NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAXIMILIEN MARIE

Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 459-472

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__459_1>

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève
et à l'École Monge (1).

24. Soit le lieu

$$y^3 - a^2 y + a^2 x = 0;$$

l'enveloppe réelle des conjuguées est MALOL'A'M' et l'enveloppe imaginaire NON' (*fig.* 31).

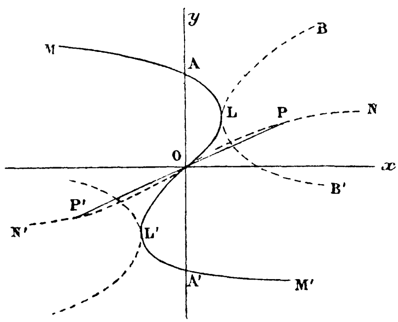
(1) Suite et fin. *Voir* t. X, p. 417.

Les deux seuls points critiques sont L et L',

$$y = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad x = \pm \frac{2a}{3\sqrt{3}}.$$

Supposons d'abord que le point origine $[x_0, y_0]$ se trouve sur une branche de demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc LAM et cherchons à quelles

Fig. 31.



conditions le point mobile $[x, y]$, fourni par l'équation $y =$ la série, pourrait passer sur la courbe réelle, ou sur la conjuguée $c = \infty$, près du point L, sans que le module de $[x - x_0]$ dépassât celui de $\left(\frac{2a}{3\sqrt{3}} - x_0\right)$. β devant être nul, il faudrait pour cela que α satisfît à la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < \left(\frac{2a}{3\sqrt{3}} - \alpha_0\right)^2 + \beta_0^2$$

ou

$$(\alpha - \alpha_0)^2 - \left(\frac{2a}{3\sqrt{3}} - \alpha_0\right)^2 < 0,$$

c'est-à-dire que α devrait rester compris entre les limites

$$2\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \frac{2a}{3\sqrt{3}}.$$

Si donc α_0 est moindre que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ et égal à $\frac{2a}{3\sqrt{3}}-h$, α pourra varier entre

$$\frac{2a}{3\sqrt{3}}-2h, \text{ limite inférieure,}$$

et

$$\frac{2a}{3\sqrt{3}}, \text{ limite supérieure,}$$

et le point $[x, y]$, fourni par la série, ne pourra pas passer sur la conjuguée $c=\infty$ près du point L.

Au contraire, si α_0 est plus grand que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ et égal à $\frac{2a}{3\sqrt{3}}+h$, α pourra varier entre

$$\frac{2a}{3\sqrt{3}}+2h, \text{ limite supérieure,}$$

et

$$\frac{2a}{3\sqrt{3}}, \text{ limite inférieure:}$$

le point $[x, y]$ ne pourra donc pas passer sur l'arc LAM.

Supposons le premier cas, c'est-à-dire $\alpha_0=\frac{2a}{3\sqrt{3}}-h$, le point $[x, y]$ ne pouvant pas passer sur l'arc BLB′, sans que la série devienne divergente, ne pourra pas, à plus forte raison, se rendre en L′: le point d'arrêt sera donc L.

Il en sera encore de même dans le second cas, ou α_0 aurait une valeur $\frac{2a}{3\sqrt{3}}+h$, mais on en donnera une autre raison qui est que le module de (x_0 — l'abscisse de L) sera alors moindre que celui de (x_0 — l'abcisse de L′); en effet, le premier sera

$$h^2+\beta_0^2,$$

et le second

$$\left(h+\frac{4a}{3\sqrt{3}}\right)^2+\beta_0^2.$$

Ainsi, quelque part que l'on plaçât le point origine, sur une demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc MAL, le point d'arrêt serait toujours L.

De même, le point d'arrêt serait L', si le point $[x_0, y_0]$ appartenait à une demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc M'A'L'.

