NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉTIENNE POMEY

Formules de la statique d'un corps solide, en axes obliques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 449-462

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__449_0>

FORMULES DE LA STATIQUE D'UN CORPS SOLIDE, EN AXES OBLIQUES;

PAR M. ÉTIENNE POMEY,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Je me propose, dans cette Note d'établir les principales formules de la statique d'un corps solide invariable, par rapport à des axes Ox, Oy, Oz faisant entre eux les angles $yOz = \lambda$, $zOx = \mu$, $xOy = \nu$.

I. — MOMENT D'UN VECTEUR.

Je me propose de calculer les composantes A, B, C suivant les axes du moment G d'un vecteur AF par rapport à l'origine, les coordonnées du point A étant x, y, z, les composantes de AF suivant les axes étant X, Y, Z.

Première méthode. — Soient A_1, B_1, C_1 les projections orthogonales de G sur les axes. Puisque G est la somme géométrique de A, B, C, en projetant orthogonalement sur les axes, on a

$$(1)\qquad \begin{cases} A + B\cos\nu + C\cos\mu = A_1, \\ A\cos\nu + B + C\cos\lambda = B_1, \\ A\cos\mu + B\cos\lambda + C = C_1. \end{cases}$$

Or, A_1, B_1. C_1 sont les moments de AF par rapport aux axes. Je vais calculer C_1, en considérant le trièdre des coordonnées comme direct, et en regardant C_1 comme positif ou négatif, selon que le trièdre O. AFz est direct ou inverse. Cela étant, on sait que, si l'on prend sur Oz un segment positif OP égal à l'unité, la valeur algébrique de C_1 est le sextuple du volume du tétraèdre O. AFP, ce volume étant lui-même regardé comme positif ou négatif, selon que le trièdre O. AFP est direct ou inverse.

Or, en appelant V le volume d'un tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$, considéré comme positif ou négatif selon que le trièdre $M_1.M_2M_3M_4$ est direct ou inverse, x_i, y_i, z_i les coordonnées du sommet M_i, ω le sinus du trièdre $Oxyz$, on a

$$V = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}\sqrt{\omega}.$$

En appliquant cette formule au tétraèdre OAFP, on a

$$C_1 = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x+X & y+Y & z+Z & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\sqrt{\omega}$$

ou

$$(2) \qquad C_1 = (xY - yX)\sqrt{\omega}.$$

Posons, conformément à l'usage,

$$(3) \qquad L = yZ - zY, \qquad M = zX - xZ, \qquad N = xY - yX.$$

On en déduit

$$(4) \qquad A_1 = L\sqrt{\omega}, \qquad B_1 = M\sqrt{\omega}, \qquad C_1 = N\sqrt{\omega}.$$

Portant ces valeurs dans les équations (1) et résolvant celles-ci par rapport à A, B, C, on a finalement

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} A &= \frac{\begin{vmatrix} L & \cos\nu & \cos\mu \\ M & 1 & \cos\lambda \\ N & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\omega}}, \\ B &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & L & \cos\mu \\ \cos\nu & M & \cos\lambda \\ \cos\mu & N & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\omega}}, \\ C &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & L \\ \cos\nu & 1 & M \\ \cos\mu & \cos\lambda & N \end{vmatrix}}{\sqrt{\omega}}. \end{aligned}\right.$$

Remarque. — Ayant A, B, C, il est facile d'obtenir G et ses angles α, β, γ avec les axes. En effet, en multipliant géométriquement G par la relation $\overline{G} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$, on a

$$(6)\qquad G^2 = \overline{A}\,\overline{G} + \overline{B}\,\overline{G} + \overline{C}\,\overline{G} = AA_1 + BB_1 + CC_1.$$

En éliminant A, B, C entre les équations (1) et l'équation (6) et tenant compte des équations (4), on a

$$(7)\qquad G^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & L \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & M \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & N \\ L & M & N & 0 \end{vmatrix}$$

On peut observer que cette valeur de G^2 peut s'écrire

$$(8)\qquad G^2 = lL + mM + nN,$$

en appelant l, m, n les numérateurs des valeurs de A, B, C. Enfin on a α, β, γ par les formules

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} G\cos\alpha &= A + B\cos\nu + C\cos\mu, \\ G\cos\beta &= A\cos\nu + B + C\cos\lambda, \\ G\cos\gamma &= A\cos\mu + B\cos\lambda + C. \end{aligned}\right.$$

