Nouvelles annales de mathématiques

L. Maleyx

Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur définition

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 91-102

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__91_0>

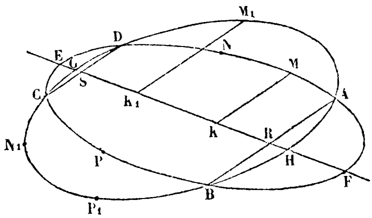
ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION [1];

PAR M. L. MALEYX.

IV. *Construire les points communs de deux coniques situées dans un même plan, ayant un diamètre commun* CONNU, *divisant en parties égales des cordes de direction donnée.*

Supposons d'abord deux coniques à centre ayant le diamètre commun EF; divisant dans l'une et l'autre en

Fig. 64.



parties égales les cordes parallèles à AB, la position du diamètre étant connue, ainsi que la direction de la corde (*fig.* 64).

Nous pouvons supposer, en outre, la première conique définie par trois points M, N, P, qui, d'après la propriété du diamètre, en font connaître trois autres,

---

(1) Voir t. X (1891), p. 37.

et la deuxième par trois autres points M_1, N_1, P_1. D'après le théorème établi au nº VI, Chapitre II, nous pouvons construire un cercle O passant par les points réels ou imaginaires E, F, où la première conique rencontre le diamètre commun, et de même un cercle O_1 passant par les points G, H, où la seconde rencontre le même diamètre.

Si A, B, C, D sont ces points inconnus, la question se ramène à déterminer les cordes communes AB, CD, ou, ce qui revient au même, les points R et S ou elles rencontrent EF.

Menons par les points M et M_1 les parallèles à AB, MK, M_1K_1, coupant EF en K et K_1; désignons par P et p les puissances des points R et K par rapport au cercle O, et par P_1 et p_1 les puissances des points R et K_1 par rapport au cercle O_1; nous aurons, d'après le théorème de Newton,

$$\frac{\overline{AR}^2}{P} = \frac{\overline{MK}^2}{p} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{AR}^2}{P_1} = \frac{\overline{M_1K_1}^2}{p_1};$$

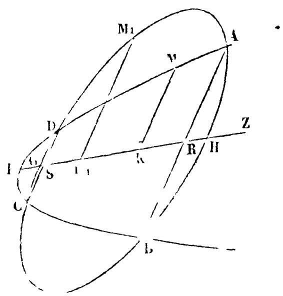
d'où, divisant membre à membre,

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\overline{M_1K_1}^2}{\overline{MK}^2} \times \frac{p}{p_1}.$$

Le rapport des puissances du point R, par rapport aux cercles O et O_1, est donc connu; il en résulte que le point R et le point S, pour lequel il en est de même, se trouvent sur un cercle ayant même axe radical avec les cercles O et O_1; ce cercle peut être construit, comme on l'a fait au nº VI, Chapitre II, et la question est résolue.

Considérons actuellement le cas où l'une des coniques est une parabole; supposons toujours connu le diamètre commun EZ de position et la direction des cordes, telles que AB, qu'il divise en parties égales (*fig.* 65). Supposons la parabole définie par deux points qui en déterminent deux autres, d'après la propriété du diamètre; il est facile de construire le point E où la courbe coupe le diamètre, car il est le centre de l'involution déterminée sur EZ par ses points de rencontre avec les couples de côtés opposés du quadrilatère inscrit, dont les sommets

Fig. 65.



se déduisent des données, son conjugué étant à l'infini. Les points G, H, où la seconde conique rencontre EZ, sont à l'intersection de cette droite et d'un cercle O_1, qu'on peut construire, si l'on connaît trois points de la courbe, comme dans le cas précédent.

Menons, par le point M de la parabole et par le point M_1 de la seconde conique, MK et M_1K_1 parallèles à la direction de AB et coupant EZ en K et K_1, et proposons-nous de trouver les points R, S où les cordes communes parallèles coupent EZ.

D'après la modification du théorème de Newton établie au n° I du présent Chapitre, quand la courbe est une parabole et quand l'une des sécantes est parallèle au diamètre, nous aurons

$$\frac{\overline{AR}^2}{ER} = \frac{\overline{MK}^2}{EK}$$

et, d'après le théorème de Newton lui-même,

$$\frac{\overline{AR}^2}{RH \times RG} = \frac{\overline{M_1K_1}^2}{K_1H \times K_1G} = \frac{\overline{M_1K_1}^2}{p_1},$$

si p_1 est la puissance du point K_1 par rapport au cercle O_1.

