

FARID BOULAD

Sur la résolution graphique des équations linéaires

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 304-311

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__304_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[X4bγ]

SUR LA RÉOLUTION GRAPHIQUE DES EQUATIONS LINÉAIRES ;

PAR M. FARID BOULAD,

Ingénieur au Service des ponts des chemins de fer
de l'État égyptien.

Dans son cours de *Calcul graphique et Nomo-
graphie* qu'il a fait tout récemment à la Sorbonne ⁽¹⁾,

(1) Ce Cours va être publié incessamment dans l'*Encyclopédie
scientifique*. Doiņ, éditeur.

M. d'Ocagne a exposé les méthodes de résolution graphique des équations linéaires de MM. Massau et Van den Berg, sous une forme qui nous a conduit à trouver les nouveaux procédés suivants qui ne sont pas moins simples.

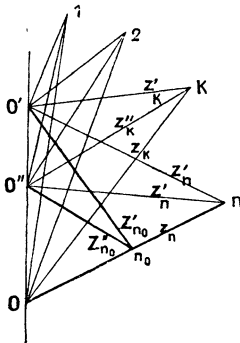
1. Nous donnerons d'abord deux nouvelles solutions graphiques du problème suivant :

a. Étant donnés deux systèmes de valeurs des inconnues satisfaisant à $(n - 1)$ de n équations linéaires à n inconnues, déterminer graphiquement les valeurs des inconnues de ces n équations.

La solution de ce problème permet de résoudre les équations linéaires en suivant la marche adoptée par M. d'Ocagne dans son cours de *Calcul graphique*.

Première solution. — Considérons les trois faisceaux de droites qu'on obtient en joignant un système de n points 1, 2, 3, ..., n (fig. 1) à chacun des trois

Fig. 1.



pôles O, O', O'' pris sur une même ligne de rappel (nom que M. d'Ocagne a donné dans son *Cours* à toute

parallèle à $O\gamma$). Désignons par $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ les coefficients angulaires des rayons polaires $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ du premier faisceau et par $z'_1, z'_2, z'_3, \dots, z'_n$ et $z''_1, z''_2, z''_3, \dots, z''_n$ ceux des rayons polaires des deux autres faisceaux de pôles O' et O'' .

Donnons-nous un système de n équations linéaires

$$(1) \quad \begin{cases} a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n = 0, \\ \dots\dots\dots = 0, \\ r_0 + r_1 z_1 + r_2 z_2 + \dots + r_n z_n = 0. \\ s_0 + s_1 z_1 + s_2 z_2 + \dots + s_n z_n = 0. \end{cases}$$

Démontrons la proposition suivante :

b. Si chacun des deux systèmes de coefficients angulaires $z'_1, z'_2, z'_3, \dots, z'_n$ et $z''_1, z''_2, z''_3, \dots, z''_n$ relatifs aux pôles O' et O'' satisfait à $(n-1)$ de ces n équations, aux $(n-1)$ premières par exemple, le système des coefficients $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ relatif au pôle O satisfait aussi à ces $(n-1)$ équations, quelle que soit la position de ce dernier pôle sur la verticale des deux pôles arbitraires O' et O'' .

En effet, posons $\frac{O''O}{O'O''} = \alpha$; les trois rayons polaires $Ok, O'k', O''k''$ de coefficients angulaires z_k, z'_k, z''_k donnent

$$\frac{z_k - z'_k}{z''_k - z'_k} = \frac{O''O}{O'O''} = \alpha$$

ou bien

$$(2) \quad z_k = (1 + \alpha) z''_k - \alpha z'_k.$$

Pour démontrer que le système de coefficients angulaires $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ est une solution des $(n-1)$ premières équations (1), il suffit de le prouver pour l'une quelconque de ces $(n-1)$ équations, pour la première par exemple,

Or, nous avons par hypothèse les deux équations :

$$a_0 + a_1 z'_1 + a_2 z'_2 + \dots + a_n z'_n = 0,$$

$$a_0 + a_1 z''_1 + a_2 z''_2 + \dots + a_n z''_n = 0.$$

En multipliant la première par $(-\alpha)$ et la deuxième par $(1 + \alpha)$ et en additionnant, on trouve, en vertu de la relation (2), que le système de valeurs $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ est une solution de la première des n équations (1), et de même pour les $n - 2$ autres.