Deuxième méthode. — Pour obtenir C_1, on peut prendre le trièdre $Ox_1y_1z_1$ supplémentaire du trièdre $Oxyz$, et projeter parallèlement à Oz sur le plan Ox_1y_1 le double du triangle OAF, ou, ce qui revient au même, le double du triangle Oaf obtenu en projetant OAF sur le plan xOy parallèlement à Oz. Or, les points a et f ayant pour coordonnées x, y et $x + X$, $y + Y$, on a

$$2 \text{ surf. } Oaf = (xY - yX) \sin \nu$$

et par suite

$$C_1 = (xY - yX) \sin \nu \cos(Oz, Oz_1).$$

Mais on sait que les angles φ, χ, ψ d'une direction avec les axes satisfont à l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\varphi \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\chi \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\psi \\ \cos\varphi & \cos\chi & \cos\psi & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En appliquant cette formule à la direction Oz_1, pour laquelle on a $\varphi = \chi = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & 0 \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & 0 \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos(Oz, Oz_1) \\ 0 & 0 & \cos(Oz, Oz_1) & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

d'où

$$\sin \nu \cos(Oz, Oz_1) = \pm\sqrt{\omega},$$

et, par suite,

$$C_1 = \pm (xY - yX).\sqrt{\omega}.$$

Or, si l'on suppose AF parallèle à Oy dans le sens positif, A étant sur Ox, y est nul, x et y sont positifs, et C_1 est positif. Il faut donc prendre au second membre le signe $+$. On retombe ainsi sur la formule (2) et par suite sur tous les résultats de la première méthode.

Troisième méthode. — Sur la demi-droite Ox_1, perpendiculaire au plan yOz du même côté que Ox prenons un vecteur OH égal à H et multiplions géométriquement par H la relation

$$\overline{G} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C},$$

on obtient

$$\overline{G}.\overline{H} = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})\,\overline{H} = \overline{A}\,\overline{H} = A\,H\cos(Ox, Ox_1),$$

puisque H est perpendiculaire à B et C. Or, on a

$$(10) \qquad \overline{G}\,\overline{H} = G\,H\cos(G, H), \qquad G = 2\,\text{surf}\,OAF,$$

ou, puisque OG est perpendiculaire à OAF et que par suite, $H\cos(G, H)$ est la hauteur h du tétraèdre ayant pour base OAF et pour sommet H,

$$\overline{G}\,\overline{H} = 2\,\text{surf.}OAF.\,h = 6\,\text{vol.}OAFH,$$

d'où, en appelant a, b, c les coordonnées de H,

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{G}\,\overline{H} &= -\begin{vmatrix} x & y & z \\ x+X & y+Y & z+Z \\ a & b & c \end{vmatrix} \sqrt{\omega} = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ a & b & c \end{vmatrix} \sqrt{\omega} \\ &= -(aL + bM + cN)\sqrt{\omega}. \end{aligned} \right.$$

Or, la relation $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{H}$ donne, par projection orthogonale sur les trois axes,

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} a + b\cos\nu + c\cos\mu &= H\cos(Ox, Ox_1), \\ a\cos\nu + b + c\cos\lambda &= 0, \\ a\cos\mu + b\cos\lambda + c &= 0. \end{aligned} \right.$$

En éliminant a, b, c, $\overline{G}$, $\overline{H}$ entre les relations (10), (11), (12) on obtient la première des formules (5). On retrouve donc encore les résultats obtenus ci-dessus.

Quatrième méthode. — Le vecteur OG, moment du vecteur AF, est perpendiculaire à OA et AF; il a pour longueur le double de la surface du triangle OAF, enfin le trièdre O.AFG est direct. Les trois premières conditions s'expriment par

$$\overline{G}.\overline{OA} = 0, \qquad \overline{G}.\overline{AF} = 0, \qquad G = OA.AF\sin(OA, AF),$$

la dernière pouvant être remplacée par

$$\overline{G}^2 = \overline{OA}^2.\overline{AF}^2 - (\overline{OA}.\overline{AF})^2.$$

Or on a les équations géométriques

$$\overline{G} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}, \qquad \overline{OA} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}, \qquad \overline{AF} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}.$$

Les trois équations précédentes deviennent donc

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(\overline{x} + \overline{y} + \overline{z}) = 0,\\ &(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}) = 0,\\ &G^2 = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})^2(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})^2\\ &\qquad -[(\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})]^2. \end{aligned}\right.$$

Pour abréger les écritures, je pose

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} u &= x + y\cos\nu + z\cos\mu, & U &= X + Y\cos\nu + Z\cos\mu,\\ v &= x\cos\nu + y + z\cos\lambda, & V &= X\cos\nu + Y + Z\cos\lambda,\\ w &= x\cos\mu + y\cos\lambda + z, & W &= X\cos\mu + Y\cos\lambda + Z. \end{aligned}\right.$$