Cherchons maintenant la courbe d'équilibre entre les deux points L et L'. L'équation caractéristique de cette courbe est

$$\mathrm{mod}\left(x_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right) = \mathrm{mod}\left(x_0 + \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right),$$

c'est-à-dire

$$\left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2 = \left(\alpha_0 + \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2$$

ou

$$\alpha_0 = 0.$$

Cette condition paraîtrait comporter deux interprétations : la première que le milieu de la corde réelle passant par le point $[x_0, y_0]$ se trouvât sur l'axe des y, et la seconde que le point $[x_0, y_0]$ appartînt à l'enveloppe imaginaire des conjuguées dont les coordonnées sont imaginaires sans parties réelles.

Mais l'inspection de la figure montre que, pour qu'une corde réelle d'une conjuguée eût son milieu sur l'axe des y, il faudrait que cette conjuguée touchât la courbe réelle en un point de l'une de ses branches AM ou A'M', et l'on a vu que le point d'arrêt est alors L ou L'.

La condition $\alpha = 0$ signifie donc que le point origine doive appartenir à l'enveloppe imaginaire des conjuguées ; et le fait s'explique alors tout naturellement, car il est facile de voir que, si le point $[x_0, y_0]$ se trouve sur l'enveloppe imaginaire, il pourra se rendre à l'origine sans sortir de la région de convergence ; or il lui resterait alors juste le même chemin pour parvenir en L ou en L'.

Cela posé, si le point $[x_0, y_0]$ appartient à une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc LOL', le point d'arrêt sera L ou L', selon qu'on aura

$$\frac{-2ax_0}{3\sqrt{3}} \lessgtr + \frac{2ax_0}{3\sqrt{3}},$$

c'est-à-dire suivant que x_0 sera positif ou negatif; ou encore selon que le point origine appartiendra à une demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OL ou en un point de l'arc OL'.

Enfin supposons que le point origine appartienne à une conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire : les conditions pour que le point d'arrêt soit en L ou en L' seront toujours

$$x_0 > 0 \quad \text{ou} \quad x_0 < 0;$$

mais il faut en avoir l'interprétation. Or, sur chacune des demi-conjuguées en question, les deux parties où x aura des signes contraires seront séparées par le point de contact avec l'enveloppe imaginaire; et le reste va de soi. En effet, les deux points P et P' où une même conjuguée touche l'enveloppe imaginaire ont respectivement pour coordonnées

$$x = \beta\sqrt{-1} \quad \text{avec} \quad y = \beta'\sqrt{-1}$$

et

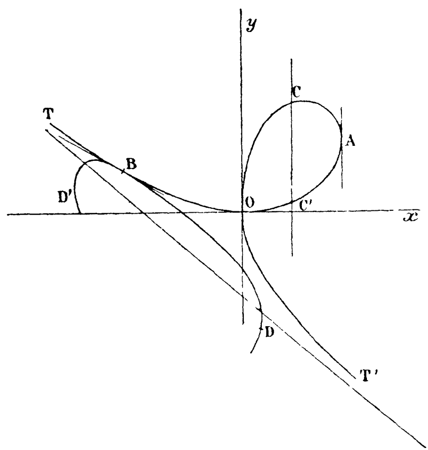
$$x = -\beta\sqrt{-1} \quad \text{avec} \quad y = -\beta'\sqrt{-1},$$

de sorte que POP' est précisément une des cordes réelles de la conjuguée; les autres lui sont parallèles, de sorte que la condition $x_0 > 0$ exprime que le point $[x_0, y_0]$ se trouve, sur la conjuguée où on l'a placé, à l'extrémité d'une corde réelle placée au-dessous de la corde qui joint les points de contact de cette conjuguée avec l'enveloppe et la condition $\alpha < 0$ exprime le fait contraire.

25. Considérons infini le lieu

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0.$$

Fig. 32.



Les points critiques sont : l'origine $[x = 0, y = 0]$, le point A (*fig.* 32)

$$\left[x = a\sqrt[3]{4},\ y = a\sqrt[3]{2}\right]$$

et deux points imaginaires ; le point D

$$\left[x = a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},\ y = a\sqrt[3]{2}\,\frac{-1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\right]$$

et le point D'

$$\left(x = \alpha\sqrt[3]{4}\,\frac{-1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},\ y = a^3\sqrt{2}\,\frac{-1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\right).$$

Ces deux derniers appartiennent à la conjuguée

$$C = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

tangente à la courbe réelle en B et à l'enveloppe imaginaire en D et D'.

