

CH. MÉRAY

CH. RIQUIER

**Théorie élémentaire des fractions dégagée  
de toute considération impliquant soit  
la subdivision de l'unité abstraite, soit  
l'intervention des grandeurs concrètes.  
Son application à la spécification  
mathématique de ces dernières**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 8  
(1889), p. 421-435

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1889\\_3\\_8\\_421\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8_421_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FRACTIONS DÉGAGÉE DE TOUTE  
CONSIDÉRATION IMPLIQUANT SOIT LA SUBDIVISION DE  
L'UNITÉ ABSTRAITE, SOIT L'INTERVENTION DES GRANDEURS  
CONCRÈTES. — SON APPLICATION A LA SPÉCIFICATION MA-  
THÉMATIQUE DE CES DERNIÈRES.**

Extrait de *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale  
et ses applications géométriques* (1) :

PAR M. CH. MÉRAY,

Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon,

AVEC LA COLLABORATION DE M. CH. RIQUIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

---

Dans les Traités d'Arithmétique, les fractions sont présentées tantôt comme des sommes de parties aliquotes de l'unité abstraite, ce qui est inintelligible, tantôt comme des mesures numériques de grandeurs qui ne sont pas des multiples exacts de leurs unités.

De cette dernière manière, il est vrai, les élèves aperçoivent immédiatement ce qu'il faut entendre par  $\frac{3}{4}$  de mètre,  $\frac{5}{7}$  de minute, etc., mais ils ne conçoivent qu'à la longue et empirique-

---

(1) En préparation.

ment, c'est-à-dire sans pouvoir jamais expliquer le fond des choses aussi clairement qu'ils le voudraient, à eux-mêmes ou à autrui, ce que sont  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{7}$ , *abstraction faite de toute mensuration physique*, ce qu'il y a sous les signes

$$\frac{3}{4} \pm \frac{5}{7}, \quad \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}, \quad \frac{3}{4} : \frac{5}{7}, \quad \dots$$

Là d'ailleurs, comme dans d'autres parties de l'Analyse pure. il y aurait à critiquer l'intervention des grandeurs concrètes; car la science des nombres abstraits ne peut acquérir une clarté et une unité complètes sans l'exclusion rigoureuse de toute considération étrangère.

La théorie suivante semble ne rien laisser à désirer sous le rapport de la simplicité et de son aptitude à succéder d'une manière tout à fait naturelle à celle des nombres entiers.

.....

3. Les nombres entiers de l'Arithmétique élémentaire, sur lesquels roulent exclusivement en définitive toutes les opérations exigées par les applications numériques, sont les seuls aussi qui interviennent au fond des spéculations théoriques; mais l'impossibilité fréquente de certaines opérations troublerait gravement l'uniformité désirable dans le mécanisme des transformations analytiques et compliquerait les énoncés de restrictions continues, si l'on ne tournait l'obstacle en substituant aux nombres et aux opérations véritables des fictions pour lesquelles l'impossibilité correspondante ne se présente jamais et d'où, quand il le faut, on revient à la réalité sans aucun effort.

Telle est, en particulier, l'origine des fractions, dont la conception supprime les difficultés de forme qui, autrement, naîtraient de l'impossibilité d'exécuter toutes les divisions (de nombres entiers).

1. *Le résultat de l'opération composée consistant à multiplier un entier donné E par un second nombre n,*

puis à diviser le produit par un troisième  $d$  (non = 0) (cette division étant supposée possible), peut aussi bien être obtenu, suivant les circonstances :

1° Si  $E$  est divisible par  $d$ , en faisant cette division et multipliant le quotient obtenu par  $n$ ;

2° Si  $n$  est divisible par  $d$ , en faisant la division et en multipliant  $E$  par le quotient obtenu.

On conçoit que ce dernier mécanisme de l'opération considérée puisse être quelquefois préférable aux deux autres, soit en rendant plus nette la conception du résultat, soit en facilitant ses combinaisons ultérieures avec d'autres nombres, etc.