Alors, en observant que l'on a

$$\begin{aligned} &(\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})\\ &\quad = Ux + Vy + Wz = uX + vY + wX, \end{aligned}$$

les équations (13) peuvent s'écrire

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &Au + Bv + Cw = 0, \qquad AU + BV + CW = 0,\\ &G^2 = (ux + vy + wz)(UX + VY + WZ)\\ &\qquad -(Ux + Vy + Wz)(uZ + vY + wZ). \end{aligned}\right.$$

En posant, conformément à des notations déjà employées dans la première méthode,

$$(16)\qquad l = vW - wV, \qquad m = wU - uW, \qquad n = uV - vU,$$
$$(17)\qquad L = yZ - zY, \qquad M = zZ - xZ, \qquad N = xY - yX,$$

les équations (15) peuvent se mettre sous la forme

$$(18)\qquad \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n},$$

$$(19)\qquad G^2 = lL + mM + nN.$$

Or, si l'on pose encore

$$\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu$$

et $\varepsilon = \pm 1$, on déduit des équations (18)

$$(20)\qquad \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} = \varepsilon\sqrt{\frac{\sigma(A, B, C)}{\sigma(l, m, n)}}.$$

Mais on a

$$(21)\qquad \sigma(A, B, C) = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})^2 = G^2$$

et

$$\begin{aligned}\sigma(l, m, n) = {} & l(l + m\cos\nu + n\cos\mu) \\ & + m(l\cos\nu + m + n\cos\lambda) \\ & + n(l\cos\mu + m\cos\lambda + n),\end{aligned}$$

ou, d'après les formules (16),

$$\sigma(l, m, n) = \begin{vmatrix} l + m\cos\nu + n\cos\mu & l\cos\nu + m + n\cos\lambda & l\cos\mu + m\cos\lambda + n \\ u & v & w \\ U & V & W \end{vmatrix}$$

ou encore, d'après les formules (14),

$$\sigma(l, m, n) = \begin{vmatrix} l + m\cos\nu + n\cos\mu & l\cos\nu + m + n\cos\lambda & l\cos\mu + m\cos\lambda + n \\ x + y\cos\nu + n\cos\mu & x\cos\nu + y + z\cos\lambda & x\cos\mu + y\cos\lambda + z \\ X + Y\cos\nu + Z\cos\mu & X\cos\nu + Y + Z\cos\lambda & X\cos\mu + Y\cos\lambda + Z \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\sigma(l, m, n) = \begin{vmatrix} l & m & n \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

ou enfin, d'après les formules (17) et (19),

$$(22)\qquad \sigma(l, m, n) = G^2\omega.$$

Alors, d'après (21) et (22), les relations (20) deviennent

$$(23)\qquad A = \varepsilon\frac{l}{\sqrt{\omega}},\qquad B = \varepsilon\frac{m}{\sqrt{\omega}},\qquad C = \varepsilon\frac{m}{\sqrt{\omega}}.$$

Enfin, le trièdre O.AFG devant être direct, le déterminant des coordonnées des points A, F, G doit être positif. Or ce déterminant est

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x+X & y+Y & z+Z \\ A & C & C \end{vmatrix}$$

ou, d'après les équations (23) et (19), $\frac{\varepsilon G^2}{\sqrt{\omega}}$.

On a donc $\varepsilon = +1$, et finalement les formules (23) se réduisent aux formules (5), comme dans les méthodes précédentes.

Cinquième méthode. — En appelant (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les cosinus directeurs de Ox, Oy, Oz relativement à trois axes rectangulaires Ox', Oy', Oz' de même origine, les formules pour passer du système $Ox'y'z'$ au système $Oxyz$ sont

$$(24)\qquad \begin{cases} x' = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z', \\ y' = \beta x' + \beta' y' + \beta'' z', \\ z' = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z', \end{cases}$$

avec les conditions

$$(25)\quad \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1, \\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1, \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=\cos\lambda, \\ \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=\cos\mu, \\ \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=\cos\nu. \end{cases}$$

D'après les formule (24), les composantes A', B', C' de G suivant Ox', Oy', Oz' sont liées à A, B, C par les formules

$$\begin{aligned} A' &= \alpha A+\alpha' B+\alpha'' C, \\ B' &= \beta A+\beta' B+\beta'' C, \\ C' &= \gamma A+\gamma' B+\gamma'' C. \end{aligned}$$

