

BARISIEN

**Concours d'admission à l'École
centrale en 1889**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10
(1891), p. 228-235

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__228_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1889.

SOLUTIONS PAR M. LE CAPITAINE BARIJSIEN.

PREMIÈRE SESSION.

Soient Ox , Oy deux axes rectangulaires et une droite LL' parallèle à Oy dont l'équation est $x - a = 0$. On considère le faisceau des paraboles qui passent par le point O et qui ont la droite LL' pour directrice.

1° Trouver le lieu du foyer et le lieu du sommet de chacune de ces paraboles;

2° Par un point quelconque du plan xOy passent deux des paraboles considérées, réelles ou imaginaires, déterminer la région du plan dans laquelle doit être ce point pour que les deux paraboles soient réelles.

3° Etant données les coordonnées d'un point M du plan xOy , former l'équation qui a pour racines les coefficients angulaires des tangentes au point O aux deux paraboles du faisceau considéré qui passent par ce point M . En déduire l'équation de la ligne S sur laquelle doit se trouver le point M pour que les tangentes au point O aux deux paraboles du faisceau qui passent au point M soient rectangulaires.

4° Soit M un point situé sur la ligne S , et soient F , F' les foyers des deux paraboles du faisceau considéré qui passent par ce point, démontrer que, lorsque le point M se déplace sur la ligne S , la droite FF' tourne autour d'un point fixe.

I. Si α , β sont les coordonnées du foyer de la parabole, ayant pour directrice la droite hh' , son équation est

$$(1) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x - \alpha)^2,$$

avec la condition

$$(2) \quad \alpha^2 - \beta^2 = a^2,$$

qui exprime que la parabole passe par le point O .

Cette condition (2) exprime aussi que le lieu des foyers des paraboles (1) est le cercle de centre O et de rayon a .

L'équation de l'axe étant

$$(3) \quad y = \beta,$$

pour avoir le lieu du sommet des paraboles, il faut éliminer α et β entre les équations (1), (2) et (3). (1) devient, en tenant compte de (3),

$$(x - \alpha) = -(x - \alpha),$$

d'où

$$\alpha = 2x - a;$$

(2) devient alors

$$(2x - a)^2 + y^2 = a^2$$

ou

$$4x^2 + y^2 - 4ax = 0.$$

C'est une ellipse dont le centre est le milieu de OA . OA est le petit axe de longueur a : son grand axe est de longueur $2a$.

II. Par un point (p, q) du plan passent deux paraboles déterminées par la valeur de α et β provenant des deux équations

$$\begin{cases} (p - \alpha)^2 + (q - \beta)^2 = (p - a)^2, \\ \alpha^2 + \beta^2 = a^2. \end{cases}$$

En formant l'équation en α , on trouve

$$4\alpha^2(p^2 + q^2) - 4\alpha p(q^2 + 2ap) + (q^2 + 2ap)^2 - 4a^2q^2 = 0.$$

La condition pour que les deux valeurs de α soient réelles se réduit à

$$q^2 + 4ap - 4a^2 < 0,$$

ce qui indique que, si le point (p, q) est à l'intérieur de la parabole,

$$(4) \quad y^2 + 4ax - 4a^2 = 0,$$

les deux paraboles passant par ce point sont réelles. Elles se confondent si le point (p, q) est sur la parabole (4), et elles sont imaginaires si ce point est à l'extérieur de la parabole.

III. La tangente à l'origine de la parabole (1) ayant pour équation

$$(\alpha - a)n + \beta y = 0;$$

son coefficient angulaire est

$$(5) \quad p = \frac{a - \alpha}{\beta}.$$

En éliminant α et β entre cette équation (5) et les deux suivantes

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = a^2, \\ q^2 = 2(\alpha - a)p + 2\beta q, \end{cases}$$

on forme sans aucune difficulté l'équation en p

$$(6) \quad p^2(q^2 + 4ap) - 4aqp + q^2 = 0.$$

qui donne les coefficients angulaires des tangentes au point O des deux paraboles du faisceau qui passent par le point (p, q) .

Si ces deux tangentes sont rectangulaires, on doit avoir $p'p'' = -1$, c'est-à-dire

$$q^2 + 2ap = 0.$$

La ligne S de l'énoncé est donc une parabole.

IV. Avec la condition

$$q^2 = -2ap.$$

la relation

$$q^2 = 2(x-a)p + 2\beta q$$

se réduit à

$$\alpha p + \beta q = 0,$$

et comme

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2,$$

on en déduit

$$\alpha = \frac{\alpha q}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \beta = -\frac{ap}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

pour les coordonnées du foyer F. Celles du foyer F' sont

$$\alpha' = -\frac{aq}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \beta' = \frac{ap}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

L'équation de la droite FF' est par suite

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

et se réduit à

$$y = -\frac{px}{q}.$$

La droite FF' tourne donc autour du point fixe O.

1. Démontrer que les coniques représentées par l'équation

$$(A) \quad (1 - m^2)x^2 + y^2 + 2mrx - r^2 = 0,$$

où l'on suppose m variable, ont deux points communs, et que, si les axes de coordonnées sont rectangulaires, elles ont en outre un foyer commun.

