NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAXIMILIEN MARIE

Observations sur un mémoire de M. Henri Poincaré, publié en 1887, dans les « Acta Mathematica » de Stockholm, et relatif aux résidus des intégrales doubles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 77-82

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__77_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

OBSERVATIONS SUR UN MÉMOIRE DE M. HENRI POINCARÉ, PUBLIÉ EN 1887, DANS LES « ACTA MATHEMATICA » DE STOCKHOLM, ET RELATIF AUX RÉSIDUS DES INTÉGRALES DOUBLES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE.

Je n'ai eu que par hasard connaissance de ce Mémoire, où cependant je suis pris à partie. Il m'a été communiqué, le 1er février 1890, par un professeur de Mathématiques spéciales, à l'occasion de mes conférences.

J'ai lu ce Mémoire avec d'autant plus d'intérêt que j'avais moi-même traité la question près de quinze ans auparavant (*Journal de l'École Polytechnique*, 1874, et *Théorie des fonctions de variables imaginaires*, 1875 et 1876).

Je me trouve en accord à peu près complet avec M. Poincaré relativement à une partie de son Mémoire et en désaccord absolu relativement à l'autre partie.

Les deux Parties dans lesquelles je divise le Mémoire de M. Poincaré traitent de questions différentes.

Dans la première Partie, M. Poincaré se propose de déterminer les résidus d'une intégrale double de la forme

$$\iint \frac{P(X,Y)}{Q(X,Y)\,R(X,Y)}\,\partial X\,\partial Y,$$

où P, Q et R désignent des fonctions entières, et il donne, *sans démonstration,* pour représenter ces résidus, les deux intégrales simples

$$J = 2\pi\sqrt{-1}\int \frac{P(x, y)}{R(x, y)\dfrac{\partial Q}{\partial y}}\,\partial x$$

et

$$J' = 2\pi\sqrt{-1}\int -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)\dfrac{\partial R}{\partial y}}\,\partial x,$$

où x et y doivent successivement satisfaire aux équations

$$Q(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad R(x, y) = 0.$$

Je retrouve ces formules comme applications immédiates de la règle que j'avais donnée en 1874 pour former les résidus de la cubatrice $\int\int \partial X\,\partial Y$ d'une surface

$$F(X, Y, Z) = 0,$$

dans le parcours d'une courbe

$$f(X, Y) = 0$$

le long de laquelle Z serait infini. Mais ma démonstration ne suppose rien relativement aux fonctions P, Q, R, qui peuvent être irrationnelles, transcendantes, ou même définies implicitement. D'un autre côté, M. Poincaré ne dit pas entre quelles limites il faudrait prendre respectivement les intégrales J et J′ pour obtenir les résidus de l'intégrale double.

M. Poincaré recherche ensuite les périodes des intégrales J et J′. Ces périodes se rapportent soit aux contours fermés que présenteraient les lieux $Q = 0$, $R = 0$; soit aux points doubles des courbes $Q = 0$, $R = 0$ et $QR = 0$.

Rien à dire des premières.

Quant aux autres, M. Poincaré les exprime de la manière suivante :

$$4\pi^2 \frac{P(a,b)}{R(a,b)\sqrt{\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial a\,\partial b}\right)^2 - \frac{\partial^2 Q}{\partial a^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial b^2}}}$$

et

$$4\pi^2 \frac{P(a',b')}{Q(a',b')\sqrt{\left(\frac{\partial^2 R}{\partial a'\,\partial b'}\right)^2 - \frac{\partial^2 R}{\partial a'^2}\frac{\partial^2 R}{\partial b'^2}}}$$

seraient respectivement les périodes de J et de J′, relatives aux points doubles (a, b) de $Q = 0$ et (a', b') de $R = 0$; et les valeurs de

$$4\pi^2 \frac{P(a'', b'')}{\frac{\partial Q}{\partial a''}\frac{\partial R}{\partial b''} - \frac{\partial Q}{\partial b''}\frac{\partial R}{\partial a''}}$$

seraient les périodes communes à J et à J′, relatives aux points de rencontre (a'', b'') des deux courbes $Q = 0$ et $R = 0$.

M. Poincaré ne donne non plus aucune démonstration de ces formules; mais je les retrouve immédiatement par application de la règle que j'avais donnée en 1874 pour le calcul des résidus relatifs aux points doubles.

Sauf quelques points de détail, l'accord entre M. Poincaré et moi est donc à peu près complet jusqu'ici. Je signalerai cependant ce fait que M. Poincaré a omis les résidus qui se rapporteraient aux points multiples d'ordres supérieurs.