On en tire

$$(27)\qquad A\times\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A' & \alpha' & \alpha'' \\ B' & \beta' & \beta'' \\ C' & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

Or, d'après les formules (25) et (26), on voit qu'on a

$$(28)\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = \omega.$$

D'autre part, dans le système rectangulaire $Ox'y'z'$, on a

$$A'=y'Z'-z'Y',\qquad B'=z'X'-x'Z',\qquad C'=x'Y'-y'X'.$$

Il en résulte, d'après les formules (24) appliquées à x', y', z', X', Y', Z', x, y, z, X, Y, Z,

$$A'=\begin{vmatrix} \beta x+\beta' y+\beta'' z & \beta X+\beta' Y+\beta'' Z \\ \gamma x+\gamma' y+\gamma'' z & \gamma X+\gamma' Y+\gamma'' Z \end{vmatrix},$$

$$B'=\ldots,\qquad C'=\ldots$$

ou

$$(29)\quad \begin{cases} A' = (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')L + (\gamma\beta'' - \beta\gamma'')M + (\beta\gamma' - \gamma\beta')N, \\ B' = (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')L + (\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'')M + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')N, \\ C' = (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')L + (\beta\alpha'' - \alpha\beta'')M + (\alpha\beta' - \beta\alpha')N. \end{cases}$$

Donc, en vertu de (28) et (29), la formule (27), ordonnée par rapport à L, M, N devient, en posant $\varepsilon = \pm 1$,

$$\begin{aligned} A\varepsilon\sqrt{\omega} = {} & L[(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')^2 + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')^2] \\ & + M[(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')(\gamma\beta'' - \beta\gamma'') + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') \\ & \qquad + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')(\beta\alpha'' - \alpha\beta'')] \\ & + N[(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')(\beta\gamma' - \gamma\beta') + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') \\ & \qquad + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')(\alpha\beta' - \beta\alpha')]. \end{aligned}$$

Le coefficient de L est $\sin^2\lambda$. Le coefficient de M peut s'écrire

$$\begin{aligned} & (\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')(\alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma) \\ & \quad - (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après les équations (25) et (26),

$$\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu.$$

Le coefficient de N est de même

$$\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu.$$

On en conclut finalement, après avoir déterminé ε par un cas particulier,

$$A\sqrt{\omega} = l, \qquad B\sqrt{\omega} = m, \qquad C\sqrt{\omega} = n,$$

comme précédemment.

II. — Réduction des forces.

On sait qu'un système quelconque de forces F_i appliquées en des points M_i d'un corps solide peut toujours être remplacé par une résultante de translation R appliquée en un point arbitraire O du solide et par un couple G. Nous prenons le point O pour origine des axes Ox, Oy, Oz, dont les angles sont λ, μ, ν; nous supposons M_i donné par ses coordonnées x_i, y_i, z_i et F_i donnée par ses composantes X_i, Y_i, Z_i suivant les axes.

Résultante de translation. — Soient X, Y, Z ses composantes suivant les axes. On sait qu'on a

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \ldots + \overline{F_i} + \ldots.$$

Il en résulte, en projetant sur chaque axe parallèlement au plan des deux autres, les relations

$$X = \Sigma X_i, \qquad Y = \Sigma Y_i, \qquad Z = \Sigma Z_i. \tag{30}$$

Axe G *du couple résultant.* — Soient A, B, C ses composantes suivant les axes. Si l'on appelle G_i l'axe du couple résultant du transport de F_i en O, on sait qu'on a

$$\overline{G} = \overline{G_1} + \overline{G_2} + \ldots + \overline{G_i} + \ldots.$$

D'autre part, on sait que l'axe G_i est le moment de F_i par rapport à O ; donc, en appelant A_i, B_i, C_i ses composantes suivant les axes, et projetant la relation précédente sur chaque axe parallèlement au plan des deux autres, on a

$$A = \Sigma A_i, \qquad B = \Sigma B_i, \qquad C = \Sigma C_i. \tag{31}$$

Je pose

$$L_i = y_i Z_i - z_i Y_i, \qquad M_i = z_i X_i - x_i Z_i, \qquad N_i = x_i Y_i - y_i X_i;$$

$$l_i = \begin{vmatrix} L_i & \cos\nu & \cos\mu \\ M_i & 1 & \cos\lambda \\ N_i & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

$$m_i = \begin{vmatrix} 1 & L_i & \cos\mu \\ \cos\nu & M_i & \cos\lambda \\ \cos\mu & N_i & 1 \end{vmatrix},$$

$$n_i = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & L_i \\ \cos\nu & 1 & M_i \\ \cos\mu & \cos\lambda & N_i \end{vmatrix},$$

$$\Sigma L_i = L, \qquad \Sigma M_i = M. \qquad \Sigma N_i = N.$$

Alors, d'après les formules (5) appliquées aux forces F_i, les formules (31) deviennent

