

ED. MAILLET

**Des conditions pour que l'échelle d'une suite récurrente soit irréductible**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 14 (1895), p. 152-157

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1895\\_3\\_14\\_\\_152\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__152_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

**DES CONDITIONS POUR QUE L'ÉCHELLE D'UNE SUITE  
RÉCURRENTÉ SOIT IRRÉDUCTIBLE;**

PAR M. ED. MAILLET,  
Ingénieur des Ponts et Chaussées (1).

---

I.

Dans son « Mémoire sur les suites récurrentes », M. M. d'Ocagne énonce le résultat suivant (2) :

*L'échelle d'une suite récurrente d'ordre  $p$  est ou n'est pas réductible, suivant que les équations  $\Phi(x) = 0$  et  $\Psi_{p-1}(x) = 0$  ont ou n'ont pas de racine commune.*

En reprenant les raisonnements de M. M. d'Ocagne, et les développant un peu, on peut dire aussi :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire pour que l'échelle d'une suite récurrente d'ordre  $p$  soit réductible à une d'ordre  $p - q$  est que les équations  $\Phi(x) = 0$  et  $\Psi_{p-1}(x) = 0$  aient  $q$  racines communes. Cette condition est suffisante quand les racines de l'équation  $\Phi(x) = 0$  sont distinctes.*

En effet, soit une suite récurrente satisfaisant à la loi

$$(a) \quad Y_n + D_1 Y_{n-1} + \dots + D_m Y_{n-m} = 0$$


---

(1) Le manuscrit de cet article était déjà déposé à la date du 10 décembre 1894, date à laquelle M. Perrin a fait une Communication à l'Académie des Sciences.

(2) *Journal de l'École Polytechnique*; 1894, p. 151. Pour les définitions des polynômes  $\Phi(x)$  et  $\Psi_{p-1}(x)$ , nous renvoyons à ce Mémoire.  $\Phi(x) = 0$  est l'équation génératrice de la suite.

d'équation génératrice

$$(b) \quad \psi(x) = x^m + D_1 x^{m-1} + \dots + D_m = 0.$$

On voit facilement que cette suite satisfait à la loi ayant pour équation génératrice

$$(c) \quad \psi(x)(x + \lambda_1) \dots (x + \lambda_q) = 0,$$

où  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  sont arbitraires.

*Une loi d'ordre  $m$  est dite irréductible pour une suite donnée satisfaisant à cette loi quand cette suite ne satisfait pas à une loi d'ordre plus petit.*

Que la loi (a) soit irréductible ou non, la suite satisfait à une infinité de lois d'ordre  $m + q$  ( $q > 0$ ), d'après (c), puisque  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  sont arbitraires.

Inversement, si une suite satisfait à deux lois de même ordre  $k$ ,

$$(d) \quad Y_n + B_1 Y_{n-1} + \dots + B_k Y_{n-k} = 0,$$

$$(e) \quad Y_n + C_1 Y_{n-1} + \dots + C_k Y_{n-k} = 0,$$

ces lois sont réductibles pour la suite considérée, car cette suite satisfait à la loi d'ordre  $\leq k - 1$  obtenue en retranchant, membre à membre, (d) et (e).

Enfin, toute équation génératrice pour la suite considérée est de la forme (c), si la loi (a) à laquelle elle satisfait est irréductible pour cette suite.

En effet, supposons que la suite satisfasse à la loi (d), avec  $k \geq m$ , puisque la loi (a) est irréductible pour la suite.

Si  $k = m$ , (d) et (a) sont identiques, et l'équation génératrice de (d) est  $\psi(x) = 0$ , c'est-à-dire de la forme (c).

Si  $k > m$ , prenons  $q = k - m$  : on peut choisir la

loi (e) de façon que la suite y satisfasse, que son équation génératrice soit de la forme (c) et que  $B_1 \neq C_1$ . En retranchant membre à membre (d) et (e), on voit que la suite satisfait à la loi

$$(f) \quad (B_1 - C_1)Y_{n-1} + \dots + (B_k - C_k)Y_{n-k} = 0$$

d'ordre  $k - 1$ . Si à cette loi correspond une équation génératrice de la forme (c), c'est-à-dire ici

$$\psi(x)(x + \lambda'_1) \dots (x + \lambda'_{q-1}) = 0,$$

on aura

$$\begin{aligned} x^k + B_1 x^{k-1} + \dots + B_k \\ = x^k + C_1 x^{k-1} + \dots + C_k + [(B_1 - C_1)x^{k-1} + \dots + (B_k - C_k)] \\ = \psi(x)[(x + \lambda_1) \dots (x + \lambda_q) + (B_1 - C_1)(x + \lambda'_1) \dots (x + \lambda'_{q-1})]. \end{aligned}$$

Le dernier membre, étant le produit de  $\psi(x)$  par un polynôme de degré  $k$  où le coefficient de  $x^k$  est l'unité, est de la forme (c).

On voit aussi que, si toute loi d'ordre  $k - 1$  a son équation génératrice de la forme (c), il en est de même de toute loi d'ordre  $k$ . Or toute loi d'ordre  $m$  a son équation génératrice de la forme (c), d'après ce qu'on a vu; il en est donc de même de toute loi d'ordre  $m + 1$ , par suite de toute loi d'ordre  $m + 2$ , etc.

