Nouvelles annales de mathématiques

Maximilien Marie

Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 373-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__373_1>

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève et à l'École Monge (1).

Nous allons chercher la nature et la valeur de la période engendrée dans l'intervalle compris entre deux pareils plans limites.

L'équation la plus générale d'une surface ayant des asymptotes parallèles à l'axe des z est

$$\begin{aligned}&(ax+by+c)z^{m-1}\\&\quad+(dx^2+xy+fy^2+gx+hy+k)z^{m-2}+\ldots=0;\end{aligned}$$

(1) *Voir* t. X, p. 329.

si l'on voulait que l'axe des z fût lui-même une asymptote, il faudrait faire $c = 0$; et, si l'on voulait encore que l'axe des z fût une asymptote d'inflexion d'une section plane quelconque de la surface par un plan passant par l'axe des z, il faudrait faire $k = 0$.

L'équation de la surface deviendrait alors

$$(ax + by)z^{m-1} + (dx^2 + exy + fy^2 + gx + hy)z^{m-2} + \ldots = 0.$$

Les traces, sur le plan des xy, des asymptotes parallèles à l'axe des z seraient alors les divers points de la droite $ax + by = 0$.

Si l'on voulait que le lieu de ces traces fût l'axe des x, c'est-à-dire que les asymptotes parallèles à l'axe des z fussent toutes contenues dans le plan des zx, il faudrait faire $a = 0$.

Alors l'équation de la surface, en divisant par b, deviendrait

$$yz^{m-1} + (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y)z^{m-2} + \ldots = 0.$$

Si l'on coupait cette surface par un plan $x = l$, l'équation de la projection, en vraie grandeur, de la section sur le plan des yz, parallèlement aux x, serait

$$yz^{m-1} + [\gamma y^2 + (\beta l + \varepsilon)y + \alpha l^2 + \delta l]\, z^{m-2} + \ldots = 0;$$

la période cyclique, relative à l'axe des z de la quadratrice de cette courbe, est

$$\pm 2\pi\sqrt{-1}\,\sin yz\,(\alpha l^2 + \delta l),$$

qui s'annule pour $l_0 = 0$, et $l_1 = -\dfrac{\delta}{\alpha}$.

Pour obtenir le volume engendré par cette période cyclique, il faudrait calculer l'intégrale

$$\pm 2\pi\sqrt{-1}\,.\,\alpha \sin \mathrm{YZ} \int_{l_0}^{l_1} l(l - l_1)\,\mathrm{K}\,dl,$$

K désignant l'inverse du rapport d'une longueur, comptée sur l'axe des x, à sa projection sur une perpendiculaire au plan des yz.

Cette intégrale a pour valeur

$$\pm 2\pi\sqrt{-1}\,.\,\alpha\mathrm{K} \sin \mathrm{YZ} \left(\frac{l_1^3}{3} - \frac{l_1^3}{2}\right)$$

ou

$$\pm \sqrt{-1}\,.\,\alpha\mathrm{K} \sin \mathrm{YZ}\ \frac{4}{3}\pi\left(\frac{l_1}{2}\right)^3;$$

on voit que c'est le produit par $\sqrt{-1}\,\alpha\mathrm{K} \sin yz$ du volume d'une sphère.

Mais le volume cubé est en réalité celui d'un ellipsoïde dont l'un des diamètres, parallèle à l'axe des x, serait l_1, et dont les deux autres, situés dans le plan

$$x = \frac{l_1}{2},$$

auraient, l'un, une valeur nulle, et l'autre, une valeur infinie, de telle sorte, cependant, que le rectangle de ces deux diamètres fût $\frac{l_1^2}{4}$.

On peut, au reste, très aisément, obtenir l'équation même de cet ellipsoïde, en étendant aux surfaces algébriques le théorème qui nous a servi à fonder la théorie des périodes cycliques des quadratrices des courbes algébriques, c'est-à-dire cette proposition que, dans le voisinage de l'une de ses asymptotes, non inflexionnelle, une courbe de degré quelconque tend toujours à se confondre avec une hyperbole du second degré.

