x \\ c'_x & c''_x & 0 \\ d'_x & d''_x & f_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a'_x & c'_x \\ a''_x & c''_x \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Cette transformation fait correspondre aux cubiques gauches de la congruence de M. Stuyvaert les droites s'appuyant sur les droites

$$y_2 = y_4 = 0, \qquad y_2 = y_3 = 0.$$

On ramènera par la transformation T toute propriété d'une congruence bilinéaire de droites à une propriété de la congruence de cubiques.