Concours général de 1890

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 104-108

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__104_1>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1890.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Mathématiques.

On donne une surface du second ordre S, un point fixe A sur cette surface et une conique C située dans un plan P.

Les trois droites qui joignent le point A aux sommets A_1, A_2, A_3 d'un triangle T situé dans le plan P rencontrent respectivement la surface S en des points a_1, a_2, a_3 autres que A.

1° Démontrer que le plan $a_1 a_2 a_3$ passe par un point fixe M quand le triangle T se déplace dans le plan P en restant conjugué par rapport à la conique C.

2° Trouver le lieu décrit par le point M, quand la conique C varie en restant circonscrite à un quadrilatère donné.

3° Trouver le lieu décrit par le même point M, quand la conique C varie en restant inscrite dans un quadrilatère donné.

Physique.

I. Densité des gaz. Expliquer comment l'étude complète de la densité d'un gaz peut dispenser de l'étude de sa dilatation.

II. Avant les mesures précises, on pouvait hésiter, pour représenter la loi de la réfraction, entre la formule $\sin i = n \sin r$ et des formules analogues, telles que $i = nr$, $\operatorname{tang} i = n \operatorname{tang} r$. Reprendre complètement la théorie du prisme en substituant ces dernières formules à la formule exacte.

Reconnaître, en particulier, si la propriété du minimum de déviation subsiste toujours, et déterminer le foyer du prisme.

Chimie.

I. Acide sulfureux. Préparation. Propriétés. Décrire les réactions où cet acide intervient, soit directement, soit par ses sels, dans la préparation des différents composés oxygénés du soufre (abstraction faite de tous détails de préparation industrielle).

II. On chauffe avec un excès d'acide sulfurique concentré $3^{gr},320$ d'oxalate neutre de potasse.

Le produit gazeux de la réaction est dirigé dans une enceinte en verre, close, communiquant, d'une part avec un manomètre à mercure, d'autre part avec un matras en porcelaine vernie à l'intérieur, contenant 20^{gr} de chaux vive et 20^{gr} de carbonate de chaux.

L'espace total offert aux gaz est de $1^{lit},300$.

On demande quelle sera la force élastique finale et la composition du gaz, l'enceinte étant maintenue à $0°$ et le matras en porcelaine étant chauffé à $860°$.

On ne tiendra pas compte de la dilatation du gaz contenu dans le matras chauffé à $860°$, le volume de ce gaz étant assez petit par rapport à la capacité de l'enceinte pour que cette correction soit négligeable.

La formule de l'oxalate neutre de potasse est $C^4O^6, 2KO$.

La tension de dissociation du carbonate de chaux à $890°$ est 85^{mm}.

L'équivalent du potassium est 39.

III. L'action de l'eau sur un équivalent de trichlorure de phosphore dégage $63^{cal},6$; celle de la potasse étendue sur un équivalent de trichlorure de phosphore dégage $132^{cal},4$; celle de la potasse étendue sur un équivalent d'acide chlorhydrique étendu dégage $13^{cal},7$.

On demande la chaleur de formation à l'état dissous du phosphite bipotassique.

PHILOSOPHIE.

Mathématiques.

I. On donne quatre points A, B, C, D situés sur la circonférence d'un cercle O. On prend, dans le plan du cercle O, un point P, et on mène le cercle circonscrit au triangle PAB, et le cercle circonscrit au triangle PCD; ces deux cercles se coupent au point P et en un autre point Q.

1° Trouver le lieu décrit par le point Q quand le point P décrit une droite donnée dans le plan du cercle O.

2° Trouver le lieu décrit par le point Q quand le point P décrit la circonférence d'un cercle donné dans le plan du cercle O.

3° Trouver la ligne sur laquelle devrait rester le point P pour que les cercles circonscrits aux triangles PAB, PCD fussent toujours tangents, quelle que soit la position du point P sur cette ligne.

II. On donne deux cercles tangents intérieurement; le point de contact est O; le diamètre OA du plus grand cercle est égal à a, le diamètre OB de l'autre cercle est égal à b. A un point P de la circonférence du premier cercle on fait correspondre un point Q de la circonférence du second cercle tel que l'angle POQ soit droit. Déterminer le point P de façon que la distance du point O à la droite PQ soit la plus grande possible.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Mathématiques et Mécanique.

