

Concours d'agrégation des sciences mathématiques en 1907 (mathématiques élémentaires)

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 342-350

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__342_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
EN 1907 (MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES).**

SOLUTION PAR UN ANONYME.

I. *Étant donné un triangle ABC, trouver sur la droite BC un point D tel qu'un cercle (β), inscrit ou exinscrit au triangle ABD et ayant son centre sur la bissectrice intérieure de l'angle B du triangle donné, soit tangent à un cercle (γ), inscrit ou exinscrit au triangle ACD et ayant son centre sur la bissectrice intérieure de l'angle C du triangle donné. Même question en considérant les angles extérieurs en B et C, ou encore un angle intérieur et un angle extérieur.*

II. *On donne deux cercles (β) et (γ) tangents extérieurement et soient SX, SX' les tangentes communes extérieures à ces cercles. Un point A décrit la tangente commune intérieure ZZ' et l'on mène de ce point les secondes tangentes aux cercles (β), (γ), lesquelles rencontrent SX en B et C, SX' en B', C :*

1° *Les centres des deux cercles étant β et γ , le point d'intersection M des droites B β et C γ et le point d'intersection M' des droites B' β et C' γ décrivent deux droites Δ , Δ' .*

2° *Le quadrilatère M β M' γ est inscriptible à un cercle et les deux droites MM' et $\beta\gamma$ sont conjuguées par rapport à ce cercle.*

3° *L'enveloppe de MM' est une hyperbole; trouver le point de contact de MM' avec son enveloppe.*

4° Le cercle $A\beta\gamma$ est orthogonal au cercle $M\beta M'\gamma$. Ce même cercle $A\beta\gamma$, le cercle de centre M tangent aux trois côtés du triangle ABC et le cercle de centre M' tangent aux trois côtés du triangle $AB'C'$ ont, deux à deux, même axe radical.

5° Désignons par O le milieu de $\beta\gamma$, par D et D' les points où ZZ' rencontre SX et SX' et par ω le centre du cercle $A\beta\gamma$.

On a

$$\frac{OM}{DO} = \frac{D'O}{OM'} = \frac{AD'}{AD},$$

$$\frac{1}{\omega O} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AD'}.$$

I. (Le lecteur est prié de faire les figures pour cette première partie.)

Les deux cercles (β) et (γ) doivent être tangents extérieurement, mais trois hypothèses sont possibles :

1. La tangente commune intérieure peut être la droite AD , les deux cercles touchant cette droite au même point, et c'est ce cas que l'on devait surtout considérer en vue de la seconde partie du problème. *Le point D est alors le point de contact avec BC du cercle qui touche les trois droites indéfinies BC , AB , AC , et qui a son centre au point de rencontre des bissectrices considérées; ces bissectrices étant données, il y a donc un seul point D , mais ce point correspond à deux solutions différentes.*

Avec les bissectrices des angles intérieurs, le point D étant entre B et C , les cercles (β) et (γ) peuvent être inscrits aux triangles ADB et ADC , ou être exinscrits dans les angles B et C respectivement; on a, dans les deux cas,

$$DB - DC = AB - AC,$$

et D est le point de contact avec BC du cercle inscrit au triangle ABC.

Avec les bissectrices des angles extérieurs, le point D étant entre B et C, les cercles (β) et (γ) peuvent être exinscrits aux triangles ADB et ADC dans les angles qui ont leurs sommets en A, ou dans ceux qui ont leurs sommets en D; on a alors

$$DC - DB = AB - AC,$$

et D est le point de contact avec BC du cercle exinscrit au triangle ABC dans l'angle A.

Avec la bissectrice de l'angle intérieur en B et celle de l'angle extérieur en C, le point D étant sur le prolongement de BC au delà de C, le cercle (β) peut être inscrit au triangle ABD en même temps que le cercle (γ) est exinscrit au triangle ACD dans l'angle ACD, ou encore le cercle (β) peut être exinscrit au triangle ABD dans l'angle B en même temps que le cercle (γ) est inscrit au triangle ACD; on a alors

$$DB + DC = AB + AC,$$

et D est le point de contact avec BC du cercle exinscrit au triangle ABC dans l'angle B.