Les asymptotes imaginaires du lieu étant

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}x + \frac{a}{2}(1 \mp \sqrt{3}\sqrt{-1}),$$

on construirait aisément celles de la conjuguée DBD'.

Nous placerons d'abord le point origine $[x_0, y_0]$ sur une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OT', parce que, pour s'approcher successivement des points O, A, D ou D', un point $[x, y]$ du lieu, qui partirait du point $[x_0, y_0]$, ainsi placé, devrait passer successivement sur toutes les conjuguées du lieu, le point de contact avec la courbe réelle de la branche qui le contiendrait décrivant cette courbe réelle dans le sens T'OCAC'OBT, et que, comme le prouvera la discussion, c'est précisément dans l'ordre O, A, D ou D' que se présenteront les points d'arrêt, lorsque le point originaire $[x_0, y_0]$ s'avancera sur les conjuguées du lieu, dans l'ordre qu'on vient d'indiquer pour le point $[x, y]$.

Le point $[x_0, y_0]$ appartenant, comme on l'a supposé, à une conjuguée du lieu, tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OT', le point $[x, y]$, représenté par l'équation $y =$ la série, pourra passer sur la branche réelle T'O, près du point O, si l'on peut trouver sur cet arc T'O un point $[x = \alpha, y = \alpha']$, tel que

$$\text{mod}(x_0 - \alpha) < \text{mod}(x_0 - 0).$$

ou que

$$(\alpha_0 - \alpha)^2 + \beta_0^2 < \alpha_0^2 + \beta_0^2.$$

c'est-à-dire

$$-2\alpha\alpha_0 + \alpha^2 < 0,$$

ou, comme α devrait être positif,

$$\alpha < 2\alpha_0,$$

ce qui exigera que α_0 soit positif, c'est-à-dire que le point $[x_0, y_0]$ ne soit pas trop éloigné du point de contact avec la branche T'O de la conjuguée à laquelle il appartiendrait.

Mais dans ce cas, de $\alpha_0 > 0$, le point $[x, y]$ fourni par la série ne pourra pas passer sur la branche de la conjuguée $C = \infty$ tangente de O à la courbe réelle; il ne pourra donc pas, à plus forte raison, se rendre près du point A ni près de l'un des points D ou D', et le point O sera le point d'arrêt de la convergence de la série.

Au contraire, dans la même hypothèse où la branche de conjuguée contenant le point $[x_0\ y]$ toucherait la courbe réelle en un point de l'arc T'O, si α_0 était négatif, le point $[x, y]$ fourni par la série ne pourrait plus passer sur l'arc T'O, mais pourrait passer la branche de la conjuguée $C = \infty$ tangente à la courbe réelle en O, parce que l'on pourrait trouver sur cette branche un point

$$(x = -\alpha,\ y = \alpha' \pm \beta' \sqrt{-1}),$$

tel que

$$\operatorname{mod}(x_0 + \alpha) < \operatorname{mod}(x_0 - 0,$$

ou que

$$(\alpha_0 + \alpha)^2 + \beta_0^2 < \alpha_0^2 + \beta_0^2,$$

c'est-à-dire

$$2\alpha\alpha_0 + \alpha^2 < 0$$

ou

$$\alpha < -2\alpha_0.$$

Mais alors le point $[x, y]$ fourni par la série ne pourrait pas parvenir au point A, parce que le module de $(x_0 - a\sqrt[3]{4})$ serait plus grand que celui de $(x_0 - O)$. En effet, α_0 étant négatif, le premier module

$$(\alpha_0 - a\sqrt[3]{4})^2 + \beta_0^2$$

serait plus grand que le second

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2.$$

Ainsi, dans ces différents cas, le point O sera et restera le point d'arrêt.

