NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. LEINEKUGEL

Solution géométrique de la question proposée au concours d'admission à l'École centrale en 1889

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 112-116

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__112_1>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1889;

PAR M. G. LEINEKUGEL.

On considère les paraboles (P) *qui passent par un point fixe* O *du plan et qui admettent comme directrice une droite* Δ *fixe :*

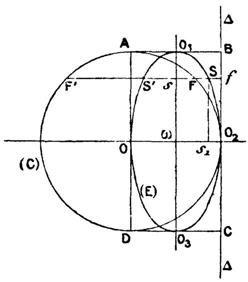
1° *Lieu des foyers et des sommets.*

2° *Par un point* M *du plan passent deux de ces paraboles; quelle est la région du plan où doit se trouver ce point pour que ces deux paraboles soient réelles et distinctes, confondues ou imaginaires.*

3° *Lieu* S *du point* M *pour lequel les paraboles qui y passent se coupent à angle droit à l'origine* O. *Quand le point* M *se trouve sur le lieu* S, *la droite qui joint les deux foyers des paraboles correspondantes passe par un point fixe.*

I. Le lieu des foyers de ces paraboles (P) est évidemment le cercle (C) de centre O et tangent à Δ. Quant au lieu des sommets, il se déduit du lieu des foyers en prenant sur une parallèle FF' à la perpendiculaire à la directrice menée de O les milieux S, S' des segments Ff, $F'f$. Ce lieu est par suite une conique, puisqu'il n'y a que deux points du lieu sur FF'.

Fig. 1.



On peut d'ailleurs le montrer de cette manière : on a sur la *fig.* 1

$$\overline{O_2 f}^2 = fF \,.\, fF';$$

or

$$fF = R - 2Ss, \qquad fF' = R + 2Ss;$$

d'où

$$4\overline{Ss}^2 + \overline{Ss_1}^2 = R^2,$$

car

$$O_2 f = S s_1,$$

qui représente l'ellipse (E) inscrite dans ABCD.

Cette ellipse (E) est d'ailleurs la projection sur le plan de la figure de l'intersection du cylindre de base (C) dont les génératrices de front sont inclinées sur le plan du tableau de $45°$, avec le plan de section droite passant par la ligne de terre Δ.

II. Pour construire les deux paraboles passant par O, M et admettant Δ pour directrice, nous décrivons le cercle (M) tangent à Δ et de centre M; les deux points communs à (O), (M) sont les deux foyers des deux paraboles cherchées.

Ces deux paraboles seront réelles et distinctes, imaginaires ou confondues, suivant que ces deux cercles auront deux points réels et distincts, imaginaires ou confondus.

Si nous cherchons le lieu des centres des cercles (M) tangents à (O) et à Δ, nous aurons évidemment la ligne séparant les portions du plan pour lesquelles les deux paraboles (P) correspondantes sont distinctes et réelles de celles où elles sont imaginaires.

Si nous considérons la droite Δ' parallèle à Δ et distante de celle-ci de la longueur R, rayon du cercle (C), on voit que l'on a

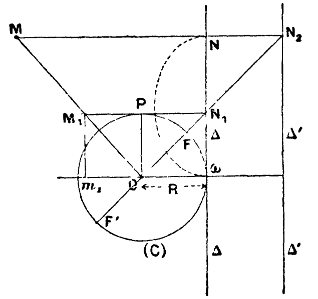
$$MO = MN,$$

pour un point M du lieu, N étant le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur Δ'. Le lieu de M est donc la parabole (Q) de foyer O et de directrice Δ'. Pour les points du plan de cette parabole (Q) contenant l'axe, deux paraboles (P) distinctes et réelles; pour les points sur la parabole (Q), deux paraboles confondues, et enfin dans l'autre région deux paraboles imaginaires.

III. Il résulte de la propriété connue de la tangente à la parabole que, si les tangentes en O sont rectangulaires, les deux foyers F, F′ des paraboles correspondantes sont les extrémités d'un diamètre de (O).

Le lieu des points M pour lesquels les deux paraboles (P) qui passent en O se coupent à angle droit,

Fig. 2.



s'obtiendra donc en cherchant le lieu des centres des cercles tangents à Δ et qui rencontrent O en deux points extrémités d'un même diamètre.

Il suffit, pour construire un point du lieu, de mener par O une droite FF′N, de prendre $N_1\omega = N_1N$ et d'élever en N_1 et en O des perpendiculaires à Δ et à FF′; leur point d'intersection M est un point du lieu. On remarque que (*fig.* 2)

$$OM = 2OM_1$$

(M_1 est le point de rencontre de OM avec la perpendiculaire élevée en N_1 à Δ). Or M_1 décrit une parabole, puisque, dans le triangle M_1ON_1, on a

$$\overline{OP}^2 = \overline{M_1m_1}^2 = 2M_1P\left(\frac{PN_1}{2}\right) = 2\left(\frac{R}{2}\right)Om_1;$$

d'où l'on déduit que M décrit une parabole S, homothétique à la précédente S_1, de sommet O et de directrice Δ'.