NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST DUPORCQ

Sur la somme des puissances semblables des n premiers nombres

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9 (1890), p. 594-595

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__594_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES n PREMIERS NOMBRES;

PAR M. ERNEST DUPORCQ,
Élève de l'École Monge.

En supprimant, dans chacune des $(n+1)^{\text{ièmes}}$ premières lignes du triangle de Pascal, le chiffre qui la termine, puis en la complétant par des 0, on obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & C_n^2 & \dots & n & 0 \\ 1 & n+1 & \dots & \dots & C_{n+1}^{n-1} & \overline{n+1} \end{vmatrix},$$

dont la valeur est évidemment $\overline{n+1}!$.

Si l'on y remplace chaque élément de la dernière colonne par la somme des éléments de la rangée correspondante, multipliés, le premier par 1, le deuxième par x, le troisième par x^2, ..., le $p^{\text{ième}}$ par x^{p-1}, ..., enfin le dernier par x^n, on a le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 1+2x \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & \cdot & \dots & n & 1+nx+\dots+nx^{n-1} \\ 1 & \overline{n+1} & \cdot & \dots & C_{n+1}^2 & 1+\overline{n+1}x+\dots+\overline{n+1}x^n \end{vmatrix},$$

dont la valeur est $\overline{n+1}!\,x^n$. On peut donc écrire l'identité

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & \overline{x+1}^2 \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & \cdot & \dots & n & \overline{x+1}^n \\ 1 & \overline{n+1} & \cdot & \dots & C_{n+1}^2 & \overline{x+1}^{n+1} \end{vmatrix}}{\overline{n+1}!} - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & 2 & \dots & \cdot & x^2 \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & \dots & n & x^n \\ 1 & n+1 & \dots & C_{n+1}^2 & x^{n+1} \end{vmatrix}}{\overline{n+1}!} = x^n.$$

En désignant par $f(x)$ le second terme du premier membre, on a donc successivement

$$\begin{aligned} &f(x+1)-f(x) = x^n, \\ &f(x)-f(x-1) = (x-1)^n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &f(2)-f(1) = 1^n. \end{aligned}$$

D'ailleurs

$$f(1) = 0.$$

On a, par suite,

$$f(x+1) = 1^n + 2^n + \dots + x^n.$$

Ainsi la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissanees des x premiers nombres est donnée par l'expression $f(x+1)$, qu'il est plus avantageux d'écrire

$$x^n + (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ x^n & 1 & n & \dots & n \\ x^{n+1} & 1 & n+1 & \dots & C_{n+1}^2 \end{vmatrix}}{\overline{n+1}!}.$$