2. Trouver l'équation (B) de la conique assujettie aux conditions suivantes : passer par l'origine, être tangente à une des coniques représentées par (A) en un point $P(x, y)$, pris sur cette courbe, et enfin passer par les deux projections du point P sur les axes de coordonnées.

3. Trouver le lieu des points de contact avec les courbes, représentées par A, des tangentes issues d'un point

$$x = 0, \quad y = h$$

de l'axe des y , lorsqu'on fait varier m .

4. Trouver le lieu des centres des courbes (B) correspondant à une courbe fixe A quand on fait varier la position du point P sur cette courbe.

5. Discuter l'équation (B) en supposant que l'on déplace le point P sur une des courbes représentées par l'équation (A); séparer les parties qui répondent à des ellipses de celles qui répondent à des hyperboles, et trouver le lieu des points de séparation lorsqu'on fait varier m .

1. L'équation (A) pouvant s'écrire

$$(A) \quad x^2 + y^2 = (mx - r)^2$$

n'est autre que l'équation générale des coniques ayant pour foyer l'origine et passant par deux points de l'axe des y équidistants de l'origine de la quantité r (on suppose les axes rectangulaires).

II. L'équation générale des coniques passant par l'origine, le point P et les projections de ce point sur les axes de coordonnées peut s'écrire

$$(1) \quad Ax^2 + Cy^2 - Axx' - Cyy' = 0.$$

La tangente au point $(x'j')$ de cette courbe a pour équation

$$(2) \quad Axx' - Cyy' - Ax'^2 - Cy'^2 = 0.$$

La tangente au même point $(x'j')$ de la conique (A) a pour équation

$$(3) \quad x[x'(1-m^2) + mr] + yy' + r(mx' - r) = 0.$$

En identifiant ces deux équations, on trouve

$$\frac{Ax'}{x'(1-m^2) + mr} = \frac{C}{1} = -\frac{(Ax'^2 + Cy'^2)}{r(mx' - r)};$$

d'où

$$\frac{A}{C} = \frac{x'(1-m^2) + mr}{x'}.$$

En portant la valeur de ce rapport dans (1), l'équation de la conique (B) a pour expression

$$(B) \quad (x^2 - xx')[x'(1-m^2) + mr] + x'(y^2 - yy') = 0.$$

III. En faisant $x = 0$, $y = h$ dans (3), cette équation devient

$$(4) \quad y'h + r(mx' - r) = 0.$$

On a de plus

$$(5) \quad x'^2 + y'^2 = (mx' - r)^2.$$

En éliminant m ou plutôt $(mx' - r)$, entre (4) et (5), on a

$$y' = \pm x' \frac{r}{\sqrt{h^2 - r^2}}.$$

Le lieu des points de contact se compose de deux droites passant par l'origine et également inclinées sur les axes. Les deux droites ne sont réelles que si $h > r$.

IV. Les coordonnées du centre des courbes (B) sont

$$x = \frac{x'}{2}, \quad y = \frac{y'}{2}.$$

De sorte qu'en éliminant x' et y' entre ces deux équations et la relation (5), on trouve pour le lieu des centres l'équation

$$(6) \quad 4(x' + y^2) = (2mx - r)^2 :$$

c'est une conique homofocale de la conique (A).

V. Pour que la conique (B) soit une ellipse, il faut que

$$x'[x'(1 - m^2) - mr] > 0.$$

Si donc le point (x', y') se trouve situé sur l'arc de la conique (A) limité par les points d'intersection de la conique avec les droites

$$(7) \quad \begin{cases} x = 0, \\ x = \frac{mr}{m^2 - 1}, \end{cases}$$

les coniques (B) seront des hyperboles. Sur tout le reste de l'arc d'ellipse, les coniques (B) seront des hyperboles. Aux points d'intersection, les coniques (B) seront des paraboles.

Pour $x = 0$, on trouve comme points d'intersection les deux points par lesquels passent les coniques (A).

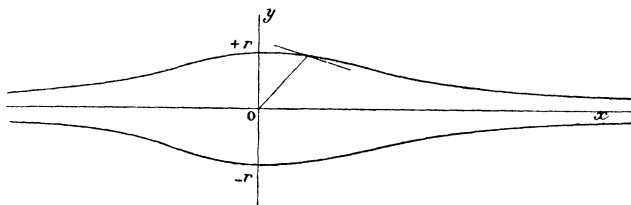
(235)

Pour $x = \frac{mr}{m^2 - 1}$, on trouve, en substituant dans (A),

$$y^2 = \frac{r^2}{1 - m^2}.$$

En éliminant m entre ces deux valeurs de x et y , on trouve pour le lieu des points de séparation

$$y^4 = r^2(x^2 + y^2).$$



C'est une courbe ayant pour asymptote l'axe des x .
Son équation en coordonnées polaires étant

$$\rho = \frac{r}{\sin^2 \omega},$$

on trouve que les points d'inflexion correspondent à

$$\text{tang } \omega = \sqrt{2}$$

et, par suite, à

$$\rho = \frac{3r}{2}.$$