Pour les surfaces algébriques, le théorème s'énoncera ainsi :

La nappe d'une surface algébrique de degré quelconque qui se rapproche indéfiniment du plan lieu d'une série d'asymptotes parallèles et non inflexionnelles de la surface, cette nappe tend à se confondre avec un hyperboloïde du second degré; et celle des conjuguées de la surface, dont les cordes réelles sont parallèles aux mêmes asymptotes, comprend, outre d'autres nappes, une nappe fermée séparée des autres et qui tend à se confondre avec un ellipsoïde indéfiniment aplati et indéfiniment allongé le long du plan lieu des asymptotes considérées, c'est-à-dire un ellipsoïde dont le diamètre, conjugué du plan considéré, tend vers zéro, et dont les deux autres diamètres, contenus dans ce même plan, sont l'un fini et l'autre infini, ce dernier ayant d'ailleurs la direction des asymptotes en question.

En effet, reprenons l'équation de la surface sous la forme déjà employée

$$yz^{m-1} + (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y)\, z^{m-2} + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire supposons qu'on ait fait le choix d'axes défini précédemment (la direction de l'axe des y est restée quelconque, mais c'est indifférent, puisqu'on cherche ce que devient la surface dans la direction de $y = 0$). Si l'on coupe cette surface par un plan $x = l$, l'équation de la projection de la section sur le plan des yz est

$$yz^{m-1} + (\alpha l^2 + \delta l + \beta l y + \gamma l^2 + \varepsilon l)\, z^{m-2} + \ldots = 0;$$

dans cette équation, le produit de y devenu nul par z devenu infini tend vers $-(\alpha l^2 + \delta l)$; par conséquent les équations de la section considérée tendent à se réduire à

$$yz + \alpha l^2 + \delta l = 0 \qquad \text{avec} \qquad x = l;$$

l'équation de la surface, dans les environs de son plan asymptote, $y = 0$, tend donc à se réduire à

$$yz + \alpha x^2 + \delta x = 0,$$

ou

$$yz + \alpha\left(x + \frac{\delta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\delta^2}{4\alpha},$$

qui représente un hyperboloïde à une nappe.

Parmi les ellipsoïdes conjugués de cet hyperboloïde, il y en a un qui appartient à la surface proposée, comme étant une de ses conjuguées : c'est celui dont les cordes réelles ont une direction infiniment voisine de celle des asymptotes de la surface, contenues dans le plan $y = 0$. Ce serait cet ellipsoïde indéfiniment aplati dans le sens des y et indéfiniment allongé dans le sens de l'axe des z dont il faudrait calculer le volume, pour obtenir la période sphérique de la cubatrice de la surface; mais comme tous les ellipsoïdes conjugués de l'hyperboloïde

$$yz + \alpha\left(x + \frac{\delta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\delta^2}{4\alpha}$$

ont même volume, on choisira celui qu'on voudra d'entre eux.

24. On voit, par ce qui vient d'être dit, que la direction des plans sécants, parallèles entre eux, au moyen desquels on découpe la surface à cuber, étant choisie, et par conséquent les m asymptotes de la surface, parallèles à ces plans, étant définies, on trouvera, dans la cubatrice, m périodes sphériques.

Mais, si la direction des plans sécants venait à changer, les asymptotes de la surface, qu'il faudrait faire intervenir, changeraient aussi, et ce serait évidemment une question très intéressante de savoir si les périodes sphériques de la cubatrice changeraient aussi.

La question n'aurait pas lieu d'être posée au sujet de l'hyperboloïde à une nappe (ni de l'hyperboloïde à deux nappes, mais pour une autre raison), puisqu'on sait que la période unique de la cubatrice d'un hyperboloïde à une nappe est le produit par $\sqrt{-1}$ du volume enveloppé par l'un quelconque des ellipsoïdes, allongés ou non, de cet hyperboloïde.