Pour en conserver les avantages quand  $n$  n'est pas divisible par  $d$ , on convient de représenter même alors le résultat de l'opération ci-dessus par le signe

$$(1) \quad E \times \frac{n}{d} \quad \left( \text{ou} \quad \frac{n}{d} \times E \right),$$

propre au cas où  $n$  est divisible par  $d$ , en lui laissant le nom de produit du nombre  $E$  par le facteur fictif  $\frac{n}{d}$ .

Ces facteurs fictifs, dont les combinaisons sont soumises à un ensemble de règles que nous allons exposer rapidement, sont précisément les *nombre fractionnaires ou fractions*.

Comme le mode (1°) d'exécuter l'opération composée dont nous parlons conduit à en appeler le résultat les  $n$   $d^{\text{ièmes}}$  de  $E$ , il est naturel d'appeler la fraction  $\frac{n}{d}$  aussi bien  $n$   $d^{\text{ièmes}}$  que  $n$  sur  $d$ ; d'où les noms de *numérateur* et *dénominateur* donnés à ses deux *termes*  $n$ ,  $d$  respectivement, dont le second doit être essentiellement supposé différent de 0.

5. Si la comparaison des produits des deux fractions  $\frac{n'}{d'}$ ,  $\frac{n''}{d''}$  par un seul entier  $E \neq 0$  donne lieu à l'une des relations

$$E \frac{n'}{d'} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} E \frac{n''}{d''},$$

la même relation aura lieu entre les produits des mêmes fractions par tout autre entier ( $\neq 0$ , pour la première et la dernière), pourvu, bien entendu, que ces multiplications fictives soient toutes exécutables (4).

On exprime, en conséquence, la corrélation constante existant à ce point de vue entre les deux fractions dont il s'agit en disant, selon le cas, que la valeur de la première est supérieure, égale ou inférieure à celle de la seconde, et en écrivant comme d'habitude

$$(2) \quad \frac{n'}{d'} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{n''}{d''}.$$

Pour qu'il existe entre ces fractions l'une de ces relations fictives, il faut et il suffit qu'il existe entre leurs termes celle semblable dans le tableau

$$n' d'' \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} n'' d'.$$

En particulier, quand deux fractions ont même dénominateur, leur relation d'égalité ou d'inégalité est celle même existant entre leurs numérateurs.

Quand elles ont même numérateur  $\neq 0$ , leur égalité entraîne celle de leurs dénominateurs, et leur inégalité celle de sens contraire entre ces derniers nombres.

6. En multipliant les deux termes d'une fraction par un même nombre, ou en les divisant par quelque diviseur commun, on obtient une fraction égale.

Car les termes des fractions  $\frac{n}{d}$ ,  $\frac{kn}{kd}$ , par exemple, donnent évidemment

$$n \cdot kd = kn \cdot d.$$

On exprime encore la même chose en disant qu'une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ou divise par un même nombre ses deux termes à la fois. D'où la distinction évidente et essentielle à faire entre la valeur et la forme d'une fraction donnée.

Quand les deux termes d'une fraction sont premiers entre eux, aucune autre ne peut lui être égale, à moins que les siens ne soient respectivement des équi-multiples de ceux de la proposée, et, par suite, qu'ils ne leur soient au moins égaux.

On réduit donc une fraction donnée à sa forme ou expression la plus simple, en divisant ses deux termes par leur plus grand commun diviseur; on suppose habituellement cette réduction effectuée quand on ne fait pas mention du contraire.

### 7. Des fractions quelconques

$$\frac{n'}{d'}, \quad \frac{n''}{d''}, \quad \frac{n'''}{d'''}, \quad \dots$$

étant données, on les réduit au même dénominateur, c'est-à-dire on leur donne, sans changer leurs valeurs, les formes nouvelles

$$(3) \quad \frac{N'}{D}, \quad \frac{N''}{D}, \quad \frac{N'''}{D}, \quad \dots,$$

dont les dénominateurs sont égaux, en multipliant les deux termes de chacune des fractions proposées respectivement par les quotients obtenus en divisant par  $d'$ ,  $d''$ ,  $d'''$ , ..., successivement, quelque multiple commun  $M$  de ces dénominateurs primitifs.