I. A tout point M d'une parabole on fait correspondre un point m déterminé comme il suit :

Soit N le point de rencontre de la normale en M à la parabole avec l'axe de cette parabole; soit P le point de rencontre de la perpendiculaire à la normale MN menée par le point N et de la parallèle à l'axe de la parabole menée par le point M. Le point m est le point de rencontre de la normale MN avec la perpendiculaire à l'axe de la parabole menée par le point P.

Cela posé, trouver, dans chacun des quatre cas suivants, le lieu du point m que l'on fait ainsi correspondre à un point M d'une parabole.

1° Le point M est fixe, et l'on considère toutes les paraboles qui passent par ce point M et qui ont pour foyer un point donné F.

2° Le point M est fixe, et l'on considère toutes les paraboles qui passent par ce point M et qui ont pour directrice une droite donnée DD'.

3° Le point M est mobile sur une droite donnée TT′ et, pour chaque position du point M, on considère la parabole qui est tangente à la droite TT′ en ce point et qui a pour foyer un point donné F.

4° Le point M est mobile sur une droite donnée TT′, et, pour chaque position du point M, on considère la parabole qui est tangente, en ce point, à la droite TT′, et qui a pour directrice une droite donnée DD′ située dans un plan qui contient la droite TT′.

II. On donne un losange OACB; par le sommet C on mène une droite quelconque qui rencontre la droite OA en un point D et la droite OB en un point E. On mène les droites AE, BD, et l'on désigne par la lettre M leur point de rencontre.

1° Montrer que, quand la droite DCE tourne autour du point C, le point M décrit une courbe fermée, circonscrite au triangle OAB, et construire la tangente au point A et la tangente au point B à cette courbe.

2° Soit θ l'angle donné AOB; soit λ l'angle variable formé par la droite mobile CD, prise dans le sens CD, avec la droite fixe BC, prolongée au delà du point C dans le sens BC. On suppose d'abord l'angle λ compris entre $0°$ et $180° - \theta$, et, dans ce cas, on désigne par α l'angle BAM et par β l'angle ABM : former, dans ces conditions, l'équation qui lie les angles variables α, λ et l'angle θ, et l'équation qui lie les angles β, λ et θ. Indiquer, dans le cas où λ est compris entre $180° - \theta$ et $180°$, quelle signification il faut donner aux lettres α et β pour que les équations trouvées dans le cas de λ compris entre $0°$ et $180° - \theta$ soient encore applicables.

Former l'équation qui lie α, β, et l'angle donnée θ, quel que soit λ.

Calculer, en fonction de θ, les valeurs de α et de β qui satisfont au système d'équations composé de l'équation entre α, β et θ, trouvée ci-dessus et de l'équation $\alpha + \beta = \theta$. — Cas d'indétermination. Interprétation géométrique.

SECONDE.

Algèbre et Géométrie.

I. Résoudre l'équation

$$1 + \frac{4x^2}{2x^2 + 8ax} + \frac{27a^2}{2x^2 + 7ax - 4a^2} = \frac{6a}{2x - a}.$$

II. Un losange ABCD, dont les diagonales AC et BD ont pour longueur respective $2a$ et a, est la base d'un prisme droit illimité : sur les arêtes latérales de ce prisme on porte, dans le même sens, les longueurs

$$AA' = 3a, \qquad BB' = 4a, \qquad CC' = a.$$

1° Calculer le volume du solide compris entre le plan des points A', B', C' et la base du prisme.

2° Évaluer la surface totale du même solide.

TROISIÈME.

Arithmétique, Algèbre et Géométrie.

I. Quelle est la plus petite valeur de la différence entre deux nombres entiers qui sont l'un multiple de 105, l'autre multiple de 504?

Quels sont les deux nombres dont la différence répond à l'énoncé, et qui ont 1 270 080 000 pour somme de leurs carrés?

II. On considère le quadrilatère inscriptible convexe ABCM : les sommets ABC sont fixes, mais le sommet M est mobile.

1° Trouver le lieu géométrique du point de rencontre P des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

2° Déterminer les positions limites du point P, et calculer la longueur du chemin parcouru par ce point pour passer de l'une de ces positions à l'autre. On désignera par a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC et par α, β, γ ses angles; toutes ces quantités sont connues.