Mais le fait, évident dans le cas des surfaces du second degré, ne l'est plus du tout dans le cas des surfaces de degrés supérieurs, et la preuve du fait, presque surabondante dans le premier cas, ne se trouverait pas, pour les autres, dans des considérations aussi simples.

Cependant le théorème est général.

Mais je n'en donnerai pas la démonstration en ce moment.

25. *Classification des intégrales doubles cubatrices des surfaces algébriques.* — La nature de la cubatrice d'une surface algébrique dépendra toujours essentiellement de celle de la quadratrice d'une section plane quelconque de cette surface.

Si l'on veut que la cubatrice n'ait aucune période ultrasphérique, il faudra que la quadratrice d'une quelconque de ses sections planes n'ait pas de périodes ultracycliques et, pour cela, si l'on veut que les sections planes de la surface dépendent encore du plus grand nombre possible de paramètres, sous la condition d'être quarrables par les fonctions circulaires ou logarithmiques, il faudra que ces sections présentent chacune $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, m désignant le degré de la surface; c'est-à-dire qu'il faudra que la surface elle-même contienne une courbe double du degré $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

26. Si l'on veut que la cubatrice de la surface soit algébrique, il faudra en outre que toutes les sections planes de cette surface soient quarrables algébriquement, c'est-à-dire que les m asymptotes d'une section plane quelconque coupent, chacune, cette section en trois points situés à l'infini, ou en $m-3$ points seulement, à distance finie.

27. Nous allons chercher l'expression analytique des conditions renfermées dans cette dernière condition.

Reprenons pour cela les équations établies au début du n° 23 :

Pour que la période cyclique relative à l'asymptote parallèle à $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$ de la quadratrice d'une section plane mobile parallèle à cette direction, restât toujours identiquement nulle, c'est-à-dire pour que la période sphérique correspondante restât constamment nulle, il faudrait qu'en éliminant x_0, par exemple entre les équations

$$x_0 \varphi'_\alpha + y_0 \varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1) = 0$$

et

$$x_0^2 \varphi''_{\alpha^2} + 2x_0 y_0 \varphi''_{\alpha\beta} + y_0^2 \varphi''_{\beta^2} + 2x_0 \psi'_\alpha + 2y_0 \psi'_\beta + 2\chi(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

on tombât sur une équation identique en y_0.

Ces conditions sont

$$(1)\qquad \varphi''_{\alpha^2} \varphi'^2_\beta - 2\varphi''_{\alpha\beta} \varphi'_\alpha \varphi'_\beta + \varphi''_{\beta^2} \varphi'^2_\alpha = 0.$$

$$(2)\qquad \psi''_{\alpha^2} \varphi'_\beta \psi(\alpha, \beta, 1) - \varphi''_{\alpha\beta} \varphi'_\alpha \psi(\alpha, \beta, 1) - \varphi'_\alpha \varphi'_\beta \psi'_\alpha + \varphi'_{\alpha^2} \psi'_\beta = 0$$

et

$$(3)\quad \varphi''_{\alpha^2}\psi^2(\alpha,\beta,1)-2\varphi'_\alpha\psi'_\alpha\psi(\alpha,\beta,1)+2\varphi'^2_\alpha\chi(\alpha,\beta,1)=0.$$

Si l'on veut que ces trois conditions soient satisfaites, quels que soient α et β, c'est-à-dire si l'on veut que toutes les périodes sphériques de la cubatrice disparaissent, ces trois conditions devront être considérées comme des équations simultanées, aux différentielles partielles, dont les fonctions φ, ψ et χ seraient les inconnues.

Il s'agit d'intégrer ces trois équations.

Occupons-nous d'abord de la première, qui ne contient que la fonction φ. Elle exprime que le cône lieu des parallèles aux asymptotes de la surface, menées par l'origine, est formé de m plans.