Divisant membre à membre,

$$\frac{RH \times RG}{ER} = \frac{\overline{MK}^2}{\overline{M_1K_1}^2} \times \frac{p_1}{EK} = a,$$

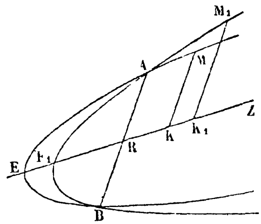
a étant une longueur qu'on peut construire.

D'après cela, le point R et le point S, sur lequel on peut répéter le même calcul, appartiennent au lieu des points dont la puissance par rapport au cercle O_1 et la distance à une droite quelconque passant par E (perpendiculaire à EZ, si l'on veut), comptée parallèlement à EZ, sont dans le rapport a; ce lieu, qu'on a déterminé d'après le théorème II, Chapitre II, n° I, est un cercle, qui peut être construit et dont l'intersection avec EZ donne la solution de la question.

Enfin les deux coniques peuvent être deux paraboles ayant un diamètre commun.

Supposons que ce diamètre soit EZ, divisant en parties égales les cordes parallèles à AB (*fig.* 66); admettons du reste que nous connaissions des éléments en nombre suffisant pour déterminer ces deux courbes; nous pouvons supposer connus les points E, E_1, où elles rencontrent EZ, et les ordonnées parallèles à AB d'un point de chacune d'elles, soient MK, M_1K_1. D'après ce que

Fig. 66.



nous avons vu au n° I du présent Chapitre, nous aurons les égalités

$$\frac{\overline{AR}^2}{ER} = \frac{\overline{MK}^2}{KE} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{AR}^2}{E_1R} = \frac{\overline{M_1K_1}^2}{E_1K_1}.$$

Divisant membre à membre,

$$\frac{E_1R}{ER} = \frac{\overline{MK}^2}{\overline{M_1K_1}^2} \times \frac{E_1K_1}{EK}.$$

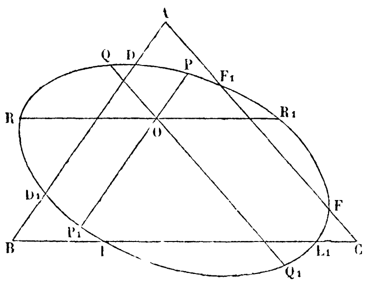
Le second membre est connu, on en déduit la position du point R, connaissant le rapport de ses distances aux points E et E_1; la seconde sécante commune passe à l'infini, la question est complètement résolue.

Remarque importante. — Cette question peut être utilisée pour déterminer exactement les points doubles virtuels de la projection sur un plan de l'intersection de deux quadriques.

V. Théorème de Carnot. — Si l'on considère une conique et un triangle situés dans un même plan, la conique rencontrant en deux points chaque côté du triangle, le produit des six segments déterminés sur chaque côté entre un sommet du triangle et ses points de rencontre avec la conique, ces segments étant comptés dans le sens du mouvement d'un point qui parcourt le périmètre du triangle sans rétrograder, est égal au produit des six segments comptés de la même manière en sens contraire.

Considérons la conique de la *fig.* 67 coupée par les côtés du triangle ABC aux couples des points D et D_1,

Fig. 67.



E et E_1, F et F_1; par un point O du plan, menons les transversales PP_1, QQ_1, RR_1 respectivement parallèles aux côtés AB, AC, BC du triangle.

D'après le théorème de Newton, on a les égalités

$$\frac{AD \times AD_1}{AF \times AF_1} = \frac{OP \times OP_1}{OQ \times OQ_1},$$

$$\frac{BE \times BE_1}{BD \times BD_1} = \frac{OR \times OR_1}{OP \times OP_1},$$

$$\frac{CF \times CF_1}{CE \times CE_1} = \frac{OQ \times OQ_1}{OR \times OR_1};$$

multipliant membre à membre,

$$\frac{AD \times AD_1 \times BE \times BE_1 \times CF \times CF_1}{AF \times AF_1 \times CE \times CE_1 \times BD \times BD_1} = 1,$$

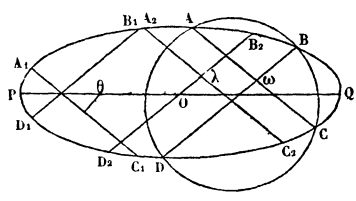
ce qui démontre le théorème énoncé.