A présent, montrons comment on pourrait déterminer graphiquement la position du pôle du faisceau $(O.1.2.3\dots n)$ dont les coefficients angulaires forment la solution des n équations (1).

Pour cela, considérons les deux équations suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} s_0 + s_1 z'_1 + s_2 z'_2 + \dots + s_{n-1} z'_{n-1} + s_n z'_{n_0} = 0, \\ s_0 + s_1 z''_1 + s_2 z''_2 + \dots + s_{n-1} z''_{n-1} + s_n z''_{n_0} = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles z'_{n_0} et z''_{n_0} représentent les valeurs que prend l'inconnue z_n de la dernière équation du système (1) lorsqu'on y substitue aux autres inconnues $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n-1}$ chacun des deux systèmes de valeurs $z'_1, z'_2, \dots, z'_{n-1}$ et $z''_1, z''_2, \dots, z''_{n-1}$.

Supposons que par un procédé quelconque on ait obtenu les deux valeurs z'_{n_0} et z''_{n_0} . On pourrait appliquer à cet effet la méthode donnée par M. d'Ocagne dans son cours de *Calcul graphique* précité, laquelle consiste à construire avec les deux systèmes de valeurs $z'_1, z'_2, \dots, z'_{n-1}$ et $z''_1, z''_2, \dots, z''_{n-1}$ deux polygones sur le schéma de la deuxième équation du système (1) et à prendre, pour valeurs de z'_{n_0} et z''_{n_0} , les coefficients angulaires des derniers côtés de ces deux polygones.

Tirons les deux rayons polaires $O'n_0$ et $O''n_0$ de

coefficients angulaires z'_{n_0} et z''_{n_0} . Je dis que la droite nn_0 coupe la verticale $O''O'$ au pôle O relatif à la solution des n équations (1).

En effet, désignons par z_n le coefficient angulaire de cette droite et appliquons la relation (2) aux deux points n et n_0 , nous avons :

$$(4) \quad z_n = (1 + \alpha) z''_n - \alpha z'_n = (1 + \alpha) z''_{n_0} - \alpha z'_{n_0}.$$

En multipliant la première des deux équations (3) par $(- \alpha)$ et la deuxième par $(1 + \alpha)$, on trouve, en vertu des relations (2) et (4), que les coefficients $z_1, z_2, \dots, z_n$ des rayons polaires du faisceau $(O.1.2.3\dots n)$ satisfont à la dernière des n équations (1). Or, comme, d'après la proposition (b), ces coefficients satisfont aussi aux $(n - 1)$ premières de ces n équations, il en résulte qu'ils constituent la solution de ces n équations.

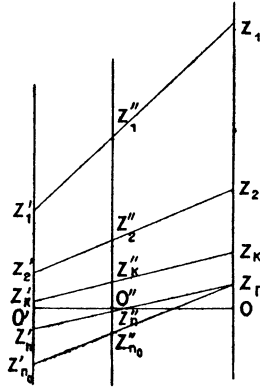
Deuxième solution. — Le principe de dualité, appliqué au moyen des coordonnées parallèles de M. d'Ocagne à la figure 1, donne la figure 2 qui fournit une autre solution du problème ci-dessus (a). Dans cette dernière figure, nous avons trois axes parallèles O, O', O'' . $OZ_1, OZ_2, OZ_3, \dots, OZ_n$ sont des segments représentatifs des valeurs $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$; de même avec les accents prime et seconde. Chacun des trois points Z_k, Z'_k, Z''_k correspondant à une même variable quelconque z_k est aligné.