Ces indications sommaires suffisent pour établir le résultat annoncé : si une suite donnée satisfait à une loi

$$(1) \quad Y_n + A_1 Y_{n-1} + \dots + A_p Y_{n-p} = 0$$

réductible, son équation génératrice  $\Phi(x) = 0$  est de la forme (c), où  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  sont déterminés, et l'on peut toujours choisir une loi d'ordre  $p - 1$

$$(2) \quad Y_n + a_1 Y_{n-1} + \dots + a_{p-1} Y_{n-p+1} = 0,$$

de façon que son équation génératrice soit  $\frac{\Phi(x)}{x - \lambda_j} = 0$ ,  $\lambda_j$  étant une quelconque des quantités  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ .

On en conclut avec les notations et les calculs de M. M. d'Ocagne (1),

$$\Psi_{p-1}(\lambda_j) = Y_{p-1} + Q_1(\lambda_j)Y_{p-2} + \dots + Q_{p-1}(\lambda_j)Y_0 = 0$$

avec

$$Q_i(x) = x^i + A_1x^{i-1} + \dots + A_i.$$

On en tire d'abord le criterium de réductibilité d'une loi pour une suite donnée, indiqué par M. M. d'Ocagne. Mais ce n'est pas tout.

On voit que  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  sont des racines communes à  $\Phi(x) = 0$  et  $\Psi_{p-1}(x) = 0$ , et, par suite, quand  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  sont distincts, ces deux équations auront  $q$  racines communes.

Quand certaines des quantités  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  deviennent égales, on pourra choisir une loi analogue à (1), de même ordre, à laquelle satisfait la suite considérée, et pour laquelle les racines  $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_q$  de  $\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = 0$  sont distinctes, mais différent d'aussi peu que l'on veut de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ , respectivement, puisque, dans (c), on peut choisir  $q$  quantités  $\lambda$  arbitrairement. Les quantités  $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_q$  sont alors des racines communes aux équations  $\Phi'(x) = 0$  et  $\Psi'_{p-1}(x) = 0$  correspondant respectivement ici à  $\Phi(x) = 0$  et  $\Psi_{q-1}(x) = 0$ . Ces équations conserveront toujours ces  $q$  racines communes quand  $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_q$  varient et tendent respectivement vers  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  tout en restant distinctes; à la limite,  $\Phi(x) = 0$  et  $\Psi_{p-1}(x) = 0$  auront  $q$  racines communes, et dès lors :

*Pour que l'échelle d'une suite récurrente d'ordre  $p$  soit réductible à une d'ordre  $p - q$  pour cette suite,*

---

(1)  $\lambda$  désignant ici ce que M. d'Ocagne appelle  $\mu$ .

il faut que les équations  $\Phi(x) = 0$  et  $\Psi_{p-1}(x) = 0$  aient  $q$  racines communes.

Quand ces deux équations ont une racine commune  $\lambda_j$ , on voit immédiatement, comme l'a indiqué M. M. d'Ocagne, qu'il existe pour la suite une loi analogue à (2) dont l'équation génératrice est  $\frac{\Phi(x)}{x - \lambda_j} = 0$ ; il en résulte que la loi (1) est réductible pour la suite.

Supposons que les deux équations  $\Phi(x) = 0$  et  $\Psi_{p-1}(x) = 0$  aient  $r$  racines communes  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  et que les  $p$  racines de  $\Phi(x) = 0$  soient distinctes. La suite satisfaisant à une loi d'équation génératrice

$$\frac{\Phi(x)}{x - \mu_j} = 0,$$

d'après ce qu'on a vu antérieurement,  $\frac{\Phi(x)}{x - \mu_j}$  est divisible par  $\psi(x)$ .  $\Phi(x)$  est alors divisible par  $\psi(x)(x - \mu_j)$ , quel que soit  $j$ , par suite par

$$\psi(x)(x - \mu_1), \quad \psi(x)(x - \mu_2), \quad \dots \quad \psi(x)(x - \mu_r),$$

et par le plus petit commun multiple de ces quantités; puisque toutes les racines de  $\Phi(x) = 0$  sont distinctes, ce plus petit commun multiple sera

$$\psi(x)(x - \mu_1)(x - \mu_2) \dots (x - \mu_r);$$

il en résulte que la loi (1) est réductible pour la suite considérée à l'ordre  $p - r$ .

Elle ne pourrait d'ailleurs être réductible à un ordre moindre que si les deux équations

$$\Phi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \Psi_{p-1}(x) = 0$$

avaient plus de  $r$  racines communes. Donc :

*Quand l'équation génératrice d'une suite récurrente d'ordre  $p$ ,  $\Phi(x) = 0$ , n'a que des racines distinctes,*

*la condition nécessaire et suffisante pour que la loi correspondante soit réductible à l'ordre  $p - q$  est que les deux équations  $\Phi(x) = 0$  et  $\Psi_{p-1}(x) = 0$  aient exactement  $q$  racines communes.*

On obtient ainsi le théorème que nous avons annoncé au début. ( *A suivre.* )