En effet, l'équation de ce cône est $\varphi(x,y,z)=0$, de sorte que $\varphi(x,y,1)=0$ est l'équation de la section de ce cône par le plan $z=1$. Or, pour exprimer que le lieu $\varphi(x,y,z)=0$ se compose de droites, il faudrait exprimer que $\frac{d^2y}{dx^2}$, en un quelconque de ses points, est nul et c'est précisément ce qu'exprime l'équation (1), car l'équation $\varphi(x,y,1)=0$ donne d'abord

$$\varphi'_y\frac{dy}{dx}+\varphi'_x=0,$$

et ensuite

$$\varphi'_y\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi''_{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\varphi''_{xy}\frac{dy}{dx}+\varphi''_{x^2}=0,$$

ou, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$,

$$\varphi'_y\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi''_{y^2}\frac{\varphi'^2_x}{\varphi'^2_y}-2\varphi''_{xy}\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}+\varphi''_{x^2}=0,$$

d'où l'on voit que la condition

$$\varphi''_{y^2}\varphi'^2_x - 2\varphi''_{xy}\varphi_x\varphi'_y + \varphi''_{x^2}\varphi'^2_y = 0$$

revient à $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Ainsi la fonction $\varphi(x, y, z)$ doit être le produit de m facteurs linéaires

$$\begin{array}{l}(A_1\, x + B_1\, y + C_1\, z),\\ (A_2\, x + B_2\, y + C_2\, z),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (A_m x + B_m y + C_m z).\end{array}$$

En second lieu, l'équation (2) exprime que toutes les asymptotes de la surface sont effectivement contenues dans m plans.

En effet, toutes les asymptotes infiniment peu inclinées les unes sur les autres doivent déjà être parallèles à un même des plans représentés par l'équation $\varphi(x, y, z) = 0$, car une asymptote variable de direction, d'une manière continue, ne pourrait changer de plan directeur qu'en prenant momentanément la direction de l'intersection de son ancien plan directeur avec l'un des $(m - 1)$ autres. De sorte que, si la droite

$$x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

lieu des traces sur le plan des xy des asymptotes parallèles à la direction $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$ ne change pas lorsque α et β varieront infiniment peu ou varieront dans de certaines limites, toutes les asymptotes correspondantes seront dans un même plan.

Or c'est précisément l'invariabilité de la droite

$$x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1) = 0$$

qu'exprime l'équation (2).

En effet, si l'on fait varier, dans l'équation de cette droite, α de $d\alpha$ et β de $d\beta$, elle devient

$$\begin{aligned}&x_0(\varphi'_\alpha + \varphi''_{\alpha^2}d\alpha + \varphi''_{\alpha\beta}d\beta)\\ &+ y_0(\varphi'_\beta + \varphi''_{\beta^2}d\beta + \varphi''_{\alpha\beta}d\alpha) + \psi(\alpha, \beta, 1) + \psi'_\alpha d\alpha + \psi'_\beta = 0,\end{aligned}$$

et si l'on veut exprimer que les deux droites coïncident, il faudra exprimer que les accroissements des coefficients sont proportionnels aux anciennes valeurs de ces coefficients, ce qui donnera

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2}d\alpha + \varphi''_{\alpha\beta}d\beta}{\varphi'_\alpha} = \frac{\varphi''_{\beta^2}d\beta + \varphi''_{\alpha\beta}d\alpha}{\varphi''_\beta} + \frac{\psi'_\alpha d\alpha + \psi'_\beta d\beta}{\psi(\alpha, \beta, 1)};$$

en divisant par $d\alpha$ et remplaçant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ par $-\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta}$, ces équations deviennent

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2} - \varphi''_{\alpha\beta}\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta}}{\varphi'_\alpha} = \frac{-\varphi''_{\beta^2}\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta} + \varphi''_{\alpha\beta}}{\varphi'_\beta} = \frac{\psi'_\alpha - \psi'_\beta\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta}}{\psi(\alpha, \beta, 1)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta - \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta}{\varphi'_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta} = \frac{-\varphi''_{\beta^2}\varphi'^2_\alpha + \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha\varphi'^2_\beta} = \frac{\psi'_\alpha\varphi'_\beta - \psi'_\beta\varphi'_\alpha}{\varphi'_\alpha\psi(\alpha, \beta, 1)}.$$