On obtiendrait les valeurs minima des termes des nouvelles fractions (3) en réduisant préalablement les proposées à leurs plus simples expressions et prenant ensuite pour M le plus petit commun multiple de leur dénominateur.

8. *Les opérations indiquées par*

$$E \frac{n'}{d}, \quad E \frac{n''}{d''}, \quad E \frac{n'''}{d'''}, \quad \dots$$

*étant supposées possibles, la combinaison de leurs résultats par voie d'addition et de soustraction*

$$(4) \quad E \frac{n'}{d} \pm E \frac{n''}{d''} \pm E \frac{n'''}{d'''} \pm \dots$$

*donne un nombre qui, quel que soit E, peut aussi être obtenu en multipliant cet entier par une seule fraction.*

Si les fractions données

$$(5) \quad \frac{n'}{d}, \quad \frac{n''}{d''}, \quad \frac{n'''}{d'''}, \quad \dots$$

sont les fractions (3) à même dénominateur, il vient immédiatement (4)

$$\begin{aligned} E \frac{N'}{D} \pm E \frac{N''}{D''} \pm E \frac{N'''}{D'''} \pm \dots \\ = \frac{EN' \pm EN'' \pm EN''' \pm \dots}{D} &= \frac{E(N' \pm N'' \pm N''' \pm \dots)}{D} \\ = E \left( \frac{N' \pm N'' \pm N''' \pm \dots}{D} \right). \end{aligned}$$

Sinon, on les réduira au même dénominateur (7) avant de raisonner de cette manière.

*Toute autre fraction dont le produit par E est égal au nombre composé (4) est égale à celle que nous venons d'obtenir. Car, par définition (5), l'égalité de*

deux fractions est précisément leur propriété relative de donner des produits égaux quand on les multiplie par un même nombre.

La fraction constante en valeur, sinon en forme, dont la multiplication par E reproduit ainsi le nombre (4), se nomme *le résultat de la combinaison des fractions données* (5) *par les mêmes additions et soustractions*, et se représente par le signe habituel

$$\frac{n'}{d'} \pm \frac{n''}{d''} \pm \frac{n'''}{d'''} \pm \dots$$

Pour en trouver une forme, il suffit, comme on l'a vu implicitement ci-dessus, de réduire les fractions proposées au même dénominateur, puis de construire la fraction ayant ce dénominateur commun avec la somme ou différence analogue des numérateurs des fractions transformées pour numérateur.

### 9. Si les opérations

$$E \frac{n'}{d'}, \quad \left( E \frac{n'}{d'} \right) \times \frac{n''}{d''}$$

sont possibles, le résultat de la dernière, égal évidemment à

$$E \frac{n' n''}{d' d''},$$

peut ainsi s'obtenir en multipliant E par la fraction unique  $\frac{n' n''}{d' d''}$ . Cette dernière, dont la loi de formation est évidente, s'appelle, par convention, le *produit* des fractions  $\frac{n'}{d'}$ ,  $\frac{n''}{d''}$ .

Cette définition conduit immédiatement à celle, plus générale, du *produit*  $\frac{n' n'' n''' \dots}{d' d'' d''' \dots}$  des fractions  $\frac{n'}{d'}$ ,  $\frac{n''}{d''}$ ,  $\frac{n'''}{d'''}$ , ... données en nombre quelconque.



10. *Étant données deux fractions quelconques*

$$\frac{N}{D}, \quad \frac{n}{d},$$

*dont cependant la seconde n'a pas 0 pour numérateur, il en existe certainement quelque autre dont le produit par la seconde (9) régénère la première.*

En appelant  $x, y$  le numérateur et le dénominateur de la fraction cherchée, on veut avoir

$$\frac{nx}{dy} = \frac{N}{D}.$$

La multiplication simultanée des deux membres par  $\frac{d}{n}$ , fraction qui existe certainement à cause de  $n \neq 0$ , donne, après réduction du premier (9), (6),

$$\frac{x}{y} = \frac{Nd}{Dn},$$

fraction qui, d'ailleurs, satisfait évidemment à la condition voulue et qu'on nomme le *quotient de la division de  $\frac{N}{D}$  par  $\frac{n}{d}$* .