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} A\sqrt{\omega} &= \begin{vmatrix} L & \cos\nu & \cos\lambda \\ M & 1 & \cos\lambda \\ N & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}, \\ B\sqrt{\omega} &= \begin{vmatrix} 1 & L & \cos\mu \\ \cos\nu & M & \cos\lambda \\ \cos\mu & N & 1 \end{vmatrix}, \\ C\sqrt{\omega} &= \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & L \\ \cos\nu & 1 & M \\ \cos\mu & \cos\lambda & N \end{vmatrix}, \end{aligned}\right.$$

Conditions d'équilibre. — On sait que les conditions d'équilibre sont $R = 0$, $G = 0$. Ces conditions exigent qu'on ait

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Les trois premières s'écrivent, en fonction des données,

$$\Sigma X_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma Z_i = 0.$$

Les trois dernières qui, d'après les formules (32), s'écrivent

$$\begin{vmatrix} L & \cos\nu & \cos\mu \\ M & 1 & \cos\lambda \\ N & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & L & \cos\mu \\ \cos\nu & M & \cos\lambda \\ \cos\mu & N & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & L \\ \cos\nu & 1 & M \\ \cos\mu & \cos\lambda & N \end{vmatrix} = 0,$$

sont des équations linéaires et homogènes en L, M, N dont le déterminant étant l'adjoint de ω est différent de zéro, comme égal à ω^2. Ces équations se réduisent donc à

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

Conditions de réductibilité à un couple. — On sait qu'il faut et il suffit que R soit nul, G ne l'étant pas, ce qui donne les conditions

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad L^2 + M^2 + N^2 > 0.$$

Conditions de réductibilité à une force unique. — On sait qu'il faut et il suffit que R soit différent de zéro et que G soit perpendiculaire à R. Ces conditions reviennent à

$$(33) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 > 0 \quad \text{et} \quad \overline{R}\,\overline{G} = 0.$$

Or, les équations géométriques

$$\overline{R} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}, \qquad \overline{G} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

donnent

$$\begin{aligned}\overline{R}\,\overline{G} &= (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})\overline{X} + (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})\overline{Y} + (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})\overline{Z} \\ &= (A + B\cos\nu + C\cos\mu)X + (A\cos\nu + B + C\cos\lambda)Y \\ &\qquad + (A\cos\mu + B\cos\lambda + C)Z\end{aligned}$$

ou, d'après les formules (32),

$$\overline{R}\,\overline{G} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}(L\omega X + M\omega Y + N\omega Z) = (LX + MY + NZ)\sqrt{\omega}.$$

La condition $\overline{R}\,\overline{G} = 0$ revient donc à

$$(34) \qquad LX + MY + NZ = 0.$$

Enfin, en supposant remplies les conditions précédentes (33) et (34), il reste à déterminer la force unique F équivalente au système. En appelant x, y, z les coordonnées de son point d'application, X', Y', Z' ses composantes suivant les axes, A', B', C' les composantes de l'axe du couple résultant du transport de cette force à l'origine, on a

$$X' = X, \qquad Y' = Y, \qquad Z' = Z,$$
$$A' = A, \qquad B' = B, \qquad C' = C.$$

Ce sont les équations d'équilibre du système donné et de la force égale et directement opposée à F. Donc, en posant

$$L' = yZ' - z'Y', \qquad M' = zX' - xZ', \qquad N' = xY' - yX',$$

les équations précédentes se réduisent, d'après le paragraphe relatif aux conditions d'équilibre, aux suivantes :

$$X' = X, \qquad Y = Y, \qquad Z' = Z,$$
$$L' = L, \qquad M' = M, \qquad N' = N.$$

Les trois premières donnent les composantes de la force F suivant les axes. En portant les valeurs de ces composantes dans les trois dernières équations, celles-ci deviennent

$$yZ - zY = L,$$
$$zX - xZ = M,$$
$$xY - yX = N.$$

Elles sont compatibles en x, y, z, à cause de la relation (34) qui est supposée satisfaite, et elles donnent le point d'application de F, ou, mieux encore, elles peuvent être regardées comme représentant la droite suivant laquelle agit F.