Entre autres usages de ce théorème, on peut s'en servir, quand on connaît cinq points d'une conique, pour déterminer le second point de rencontre, avec cette courbe d'une droite quelconque passant par l'un des cinq points donnés.

Propriétés des coniques dont les points communs appartiennent à un cercle.

VI. Soient O (*fig.* 68) une conique; A, B, C, D quatre points communs à cette conique et à un cercle;

Fig. 68.



construisons un des couples de sécantes rectilignes, passant par ces quatre points, soit AC, BD se coupant en ω.

Si par un point quelconque, λ, du plan nous menons les parallèles A_2C_2, B_2D_2 aux droites AC et BD respectivement, les points communs A_2, B_2, C_2, D_2 de ces sécantes avec la conique appartiennent à un même cercle.

En effet, d'après le théorème de Newton, on a l'égalité

$$\frac{\lambda A_2 \times \lambda C_2}{\lambda B_2 \times \lambda D_2} = \frac{\omega A \times \omega C}{\omega B \times \omega D};$$

mais, d'après une propriété connue des sécantes au cercle, le second membre est égal à 1 : donc il en est de même du premier; dès lors, d'après la réciproque de cette propriété, qui est vraie et aussi connue, la proposition énoncée est évidente.

En second lieu, les deux sécantes considérées AC, BD sont également inclinées sur l'un des axes de la courbe, soit PQ.

Pour le démontrer traçons la sécante A_1C_1 parallèle à AC, et faisons passer par A_1 et C_1 un cercle dont le centre, θ, soit situé sur l'axe PQ. Ce cercle passera par les points D_1, B_1 respectivement, symétriques de A_1 et C_1, par rapport à PQ; la droite B_1D_1 sera symétrique de A_1C_1 par rapport à PQ ; ces deux droites se couperont sur PQ et seront également inclinées sur cette droite. Il suffit donc de montrer que B_1D_1 est parallèle à BD : or cela est évident; car, si nous menions par B_1 une parallèle à BD, le second point de rencontre de cette droite et de la conique appartiendrait au cercle θ, d'après la proposition précédente, et, si ce second point était distinct de D_1, c'est-à-dire si B_1D_1 n'était pas parallèle à BD, le cercle θ aurait avec la conique cinq points communs et se confondrait avec elle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il résulte de ces deux théorèmes :

1° *Que, si les points communs de deux coniques sont situés sur un cercle, les axes de ces coniques sont parallèles aux bissectrices des angles d'un de leurs systèmes de sécantes rectilignes communs, et, en conséquence, parallèles entre eux ;*

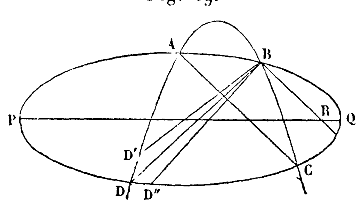
2° *Que, si un des systèmes de sécantes rectilignes* *communs de deux coniques est composé de deux droites également inclinées sur l'un des axes de l'une d'elles, les points communs des deux coniques appartiennent à un même cercle;* car les points communs de deux parallèles à ces droites menées par un point de l'axe avec la conique correspondante sont symétriques deux à deux par rapport à cet axe et, en conséquence, sur un même cercle;

3° *Que, si deux coniques ont leurs axes parallèles, leurs points communs sont situés sur un cercle, et qu'en conséquence leurs couples de sécantes communes sont composés de droites également inclinées sur les axes.*

Soient, en effet, deux coniques dont on suppose les axes parallèles, et se coupant aux points A, B, C, D (*fig.* 69).

Faisons passer un cercle par les points A, B, C, et menons par le point B, BR parallèle à AC; soit encore PQ l'un des axes et l'une des coniques, ou une parallèle

Fig. 69.