Supposons que le point origine $[x_0, y_0]$ vienne du plan sur une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OCA. Le point d'arrêt restera le point O tant que le point $[x_0, y_0]$ n'aura pas traversé la courbe d'équilibre entre O et A, courbe dont l'équation caractéristique est

$$\operatorname{mod}(x_0 - O) = \operatorname{mod}(x_0 - a\sqrt[3]{4})$$

ou

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 = (\alpha_0 - a\sqrt[3]{4})^2 + \beta_0^2,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_0 = \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Ainsi le point d'arrêt restera le point O tant que le milieu de la corde réelle contenant le point $[x_0, y_0]$ restera à gauche de la droite CC', équidistante de l'axe des y et de la tangente menée en A à la courbe réelle.

Le périmètre de la région de convergence passera à la fois en O et en A lorsque le milieu de la corde réelle contenant le point $[x_0, y_0]$ se trouvera sur le prolongement de C'C.

Enfin le point d'arrêt se trouvera en A lorsque le milieu de la corde réelle contenant le point $[x_0, y_0]$ se trouvera à droite de C'C.

A partir de ce moment, le périmètre de la région de convergence pivotera autour du point A jusqu'à ce que le point $[x_0, y_0]$ vienne traverser l'une ou l'autre des courbes d'équilibre entre A et D ou entre A et D'.

La première de ces deux courbes est caractérisée par la condition

$$\operatorname{mod}(x_0 - a\sqrt[3]{4}) = \operatorname{mod}\left(x_0 - a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\right),$$

qui se réduit à

$$-\alpha_0\sqrt[2]{3} = -\beta_0$$

et la seconde l'est par

$$-\alpha_0\sqrt[2]{3} = \beta_0.$$

On voit que les premiers membres resteraient moindres que les seconds si le point $[x_0, y_0]$ venait se placer sur la branche de la conjuguée $C = \infty$, tangente en A à la courbe réelle, parce que α_0 serait positif et β_0 nul; par conséquent, le point A serait encore à ce moment le point d'arrêt.

Supposons que le point $[x_0, y_0]$ vienne se placer sur une branche de conjuguées tangente à la courbe réelle en un point de l'arc AO : α_0 sera d'abord positif; quant à β_0, qui partira de zéro, il sera positif ou négatif, selon que le point $[x_0, y_0]$ se trouvera sur la branche de droite ou sur la branche de gauche de la conjuguée qui le contiendra, en sorte que, si le point $[x_0, y_0]$ se trouve sur la branche de droite de la conjuguée en question, ce sera le point D qui pourra devenir le point d'arrêt, et que si, au contraire, le point $[x_0, y_0]$ se trouve sur la branche de gauche de la même conjuguée, ce sera le point D' qui pourra succéder au point A, comme point d'arrêt.

Si l'on suppose le premier cas, c'est-à-dire $p_0 > 0$, le point D deviendra le point d'arrêt, au lieu du point A, dès que

$$- \alpha_0 \sqrt{3} \text{ deviendra plus grand que } - \beta_0 \; (\beta_0 \text{ étant positif});$$

dans le second cas, le point D' deviendra le point d'arrêt, au lieu du point A, dès que

$$- \alpha_0 \sqrt{3} \text{ deviendra plus grand que } \beta_0 \; (\beta_0 \text{ étant négatif}).$$

α_0 prenant d'abord la valeur de l'abscisse du point de contact de la branche de la conjuguée dont il s'agit avec l'arc AO et β_0 étant alors nul, ni l'une ni l'autre des deux conditions ne se rencontrera que sur une corde réelle de la conjuguée, assez éloignée de son point de contact avec l'arc AO et jusque-là ce sera le point A qui restera le point d'arrêt.

Au delà de cette corde réelle, ce sera le point D ou le point D' qui deviendra le point d'arrêt, suivant que le point $[x_0, y_0]$ se trouvera sur la branche de droite ou sur la branche de gauche de la conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc AO.