2. La tangente commune intérieure peut être la droite BC, les deux cercles touchent cette droite au même point. Si l'on considère, par exemple, les bissectrices des angles extérieurs en B et C, on trouve $AD = p$, ce qui donne deux solutions; etc.

3. Chacune des droites AD et BC peut être une tangente commune extérieure. Soient E et F les points de contact des cercles (β) et (γ) avec la droite BC, et po-

Les angles extérieurs en B et C ne donnent pas de solution ; l'équation

$$X^2 - (p - a)X + \frac{(p - a)p}{4} = 0$$

n'a pas de racines.

Si l'on considère l'angle intérieur en B et l'angle extérieur en C, on a, avec $EF = p - c$ dans le sens BC,

$$x + y = p - b, \quad xy = -\frac{(p - b)(p - c)}{4};$$

la distance du milieu du côté BC au milieu du segment EF est $\frac{1}{2}\sqrt{a(p - b)}$.

Avec l'angle intérieur en C et l'angle extérieur en B, on a $FE = p - b$ dans le sens CB, et la distance du milieu du côté CB au milieu du segment FE est

$$\frac{1}{2}\sqrt{a(p - c)}.$$

II. (Le lecteur est prié de compléter la figure.)

1. Soient D et D' les points où la droite ZZ' rencontre les droites SX et SX'. En appliquant au triangle ABC le résultat obtenu dans la première partie, avec la première hypothèse, on voit que D est le point de contact avec BC du cercle qui a pour centre le point M et qui est tangent aux trois droites BC, AB, AC; le lieu du point M est donc la perpendiculaire Δ menée en D à la droite SX. Le lieu du point M' est de même la perpendiculaire Δ' menée en D' à la droite SX'. Les deux droites Δ et Δ' passent au milieu O du segment $\beta\gamma$.

2. Les côtés du quadrilatère $M\beta M'\gamma$ sont les bissectrices des angles du quadrilatère $BB'C'C$; ce quadrila-

tière $M\beta M'\gamma$ est donc inscriptible à un cercle. On a, d'ailleurs,

$$\begin{aligned}\widehat{M} &= 1^d + \frac{A}{2}, & \widehat{M'} &= 1^d - \frac{A}{2}, \\ \widehat{\beta} &= 1^d + \frac{S}{2}, & \widehat{\gamma} &= 1^d - \frac{S}{2}.\end{aligned}$$

La droite MM' est la bissectrice de l'angle A .

2 bis. La perpendiculaire menée en O à la droite $\beta\gamma$ passe au centre du cercle $M\beta M'\gamma$. Si ω est le point où la droite MM' rencontre cette perpendiculaire, comme les droites $O\beta$ et $O\omega$ sont les bissectrices des angles que forment les droites Δ et Δ' , le conjugué du point ω par rapport à M et M' est sur $\beta\gamma$, et la droite $\beta\gamma$ est la polaire du point ω par rapport au cercle considéré. Les droites MM' et $\beta\gamma$ sont donc conjuguées par rapport à ce cercle.

3. Le segment MM' , compris entre les droites fixes Δ et Δ' , étant vu sous un angle constant de chacun des points β et γ , l'enveloppe de la droite MM' est une conique de foyers β et γ , tangente à ces deux droites. Les valeurs des angles β et γ montrent que cette conique a pour asymptotes les droites Δ et Δ' ; elle a un sommet au point K . On peut encore démontrer que le produit des distances des points β et γ à la droite MM' est constant.

Le point de contact de la droite MM' avec son enveloppe est le milieu P du segment MM' . En effet, les droites MM' et $\beta\gamma$ étant conjuguées par rapport au cercle $M\beta M'\gamma$, la droite $\beta\gamma$ passe au pôle de MM' , et le milieu P de la corde MM' est un point tel que, si on le joint aux points β et γ , la droite PM est bissectrice de l'angle $\beta P \gamma$ (réciproque du fait considéré plus haut).