Mais M. Poincaré croit établir, dans la seconde Partie de son Mémoire, cette proposition entièrement neuve et qui aurait une portée incalculable : que *les périodes de l'intégrale double* $\int\int \frac{P}{Q.R}\,\partial X\,\partial Y$ *seraient exactement celles des deux intégrales* J *et* J′ *cumulées.*

Il est facile de démontrer, par un exemple, l'inexactitude de cette proposition.

Je prends l'intégrale double

$$\int\int \frac{f(X, Y)(M_1 X + N_1 Y) + f_1(X, Y)(MX + NY)}{(MX + NY)(M_1 X + N_1 Y)} \partial X \, \partial Y,$$

où $f(X, Y)$ et $f_1(X, Y)$ sont deux polynômes quelconques du second degré; cette intégrale double est la cubatrice de la surface

$$Z = \frac{f(X, Y)}{MX + NY} + \frac{f_1(X, Y)}{M_1 X + N_1 Y}$$

et elle est la somme des cubatrices des deux surfaces

$$Z = \frac{f(X, Y)}{MX + NY} \quad \text{et} \quad Z = \frac{f_1(X, Y)}{M_1 X + N_1 Y},$$

qui sont deux hyperboloïdes (sauf les cas particuliers).

Chacune des deux intégrales

$$\int\int \frac{f(X, Y)}{MX + NY} \partial X \, \partial Y \quad \text{et} \quad \int\int \frac{f_1(X, Y)}{M_1 X + N_1 Y} \partial X \, \partial Y$$

a donc une période et ces deux périodes appartiennent à leur somme.

Or les intégrales J et J' relatives aux lignes

$$MX + NY = 0 \quad \text{et} \quad M_1 X + N_1 Y = 0,$$

calculées par la formule de M. Poincaré, sont respectivement

$$J = 2\pi\sqrt{-1} \int \frac{f\left(X, -\frac{M}{N} X\right)}{N} \partial X$$

et

$$J' = 2\pi\sqrt{-1} \int \frac{f_1\left(X, -\frac{M_1}{N_1} X\right)}{N_1} \partial X$$

et elles n'admettent pas de périodes, puisqu'elles sont algébriques.

La fin du Mémoire de M. Poincaré passe mon entendement. J'y trouve, page 354 des *Acta* :

« Nous avons vu que l'intégrale double $\iint \frac{P\,\partial\xi\,\partial\eta}{Q-\alpha}$ est égale à l'intégrale simple abélienne $J = 2i\pi \int \frac{P\,\partial\xi}{\frac{\partial Q}{\partial\eta}}$ relative à la courbe algébrique $Q = \alpha$. »

Je ne comprends pas comment une intégrale double, dont la valeur numérique dépend d'un contour, pourrait être égale à une intégrale simple, dont la valeur numérique dépend seulement des valeurs extrêmes d'une seule variable.

Je sais bien, par ce qui précède dans son Mémoire, que M. Poincaré croit, à tort du reste, que les deux intégrales, dont il s'agit ici, ont les mêmes périodes. Mais quand même il en serait ainsi!

Deux intégrales, même de même espèce, c'est-à-dire toutes les deux simples ou toutes les deux doubles, seraient-elles donc égales par cela seulement qu'elles auraient les mêmes périodes?

Est-ce que les quadratrices d'une même courbe placée successivement de différentes manières dans le plan de deux axes fixes sont égales? Est-ce que les cubatrices d'une même surface, placée successivement de différentes manières, dans l'espace, par rapport à trois axes fixes, sont égales? Et cependant la permanence des périodes, dans les deux cas, a été démontrée par moi, en 1853, ainsi que le constate le Rapport de MM. Cauchy et Sturm, présenté à l'Académie en 1854.

Au reste, un exemple simple suffira pour montrer que l'hypothèse de M. Poincaré est inexacte.

Je prends l'intégrale double

$$I = \int\int \frac{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F}{y - \alpha} \partial x \, \partial y$$

qui est la cubatrice, transcendante, d'un hyperboloïde; l'intégrale simple correspondante, J, est alors

$$J = 2i\pi \int (Ax^2 + B\alpha x + C\alpha^2 + 2Dx + 2E\alpha + F) \, \partial x;$$

elle est algébrique : est-ce que

$$I = J?$$

Quant aux conséquences où ces prémisses mènent M. Poincaré, je ne les discuterai pas, parce que je n'en saisis pas toujours les énoncés et qu'une telle discussion m'entraînerait dans des détails qui ne sauraient avoir place ici.