NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AUDIBERT

Concours d'admission à l'École centrale en 1893 (première session). Solution de la question de géométrie analytique

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 12 (1893), p. 456-459

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__456_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1895 (PREMIÈRE SESSION).

SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

PAR M. AUDIBERT.

Soit

$$x^2 - y^2 + 2mxy + \frac{c^2 - ab}{c} y - (a+b)x + ab = 0$$

un faisceau d'hyperboles équilatères coupant l'axe des abscisses aux points a, b et l'axe des ordonnées au point c.

I. Si λ est le coefficient angulaire de l'une des asymptotes d'une hyperbole du faisceau, cette courbe aura pour équation

$$(1) \quad x^2 - y^2 + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} xy + \frac{c^2 - ab}{c} y - (a+b)x + ab = 0,$$

celle de son asymptote sera

$$y = \lambda \left[x + \frac{\frac{c^2 - ab}{c}\lambda - (a+b)}{1 + \lambda^2} \right].$$

Cette dernière peut s'écrire

$$(2) \quad \lambda^3 x + \lambda^2 \left(\frac{c^2 - ab}{c} - y \right) + \lambda [x - (a+b)] - y = 0.$$

On voit que, par chaque point (x, y) donné du plan, on pourra mener trois asymptotes (dont deux peuvent être imaginaires) aux hyperboles du faisceau.

Si l'on impose la condition que deux des racines λ_1 et λ_2 de (2) aient entre elles la relation $\lambda_1\lambda_2 = -1$, le produit des trois racines étant égal à $\frac{y}{x}$, la troisième racine sera $-\frac{y}{x}$, et (2) devra être divisible par $\lambda x + y$.

Pour que cette division s'effectue, on trouve la condition

$$(3) \qquad 2(y^2 + x^2) - \frac{c^2 - ab}{c} y - (a + b)x = 0,$$

qui représente le lieu cherché.

C'est le cercle lieu des centres des hyperboles du faisceau, ce qu'il était facile de prévoir.

Ce cercle passe par l'origine et coupe en leurs milieux les trois côtés du triangle ABC.

Par un point M pris sur (3) on pourra mener les deux asymptotes rectangulaires de l'hyperbole qui a son centre en ce point. La troisième asymptote, de coefficient angulaire $\frac{y}{x}$, passant en M, rencontrera le cercle en un second point M′ qui sera le centre de l'hyperbole du faisceau dont les asymptotes ont pour coefficients $-\frac{y}{x}$ et $+\frac{x}{y}$.

II. Si μ est le coefficient de l'axe de (1), on aura $\lambda = \frac{1+\mu}{1-\mu}$ et l'équation de cette hyperbole en fonction de μ s'écrira

$$x^2 - y^2 + \frac{4\mu}{1-\mu^2} xy + \frac{c^2 - ab}{c} y - (a + b)x + ab = 0.$$

On déterminera les coordonnées de son centre et l'é-

quation de l'axe sera

$$2(1+\mu^2)(y-\mu x)=(1-\mu^2)\left[\frac{c^2-ab}{c}+(a+b)\mu\right].$$

En ordonnant par rapport à μ, on a

$$(4)\qquad \begin{cases} \mu^3[2x-(a+b)]-\mu^2\left(2y+\dfrac{c^2-ab}{c}\right) \\ \qquad\qquad +\mu(a+b+2x)-2y=0. \end{cases}$$

On voit que, par un point donné (x, y) du plan, on pourra mener trois axes, dont un toujours réel, aux hyperboles du faisceau.

Si l'on ajoute la condition que deux de ces axes aient des coefficients angulaires égaux et de signes contraires, l'équation

$$\mu^3[2x-(a+b)]+\mu^2\left(2y+\frac{c^2-ab}{c}\right) +\mu(a+b+2x)+2y=0$$

aura une racine commune avec (4).

La somme de ces deux polynômes égalée à zéro

$$\mu^3[2x-(a+b)]+\mu(a+b+2x)=0$$

aura la même racine commune avec (4).

En général, cette racine ne pouvant être nulle, il en résulte que le premier membre de l'équation

$$\mu^2[2x-(a+b)]+2x+a+b=0,$$

qui a ses deux racines égales et de signes contraires, doit diviser (4), d'où la condition

$$(a+b+2x)\frac{c^2-ab}{c}+4(a+b)y=0.$$

Le lieu est une droite.

La condition de réalité des deux racines, $\mu^2>0$, s'exprime par la formule

$$\frac{a+b+2x}{a+b-2x}>0.$$

Ce qui indique que les points de la droite (5) par où passent trois droites réelles satisfaisant aux conditions de l'énoncé sont compris entre les abscisses $-\frac{a+b}{2}$ et $+\frac{a+b}{2}$.

N. B. — M. P. Gris, élève du pensionnat de Notre-Dame du Sacré-Cœur, a aussi résolu la question.