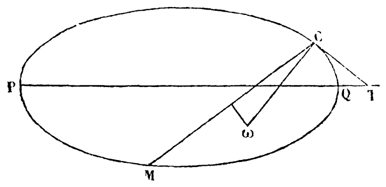


à cet axe. Si le cercle passant par A, B, C passe également par D, le théorème résulte des propositions précédentes; mais il ne peut en être autrement, car s'il rencontrait les deux coniques en des points différents, soient D' et D'', les trois droites BR, BD', BD'', issues du même point, seraient également inclinées sur une même droite PQ, ce qui est contradictoire avec un théorème connu : la proposition est donc établie.

VII. *Construction du cercle osculateur en un point d'une conique.* — Si trois des points communs d'un cercle variable et d'une conique fixe viennent se réunir en un seul, la limite du cercle variable porte le nom de *cercle osculateur* de la conique en ce point C (*fig.* 70).

Dans ce cas, les trois systèmes de sécantes rectilignes qui passent par les quatre points communs de la conique et du cercle se réduisent à un seul composé de la tangente à la conique au point d'osculation, C, et de la droite CM qui unit ce point au quatrième point commun qui en reste séparé. Dès lors, en construisant la tangente CT au point C de la conique, et la droite CM, de telle sorte que les droites CM et CT soient également inclinées sur l'un des axes de la courbe, soit PQ, puis

Fig. 70.



déterminant le point M, où CM rencontre la conique, le cercle osculateur sera défini par les conditions d'être tangent à CT en C et de passer par le point M.

VIII. *Propriétés de certaines sécantes communes au cercle et à l'hyperbole équilatère.* — On donne le nom d'*hyperbole équilatère* à celle dont les asymptotes sont rectangulaires ; il en résulte que les axes de cette courbe sont égaux, et qu'il en est de même de deux diamètres conjugués quelconques d'après le second des théorèmes d'Apollonius. Dès lors le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est un losange, et les asymptotes qui en sont les diagonales, n° XVII, Ch. I, sont bissectrices des angles de deux diamètres conjugués.

On donne le nom de *cordes supplémentaires* d'une conique à deux cordes unissant un point de la courbe aux extrémités d'un même diamètre. Il en résulte que deux cordes supplémentaires d'une conique sont toujours parallèles à deux diamètres conjugués, ceux qui unissent le centre au milieu de chacune de ces cordes, et de là que deux cordes supplémentaires d'une hyperbole équilatère sont également inclinées sur les asymptotes.

De ces définitions ou propositions, et de celles sur les sécantes à une conique et à un cercle on peut déduire la proposition suivante :

Théorème. — *Si l'une des sécantes communes à un cercle et à une hyperbole équilatère passe par le centre de l'hyperbole, la sécante associée passe par le centre du cercle.*

Soient A, B, C, D quatre points communs à l'hyperbole équilatère dont les asymptotes sont PQ et RS, et à un cercle (*fig.* 71); de plus, supposons que la sécante AD passe par le centre O de l'hyperbole.

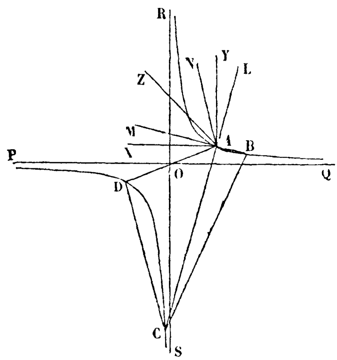
Menons AX, AY respectivement parallèles aux asymptotes PQ, RS; la bissectrice AZ de l'angle XAY est parallèle à un des axes de la courbe et fait avec AY un demi-angle droit. Prolongeons CA suivant AL, BA suivant AM, et menons AN parallèle à CD; AN étant parallèle à la corde CD supplémentaire de CA, AN et AL font des angles égaux avec AY, d'où NAY = YAL; AB et CD étant deux cordes communes de l'hyperbole et du cercle sont également inclinées sur les axes; il en résulte que AM, prolongement de BA, et AN, parallèle à

CD, font des angles égaux avec AZ, et ZAN = ZAM. Ajoutant membre à membre

$$ZAN + NAY = ZAM + YAL,$$

et le premier membre étant égal à un demi-droit, la somme des deux membres est égale à un angle droit;

Fig. 71.



donc MAL = CAB = 1 droit, et le cercle circonscrit au quadrilatère ABCD a son centre sur BC, ce qu'on voulait démontrer.

(*A suivre.*)