L'axe O des segments représentatifs des valeurs $z_1, z_2, \dots, z_n$ satisfaisant aux n équations (1) est déterminé par le point de rencontre Z_n des deux alignements $Z'_n Z''_n$ et $Z'_{n_0} Z''_{n_0}$.

2. PROCÉDÉ DE RÉOLUTION NOMOGRAPHIQUE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES. — Le principe du double ali-

gnement concourant de M. d'Ocagne permet, en vue de la résolution des équations linéaires, d'effectuer d'une manière simple l'élimination des inconnues.

Fig. 2.



Soient

$$(e) \quad a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n = 0,$$

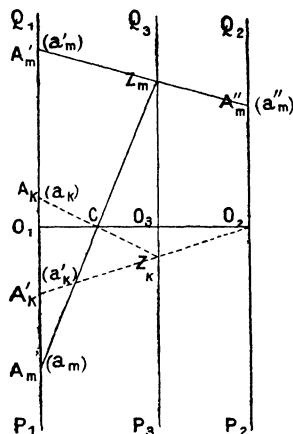
$$(e') \quad a'_0 + a'_1 z_1 + a'_2 z_2 + \dots + a'_n z_n = 0$$

deux équations linéaires. Désignons par $a''_0, a''_1, a''_2, \dots, a''_n$ les coefficients de l'équation résultant de l'élimination d'une inconnue quelconque z_k entre ces deux équations. Ces coefficients s'obtiennent, par simple lecture, au moyen du nomogramme à double alignement (*fig. 3*) constitué par les éléments suivants : deux échelles régulières confondues $P_1 Q_1$ relatives aux coefficients des équations (e) et (e') ; une échelle régulière $P_2 Q_2$ parallèle à $P_1 Q_1$ et relative aux coefficients de l'équation résultante (e'') ; un axe des pivots $P_3 Q_3$ parallèle à ces échelles et de position arbitraire; un point C de position variable sur la droite des origines $O_1 O_2$ des échelles $P_1 Q_1$ et $P_2 Q_2$.

Pour avoir les coefficients de l'équation (e'') résul-

tant de l'élimination d'une inconnue z_k entre deux équations quelconques (e) et (e') , on détermine d'abord la position du point C sur $O_1 O_2$ de la façon suivante :

Fig. 3.



On mène l'alignement $O_2 A'_k$, et, par le point de rencontre Z_k avec $P_3 Q_3$, on tire l'alignement $Z_k A_k$ qui coupe $O_1 O_2$ au point C.

A présent, pour avoir le point A''_m coté a''_m sur $P_2 Q_2$, on mène l'alignement $A_m C Z_m$, et, en le faisant pivoter autour de son point de rencontre Z_m avec $P_3 Q_3$, on l'amène dans la position $A'_m Z_m$ qui rencontre $P_2 Q_2$ au point A''_m .

Démonstration. — En posant $O_1 O_3 = \delta_1$, $O_2 O_3 = \delta_2$ et $\frac{CO_3}{O_1 C} = \gamma$, on a la condition suivante qui exprime que les deux alignements $A_m C$ et $A'_m A''_m$ concourent sur l'axe $P_3 Q_3$

$$a''_m = \gamma(\delta_1 + \delta_2) a_m - \delta_2 a'_m.$$

Cette relation est linéaire par rapport à a_m , a'_m et a''_m

et à un seul paramètre γ dont la valeur est donnée par les deux alignements concourants $O_2Z_kA'_k$ et A_kCZ_k correspondant à $\alpha''_k = 0$.

Remarque. — Il convient dans la pratique de considérer deux axes des pivots : l'un, dans l'intervalle O_1O_2 , et l'autre, en dehors de cet intervalle, de façon qu'avec l'un de ces deux axes le point C tombe toujours dans l'intervalle O_1O_2 .