Nouvelles annales de mathématiques

G. Musso

Sur les réduites des fractions continues symétriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 70-73

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__70_1>

SUR LES RÉDUITES DES FRACTIONS CONTINUES SYMÉTRIQUES;

PAR M. G. MUSSO, à Gênes.

A la page 453 de sa *Théorie des nombres,* Edouard Lucas a donné la proposition suivante :

Quand une fraction continue est symétrique, on peut calculer les deux dernières réduites, si l'on connaît les deux dernières réduites qui correspondent à la première moitié de son développement.

Il a distingué deux cas, selon que la fraction est symétrique paire, ou impaire, c'est-à-dire de l'un des types

$$(1)\qquad \frac{f_n}{g_n} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cdots + \cfrac{1}{q_\nu + \cfrac{1}{q_\nu + \cdots + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_0}}}}},$$

$$\frac{f_n}{g_n} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cdots + \cfrac{1}{q_\nu + \cfrac{1}{q_{\nu-1} + \cdots + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_0}}}}},$$

et a trouvé, dans le premier cas,

$$(1)\qquad \begin{cases} f_n = f_\nu^2 + f_{\nu-1}^2, \\ g_n = f_\nu g_\nu + f_{\nu-1} g_{\nu-1} = f_{n-1}, \\ g_{n-1} = g_\nu^2 + g_{\nu-1}^2, \end{cases}$$

et, dans le second,

$$(2)\qquad \begin{cases} f_n = 2 f_\nu f_{\nu-1}, \\ g_n = f_\nu g_{\nu-1} + f_{\nu-1} g_\nu = f_{n-1}, \\ g_{n-1} = 2 g_\nu g_{\nu-1}. \end{cases}$$

Cependant, tandis que le premier système de relation subsiste réellement, le second est erroné. Cela, on le pourrait vérifier sur des exemples numériques; mais nous le déduirons moyennant la considération d'une fraction continue plus générale que celle des types (I), laquelle nous accorde de trouver des relations analogues aux (1), qui comprennent les (1) mêmes en particulier, et nous fournissent les vraies valeurs de f_n, g_n, f_{n-1}, g_{n-1}, dans le cas qu'il s'agisse d'une fraction continue symétrique impaire.

Que l'on considère la fraction continue du type

$$(\mathrm{II})\qquad \frac{f_n}{g_n} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cdots + \cfrac{1}{q_\nu + \cfrac{1}{q_{\nu+1} + \cdots + \cfrac{1}{q_{\nu+r} + \cfrac{1}{q_\nu + \cdots + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_0}}}}}}}.$$

Nous avons d'abord par la propriété de l'inversion

$$\frac{f_n}{g_n} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cdots + \cfrac{1}{q_\nu + \cdots + \cfrac{1}{q_{\nu+r} + \cfrac{1}{\cfrac{f_\nu}{f_{\nu-1}}}}}},$$

et comme

$$\frac{f_{\nu+r}}{g_{\nu+r}} = \frac{q_{\nu+r} f_{\nu+r-1} + f_{\nu+r-2}}{q_{\nu+r} g_{\nu+r-1} + g_{\nu+r-2}},$$

il sera

$$\frac{f_n}{g_n} = \frac{\left(q_{\nu+r} + \dfrac{f_{\nu-1}}{f_\nu}\right) f_{\nu+r-1} + f_{\nu+r-2}}{\left(q_{\nu+r} + \dfrac{f_{\nu-1}}{f_\nu}\right) g_{\nu+r-1} + g_{\nu+r-2}}$$
$$= \frac{f_\nu f_{\nu+r} + f_{\nu-1} f_{\nu+r-1}}{f_\nu g_{\nu+r} + f_{\nu-1} g_{\nu+r-1}};$$

d'où résultent déterminées les valeurs de f_n et g_n.

Mais, par la propriété de l'inversion, nous avons encore

$$\frac{f_n}{g_n} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cdots + \cfrac{1}{q_\nu + \cfrac{1}{q_{\nu+r} + \cdots + \cfrac{1}{q_{\nu+1} + \cfrac{1}{q_\nu + \cdots + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_0}}}}}}};$$

par conséquent,

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{f_\nu f_{\nu+r} + f_{\nu-1} f_{\nu+r-1}}{g_\nu f_{\nu+r} + g_{\nu-1} f_{\nu+r-1}}.$$

Enfin, puisque

$$f_n g_{n-1} - f_{n-1} g_n = (-1)^{n-1} = (-1)^{2(\nu-1)+r},$$

nous pourrons, moyennant la substitution en celle-ci des valeurs de f_n, f_{n-1} et g_n, déterminer g_{n-1}. On trouve

$$g_{n-1} = g_\nu g_{\nu+r} + g_{\nu-1} g_{\nu+r-1}.$$

En conclusion, on voit que pour les fractions continues du type (II) subsiste le système suivant de relations

$$(3)\qquad \begin{cases} f_n = f_\nu f_{\nu+r} + f_{\nu-1} f_{\nu+r-1}, \\ f_{n-1} = g_\nu f_{\nu+r} + g_{\nu-1} f_{\nu+r-1}, \\ g_n = f_\nu g_{\nu+r} + f_{\nu-1} g_{\nu+r-1}, \\ g_{n-1} = g_\nu g_{\nu+r} + g_{\nu-1} g_{\nu+r-1}; \end{cases}$$

et nous pourrons par conséquent calculer les deux dernières réduites $\frac{f_{n-1}}{g_{n-1}}$, $\frac{f_n}{g_n}$, seulement quand l'on connaît les quatre suivantes

$$\frac{f_{\nu-1}}{g_{\nu-1}},\quad \frac{f_\nu}{g_\nu},\quad \frac{f_{\nu+r-1}}{g_{\nu+r-1}},\quad \frac{f_{\nu+r}}{g_{\nu+r}}.$$

Mais les relations (3) comprennent encore comme cas particulier celles du système (1) données par Lucas (il suffit de faire $r = 0$), et donnent enfin les vraies relations qui devraient former le système (2), en faisant $r = 1$. On trouve en effet, par cette dernière hypothèse,

$$(2')\qquad \begin{cases} f_n = f_\nu f_{\nu+1} + f_{\nu-1} f_\nu, \\ f_{n-1} = g_\nu f_{\nu+1} + g_{\nu-1} f_\nu = f_\nu g_{\nu+1} + f_{\nu-1} g_\nu = g_n, \\ g_{\nu-1} = g_\nu g_{\nu+1} + g_{\nu-1} g_\nu. \end{cases}$$

Nous pourrons conséquemment conclure : que la proposition énoncée par Lucas subsiste seulement pour les fractions continues symétriques paires, et que, s'il s'agit de fractions continues symétriques impaires, on peut calculer les deux dernières réduites, seulement si l'on connaît les trois suivantes

$$\frac{f_{\nu-1}}{g_{\nu-1}},\quad \frac{f_\nu}{g_\nu},\quad \frac{f_{\nu+1}}{g_{\nu+1}}.$$