La première de ces conditions

$$\varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta - \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta = -\varphi''_{\beta^2}\varphi'^2_\alpha + \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi''_\beta$$

n'est autre que la condition (1) déjà traitée; quant à l'autre

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta - \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha\varphi'^2_\beta} = \frac{\psi'_\alpha\varphi'_\beta - \psi'_\beta\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta\psi(\alpha, \beta, 1)},$$

elle se réduit précisément à l'équation (2)

$$[\varphi''_{\alpha^2}\varphi'_\beta - \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha]\psi(\alpha, \beta, 1) - \varphi'_\alpha[\psi'_\alpha\varphi'_\beta - \psi'_\beta\varphi'_\alpha] = 0.$$

Ainsi les équations (1) et (2) expriment que toutes les asymptotes de la section doivent être comprises dans m plans.

Quant à l'équation (3), il est inutile d'en chercher la traduction : puisqu'elle exprime que chacune des asymptotes coupe la surface en un troisième point situé à l'infini, *elle doit exprimer que chacun des m plans asymptotes coupe la surface suivant une courbe de degré $m-3$.*

En conséquence, les surfaces de degré m, cubables algébriquement et contenant encore le plus grand nombre possible de paramètres, sous cette condition, devraient être recherchées parmi les surfaces ayant une courbe double de degré $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, que pourrait représenter l'équation

$$\begin{aligned}(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)\ldots\\ \times(A_mx+B_my+C_mz+D_m)+\Phi_{m-3}(x,y,z)=0,\end{aligned}$$

Φ_{m-3} désignant un polynôme complet en x, y, z, de degré $(m-3)$ au plus.

28. *Application aux surfaces du troisième ordre.* — Les surfaces de troisième ordre capables de cubature algébrique doivent être recherchées dans le type

$$\begin{aligned}(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)\\ \times(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)+H=0.\end{aligned}$$

Si l'on suppose la surface irréductible, la seule ligne double qu'elle pourra contenir sera une droite. Supposons qu'on ait pris cette droite pour axe des z, l'équation de la surface devra se réduire à une identité si l'on y fait $x=0$ et $y=0$, ce qui donne

$$\begin{aligned}c_1c_2c_3&=0,\\ c_1c_2d_3+c_2c_3d_1+c_3c_1d_2&=0,\\ c_1d_2d_3+c_2d_3d_1+c_3d_1d_2&=0,\\ d_1d_2d_3+H&=0;\end{aligned}$$

H ne pouvant être supposé nul, sans quoi la surface se réduirait à trois plans, d_1, ni d_2, ni d_3 ne sauraient non plus disparaître; en conséquence, c_1, c_2 et c_3 devront être nuls. C'est-à-dire que la surface devra être un cylindre parallèle à sa ligne double.

Les conditions précédentes expriment simplement que l'axe des z est sur la surface : pour que cette ligne soit double, il faut et il suffit que l'origine soit un point double de la trace du cylindre sur le plan des xy. Or, l'équation de cette trace, ou celle de la surface, est devenue

$$\begin{aligned}(a_1x + b_1y + d_1)(a_2x + b_2y + d_2)& \\ \times (a_3x + b_3y + d_3) - d_1 d_2 d_3 &= 0;\end{aligned}$$

et, si l'origine est un point double, cette trace sera quarrable algébriquement, c'est-à-dire sera un trèfle ou un folium, suivant que les trois asymptotes seront réelles ou qu'il y en aura deux imaginaires.

Les deux seules surfaces du troisième ordre, cubables algébriquement et dépendant encore du plus grand nombre possible de paramètres, sous cette condition, sont donc le cylindre à base de trèfle et le cylindre à base de folium.

29. Le Tome II de ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires* contient la théorie, analogue aux précédentes, des intégrales d'ordres supérieurs.

(*A suivre.*)