Si l'on n'avait pas tenu à n'utiliser que les propriétés focales de l'hyperbole, on aurait pu faire voir que l'aire du triangle MOM' est constante en démontrant que le produit $OM \cdot OM'$ est constant (*voir* n° 5). Dans le même ordre d'idées, le fait que P est milieu de MM' est immédiat.

4. Les valeurs des angles $\beta M\gamma$ et $\beta A\gamma$ étant $\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$ et $\frac{A}{2}$, les deux cercles $\beta M\gamma$ et $\beta A\gamma$ ont leurs tangentes en β ou en γ rectangulaires; le cercle $A\beta\gamma$ est donc orthogonal au cercle $M\beta M'\gamma$. Le centre du cercle $A\beta\gamma$ est dès lors le point ω .

Autrement : la droite $A\omega$ étant bissectrice de l'angle BAC , en même temps que les droites $A\beta$ et $A\gamma$ sont bissectrices des angles KAB et KAC , si l'on désigne par $2x$ et $2y$ les angles KAB et KAC , on a

$$BA\omega = x + y, \quad \text{ou} \quad \beta A\omega = y = \gamma AK,$$

de sorte que $A\omega$ et AK sont également inclinées sur $A\beta$ et $A\gamma$. Le point ω étant d'ailleurs sur la perpendiculaire menée à la droite $\beta\gamma$ en son milieu O , ce point est le centre du cercle $A\beta\gamma$. Donc ...

Un même cercle $M\beta M'\gamma$ donne deux positions du point A sur la droite ZZ' , avec un même cercle $A\beta\gamma$.

4 bis. Le cercle $A\beta\gamma$ étant orthogonal au cercle $M\beta M'\gamma$, si AA_1 est le diamètre de ce cercle issu de A , les points A et A_1 sont conjugués par rapport à M et M' ; comme A est un centre de similitude des deux cercles (M) et (M') , A_1 est le second centre de similitude, et le cercle $A\beta\gamma$, de diamètre AA_1 , est coradical à ces deux cercles. On peut remarquer que les droites βA et γA sont bissectrices des angles $M\beta B'$ et $M\gamma C'$.

Autrement : le centre $A\beta\gamma$ et les cercles (M) et (M') , qui ont leurs centres en ligne droite, auront deux à deux même axe radical s'il existe à distance finie un point ayant même puissance par rapport à chacun d'eux ; or, les puissances du point S par rapport à ces cercles sont $\overline{SD}^2$, $\overline{SD'}^2$, $\overline{S\beta} \times \overline{S\gamma}$, et l'on a

$$\overline{SD}^2 = \overline{S\beta} \times \overline{S\gamma}$$

dans le cercle de centre O et de rayon

$$OD = O\beta = O\gamma.$$

L'axe radical commun se confond avec la droite SEF , en appelant E et F les points de contact des droites AB et AC avec les cercles (β) et (γ) . Les droites $P\beta$ et $P\gamma$ passent en effet aux points E et F respectivement, comme on peut le voir au moyen des égalités d'angles

$$\widehat{MP\beta} = \widehat{MP\gamma} = \widehat{M'};$$

comme P est milieu de MM' , E est milieu du segment compris entre les points de contact des cercles (M) et (M') avec AB ou AC .

5. La similitude des triangles $MO\beta$ et $\beta OM'$ donne

$$\frac{OM}{O\beta} = \frac{O\beta}{OM'}, \quad \text{ou} \quad \frac{OM}{OD} = \frac{OD'}{OM'},$$

de sorte que MD' et $M'D$ sont parallèles. On a donc

$$(1) \quad \frac{OM}{DO} = \frac{D'O}{OM'} = \frac{MD'}{M'D} = \frac{AD'}{AD}.$$

On a encore

$$\frac{AD}{\omega O} = \frac{DM}{OM} = 1 + \frac{DO}{OM} = 1 + \frac{AD}{AD'},$$

ou

$$(2) \quad \frac{1}{\omega O} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AD'}.$$

Autrement : si H est l'orthocentre du triangle $A\beta\gamma$, on a $AH = 2\omega O$, et H doit être conjugué de A par rapport à D et D'; or on a

$$KA.KH = K\beta.K\gamma = \overline{KD'}^2.$$