NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE PICARD

Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 197-201

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__197_0>

SUR LE THÉORÈME GÉNÉRAL RELATIF A L'EXISTENCE DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES (1);

PAR M. ÉMILE PICARD,
Membre de l'Institut.

1. Envisageons le système des n équations du premier ordre

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \ldots, w),$$
$$\frac{dv}{dx} = f_2(x, u, v, \ldots, w),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dw}{dx} = f_n(x, u, v, \ldots, w).$$

Les fonctions f sont des fonctions continues réelles des quantités réelles $x, u, v, \ldots, w$ dans le voisinage de $x_0, u_0, v_0, \ldots, w_0$. Elles sont définies quand $x, u, v, \ldots, w$ restent respectivement compris dans les intervalles

$$(x_0 - a,\ x_0 + a),$$
$$(u_0 - b,\ u_0 + b),$$
$$(v_0 - b,\ v_0 + b),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(w_0 - b,\ w_0 + b),$$

a et b désignant deux grandeurs positives.

De plus, on suppose que l'on puisse déterminer n

(1) Cette démonstration si remarquable a été publiée dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XIX; 1891). Nous avons cru devoir la reproduire en faveur des candidats à la Licence et à l'Agrégation.

quantités positives A, B, ..., L, telles que

$$|f(x, u', v', \ldots, w') - f(x, u, v, \ldots, w)|$$
$$< \mathrm{A}.|u' - u| + \mathrm{B}.|v' - v| + \ldots + \mathrm{L}.|w' - w|,$$

(où $|\alpha|$ désigne, suivant l'usage, la valeur absolue de α), x ainsi que les $u, v, \ldots, w$ restant dans les intervalles indiqués. Il en sera évidemment ainsi, en particulier, si les fonctions f ont des dérivées partielles du premier ordre, restant finies, par rapport à $u, v, \ldots, w$.

Ces hypothèses très générales étant faites, on veut démontrer qu'*il existe des fonctions* $u, v, \ldots, w$ *de* x, *continues dans le voisinage de* x_0, *satisfaisant aux équations différentielles et se réduisant respectivement, pour* $x = x_0$, *à* $u_0, v_0, \ldots, w_0$.

2. Nous procéderons par approximations successives. Considérons d'abord le système

$$\frac{du_1}{dx} = f_1(x, u_0, v_0, \ldots, w_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dw_1}{dx} = f_n(x, u_0, v_0, \ldots, w_0);$$

nous en tirons, par quadratures, les fonctions u_1, $v_1, \ldots, w_1$, en les déterminant de manière qu'elles prennent pour x_0 les valeurs $u_0, v_0, \ldots, w_0$. On forme ensuite les équations

$$\frac{du_2}{dx} = f_1(x, u_1, v_1, \ldots, w_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dw_2}{dx} = f_n(x, u_1, v_1, \ldots, w_1),$$

et l'on détermine $u_2, v_2, \ldots, w_2$ par la condition qu'elles prennent respectivement pour x_0 les valeurs $u_0, v_0, \ldots, w_0$. On continue ainsi indéfiniment. Les fonctions u_{m-1},

$v_{m-1}, \ldots, w_{m-1}$ seront liées aux suivantes $u_m, v_m, \ldots,$ w_m par les relations

$$\frac{du_m}{dx} = f_1(x, u_{m-1}, v_{m-1}, \ldots, w_{m-1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dw_m}{dx} = f_n(x, u_{m-1}, v_{m-1}, \ldots, w_{m-1}),$$

et, pour $x = x_0$, on a

$$u_m = u_0, \qquad v_m = v_0, \qquad \ldots, \qquad w_m = w_0.$$

Nous allons établir que, m augmentant indéfiniment, $u_m, v_m, \ldots, w_m$ *tendent vers des limites qui représentent les intégrales cherchées, pourvu que x reste suffisamment voisin de x_0.*

Soit M la valeur absolue maxima des fonctions f, quand les variables dont elles dépendent restent dans les limites indiquées. Désignons par ρ une quantité au plus égale à a : si x reste dans l'intervalle

$$(x_0 - \rho, x_0 + \rho),$$

on aura

$$|u_1 - u_0| < \mathrm{M}\rho, \qquad \ldots, \qquad |w_1 - w_0| < \mathrm{M}\rho$$

Par suite, si $\mathrm{M}\rho < b$, les quantités $u_1, v_1, \ldots, w_1$ resteront dans les limites voulues, et il est évident qu'alors il en sera de même pour tous les autres systèmes de valeurs $u, v, \ldots, w$. Désignant par δ une quantité au plus égale à ρ, nous allons supposer que x reste dans l'intervalle

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

En posant

$$u_m - u_{m-1} = \mathrm{U}_m, \qquad \ldots, \qquad w_m - w_{m-1} = \mathrm{W}_m,$$

on peut écrire

$$\left.\begin{aligned}\frac{dU_m}{dx} &= f_1(x, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1}) - f_1(x, u_{m-2}, \ldots, w_{m-2})\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dW_m}{dx} &= f_n(x, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1}) - f_n(x, u_{m-2}, \ldots, w_{m-2})\end{aligned}\right\} (m = 2, \ldots, \infty).$$

Or on a

$$|U_1| < M\delta, \qquad \ldots, \qquad |W_1| < M\delta.$$

Les équations précédentes, pour $m = 2$, démontrent que $|U_1|$, $|V_2|$, ..., $|W_2|$ sont inférieurs à

$$(A + B + \ldots + L)M\delta^2,$$

et, d'une manière générale, de proche en proche, on voit que $|U_m|$, ..., $|W_m|$ sont inférieurs à

$$M\delta(A + B + \ldots + L)^{m-1}\delta^{m-1}.$$

• Or

$$u_m = u_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_m;$$

par suite, u_m, v_m, ..., w_m tendront vers une limite, si

$$(A + B + \ldots + L)\delta < 1.$$

En prenant δ assez petit, cette condition sera vérifiée. Nous voyons donc que u_m, v_m, ..., w_m tendront vers des limites déterminées, u, v, ..., w, fonctions continues de x dans l'intervalle

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

δ étant la plus petite des trois quantités

$$a, \quad \frac{b}{M}, \quad \frac{1}{A + B + \ldots + L};$$

u, v, ..., w seront représentées par des séries qui convergent à la manière d'une progression géométrique décroissante.

On a d'ailleurs

$$u_m = \int_{x_0}^{x} f_1(x, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1})\, dx + u_0.$$

et, puisque les u_m, v_m, ..., w_m diffèrent de leurs limites d'aussi peu qu'on veut, pour m assez grand, quel que soit x dans l'intervalle indiqué, on aura, à la limite,

$$u = \int_{x_0}^{x} f_1(x, u, v, \ldots, w)\, dx + u_0 :$$

et, par suite,

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \ldots, w),$$

et de même pour les autres équations. *Les fonctions u, v, ..., w sont donc les intégrales cherchées.*