NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. ADER

Sur les congruences de droites et la courbure des surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 12 (1893), p. 484-489

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__484_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES CONGRUENCES DE DROITES ET LA COURBURE DES SURFACES;

PAR M. H. ADER,

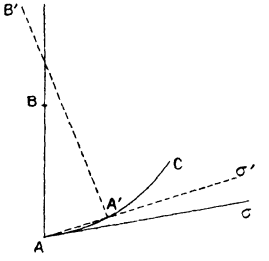
Élève-ingénieur des Ponts et Chaussées.

Si l'on considère une génératrice G d'une congruence de droites, on sait que toutes les surfaces passant par G et dont les génératrices appartiennent à la congruence sont tangentes en deux points de G et que parmi ces surfaces il n'y en a que deux qui sont développables. Ce résultat est, en particulier, démontré dans le *Traité de Géométrie descriptive* de M. Mannheim par des considérations fondées sur la théorie générale des déplacements infiniment petits d'un corps solide dans l'espace.

Proposons-nous d'abord d'en donner une démonstration directe.

Supposons que la droite G se déplace sans cesser de faire partie de la congruence; chacun de ses points décrira une surface trajectoire, qui, en général, ne sera pas tangente à G; il ne peut y avoir, en effet, plus de deux points sur G, tels que cette droite soit tangente à leur surface trajectoire, car, s'il y en avait davantage, toutes les surfaces appartenant à la congruence et passant par G seraient de raccordement tout le long de cette génératrice. Prenons donc deux points quelconques A et B dont les surfaces trajectoires S et T ne soient pas

Fig. 1.



tangentes à G. Pour définir une surface de la congruence, il suffira de donner sa trace sur S ou T. Je dis que, si l'on se donne le plan tangent à l'une des surfaces, à l'un des points A ou B, dont les surfaces trajectoires S et T ne sont pas tangentes à G, cela suffira pour déterminer le plan tangent en un point quelconque de la génératrice. Je vais démontrer pour cela que, si l'on considère sur S une directrice C tangente à la droite $A\sigma$, la surface correspondante est de raccordement avec celle qui a pour directrice la section de S par le plan $BA\sigma$.

Je considère la section par le plan $BA\sigma'$ voisin de $BA\sigma$. La surface qui a pour directrice cette section a deux gé-

nératrices communes AB, A'B', avec celle qui a pour directrice C. Si je suppose que $BA\sigma'$ se rapproche indéfiniment de $BA\sigma$, je vois qu'à la limite les deux surfaces ayant pour directrices la courbe C et la section $BA\sigma$ ont deux génératrices infiniment voisines communes, et se raccordent par suite le long de AB. Les plans tangents en A et B aux surfaces de la congruence se correspondent donc homographiquement, et aux plans doubles de ces deux faisceaux correspondent deux surfaces qui ont même plan tangent en A et B et sont, par suite, développables.

Soient F_1 et F_2 les points où G touche les arêtes de rebroussement de ces deux surfaces; ce sont les foyers relatifs à la génératrice G. Le lieu de ces foyers est formé de deux surfaces S_1 et S_2 (ou plutôt de deux nappes d'une même surface) qu'on appelle *surfaces focales de la congruence*. Il est évident que les arêtes de rebroussement A_1 et A_2 des deux surfaces développables font partie de S_1 et S_2 et que, par suite, la droite G qui est tangente aux deux courbes A_1 et A_2 est aussi tangente aux deux surfaces focales. Toutes les surfaces de la congruence passant par G admettent comme plan tangent en F_1 et F_2 les plans tangents en ces mêmes points à S_1 et S_2. C. Q. F. D.

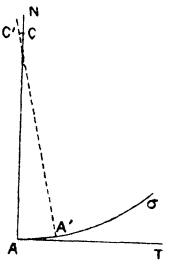
Considérons maintenant les points représentatifs des surfaces de la congruence passant par G. Le lieu de ces points est le segment décrit sur F_1F_2, et capable de l'angle que font les plans tangents communs à toutes les surfaces en F_1 et F_2.

Nous allons maintenant nous proposer de voir ce qui arrive, lorsque les droites de la congruence sont normales à une même surface S.

Les surfaces réglées formées de droites faisant partie

de la congruence sont alors appelées des *normalies*. Je remarque d'abord que si je considère une normalie ayant pour directrice une section normale NAT, la normale à

Fig. 2.

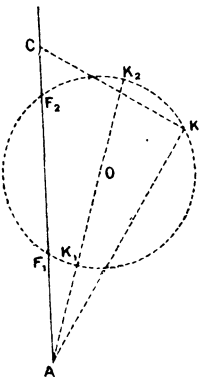


la surface au point A', voisin de A, se projette sur le plan NAT, suivant la normale à la courbe Aσ; si je coupe alors la normalie par le plan horizontal du point C, centre de courbure de la courbe Aσ, la courbe d'intersection a pour tangente la limite de CC' qui est une perpendiculaire au plan NAT. Le plan tangent à la normalie au centre de courbure C de la section NAT est donc perpendiculaire au plan NAT.

Si donc je considère une normalie ayant pour directrice une section normale quelconque, pour avoir le centre de courbure C de cette section, il suffira de mener par le point représentatif K de cette normalie une perpendiculaire KC à la droite AK. On voit alors par la seule inspection de la figure que, lorsque le point représentatif se déplace sur le cercle de centre O, il y a deux positions de ce point, K_1 et K_2, pour lesquelles le rayon de courbure est maximum et minimum, c'est-à-dire qu'il existe deux sections normales de courbure maxima et minima. On voit d'ailleurs immédiatement que ces deux sections font avec le plan tangent commun

à toutes les normalies en F_1 des angles complémentaires, c'est-à-dire qu'elles sont rectangulaires.

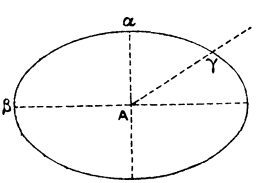
Fig. 3.



Je vais maintenant démontrer que les plans tangents communs en F_1 et F_2 à toutes les normalies sont précisément les deux sections rectangulaires de courbure maxima et minima; pour cela je coupe la surface par un plan infiniment voisin du plan tangent en A.

Les carrés des rayons $A\gamma$ de la courbe d'intersection

Fig. 4.



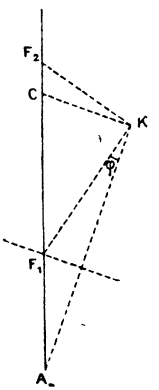
sont en raison inverse des rayons de courbure des sections normales correspondantes.

Aux sections de courbure maxima et minima $A\alpha$ et $A\beta$ correspondent donc un rayon minimum $A\alpha$ et un

rayon maximum $A\beta$. On en déduit que les normales à la surface en α et β rencontrent la normale en A, c'est-à-dire que les normalies correspondantes sont développables.

Cela étant, on peut alors établir immédiatement la

Fig. 5.



relation d'Euler. Il suffit pour cela de mener par le point F_1 une perpendiculaire à AK et d'écrire l'égalité entre les rapports anharmoniques que détermine sur cette droite et sur AF_1 le faisceau $K.AF_1CF_2$,

$$\frac{\dfrac{\operatorname{tang}\varphi}{\cot\varphi}}{1} = \frac{\dfrac{R_1}{R_2}}{\dfrac{R-R_1}{R_2-R}},$$

d'où l'on déduit, par une suite de transformations très simples,

$$\frac{\sin^2\varphi}{R_1} + \frac{\cos^2\varphi}{R_2} = \frac{1}{R}.$$