Si le point $[x_0, y_0]$ vient se placer sur la conjuguée à ordonnées réelles, tangente à la branche T'OA en O, la valeur de y_0 s'exprimera par

$$y_0 = \alpha'_0 \quad (\alpha'_0 \text{ étant négatif})$$

et les valeurs de x_0 seront fournies par l'équation

$$x_0^3 - 3a\alpha'_0 x + \alpha'^3_0 = 0;$$

la racine réelle de cette équation serait l'abscisse positive du point de rencontre de la branche OT′ avec la droite $y = \alpha'_0$, mais ce point de rencontre n'entre pas en question. Les deux autres racines seront

$$x_0 = \alpha_0 \pm \beta_0 \sqrt{-1};$$

leur somme $2\alpha_0$, ajoutée à l'abscisse du point situé sur la branche OT′ devra donner une somme nulle, par conséquent α_0 devra être négatif.

En conséquence, ni la condition

$$-\alpha_0 \sqrt{3} < -\beta_0$$

ne pourra être satisfaite par un point $[x_0, y_0]$ de la branche de droite de la conjuguée en question, et le point D aura définitivement succédé au point A comme point d'arrêt, même en supposant le point $[x_0, y_0]$ indéfiniment voisin du point O; ni la condition

$$-\alpha_0 \sqrt{3} < \beta_0$$

ne pourra être satisfaite par un point $[x_0, y_0]$ de la branche de gauche de la même conjuguée en question, et le point D′ aura définitivement succédé au point A comme point d'arrêt, même en supposant le point $[x_0, y_0]$ indéfiniment voisin du point O.

Supposons enfin que le point $[x_0, y_0]$ passe sur une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OT : la courbe d'équilibre entre les points D et D′ étant

$$\operatorname{mod}\left(x_0 - a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\right)$$
$$= \operatorname{mod}\left(x_0 - a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\right)$$

ou

$$\left(\alpha_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 + \left(\beta_0 - \frac{a\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$= \left(\alpha_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 + \left(\beta_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

c'est-à-dire $\beta_0 = 0$.

On voit que le périmètre de la région de convergence passera à la fois par les deux points D et D′ lorsque le point $[x_0, y_0]$ se trouvera être justement le point de contact, avec l'arc OBT, de la branche de conjuguée sur laquelle il aura passé, et que le point d'arrêt sera D ou D′, selon que β_0 sera positif ou négatif, c'est-à-dire selon que le point $[x_0, y_0]$ se trouvera sur la branche de droite ou sur la branche de gauche de la conjuguée sur laquelle il aura passé.

Sur la convergence du développement en série d'une fonction de deux variables indépendantes. — On trouvera dans le second Volume de ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires* ce qui concerne la convergence du développement en série, par la formule de Taylor, d'une fonction de deux variables indépendantes X et Y, définie par une équation

$$f(X, Y, Z) = 0.$$

Cette question, entièrement neuve à l'époque [1], est ramenée à la précédente par cette considération évi-

[1] Elle n'avait été traitée auparavant que par MM. Briot et Bouquet, dans leur *Théorie des fonctions doublement périodiques*.

dente que le développement

$$\begin{aligned}
Z = z + \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{(X - x)^2}{1.2} &+ \ldots \\
+ \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{(X - x)(Y - y)}{1.2} &+ \ldots \\
+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{(Y - y)^2}{1.2} &+ \ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{aligned}$$

ordonnée en groupes homogènes par rapport à $(X - x)$ et à $(Y - y)$, coïncide identiquement, pour chaque système de valeurs finales de X et de Y, avec le développement de la fonction Z de X seul, qui serait définie par les équations

$$f(X, Y, Z) = 0$$

et

$$\frac{Y - y}{X - x} = k,$$

k étant la valeur que prendrait le rapport $\frac{Y - y}{X - x}$ pour les valeurs finales qu'on aurait résolu d'avance de donner à X et à Y; de sorte que la question n'est autre que celle du développement de l'ordonnée Z de la projection, sur le plan des XZ, de la section de la surface

$$f(X, Y, Z) = 0$$

par le plan

$$\frac{Y - y}{X - x} = k.$$