11. *Une même combinaison quelconque des opérations élémentaires ci-dessus définies, exécutée d'abord sur des fractions données, puis sur d'autres quelconques qui leur sont respectivement égales, donne deux résultats qui sont toujours égaux entre eux.*

En d'autres termes, *la valeur du résultat, sinon sa forme, dépend exclusivement des valeurs des données et nullement de leurs formes.*

L'exactitude de cette observation générale se vérifie sans peine; jointe à quelques remarques particulières faites antérieurement, elle attribue à chaque fraction, au point de vue de ce que nous en avons appelé sa *valeur*,

une individualité constante indépendante de la forme qu'elle peut revêtir.

12. Si l'entier  $R$  est le résultat d'un ensemble donné quelconque d'opérations arithmétiques exécutées sur les entiers  $e', e'', \dots$  (additions, multiplications, soustractions et divisions, ces dernières essentiellement supposées possibles), le résultat des opérations fictives de noms identiques dans la théorie des fractions, exécutées parallèlement sur les fractions correspondantes  $\frac{e'}{1}, \frac{e''}{1}, \dots$  sera précisément la fraction  $\frac{R}{1}$  (sous cette forme ou sous une autre).

Pour effectuer un calcul arithmétique quelconque sur des entiers, on pourra donc tout aussi bien : 1° prendre ceux-ci pour numérateurs de fractions ayant toutes 1 pour dénominateur commun; 2° substituer au calcul proprement dit donné le calcul fictif de même dénomination exécuté sur ces fractions; 3° chercher le numérateur du résultat réduit à sa plus simple expression.

C'est cette double substitution de nombres fractionnaires aux nombres entiers, d'opérations fractionnaires à celles de l'Arithmétique, que l'on opère à chaque instant dans les calculs, et cela d'une manière qui devient bientôt inconsciente. Comme une division de fractions est toujours praticable [quand le numérateur du diviseur n'est pas nul (10)], cette assimilation procure en théorie l'immense avantage qu'aucune division impossible ne peut désormais entraver la transformation d'un groupe d'opérations données en tel autre équivalent qui faciliterait la conception et la généralisation des résultats auxquels conduit l'étude de la question traitée.

Un autre avantage, également très appréciable, consiste en ce qu'on peut à volonté substituer l'une à

*l'autre la multiplication et la division, à cause de*

$$\frac{n'}{d'} \cdot \frac{n''}{d''} = \frac{n'}{d'} : \frac{d''}{n''} \quad (10).$$

13. D'après tout cela, *les combinaisons opératoires des fractions*  $\frac{n'}{d'}$ ,  $\frac{n''}{d''}$ , ... *avec des entiers*  $e'$ ,  $e''$ , ... *seront les combinaisons fractionnaires homonymes de toutes les fractions*

$$\frac{n'}{d'}, \quad \frac{n''}{d''}, \quad \dots, \quad \frac{e'}{1}, \quad \frac{e''}{1}, \quad \dots$$

De très légères modifications dans les énoncés permettent alors d'éviter toute allusion au dénominateur 1 à apposer sous les entiers  $e'$ ,  $e''$ , ... pour les transformer en fractions, et de créer le langage propre aux combinaisons de cette espèce. Dire, par exemple, qu'on multiplie ou qu'on divise  $\frac{n}{d}$  par  $e$  en multipliant le numérateur ou le dénominateur par  $e$ , c'est énoncer dans ce langage spécial ces faits résultant de nos définitions, que le produit et le quotient de  $\frac{n}{d}$  par  $\frac{e}{1}$  sont

$$\frac{n \cdot e}{d \cdot 1} = \frac{ne}{d} \quad \text{et} \quad \frac{n \cdot 1}{d \cdot e} = \frac{n}{de}.$$

La fraction  $\frac{0}{d}$  est dite *nulle* parce que sa forme réduite est  $\frac{0}{1}$ , que l'on convient d'identifier à son numérateur 0.

14. Les nombres fractionnaires et les entiers, ceux-ci assimilés aux premiers, comme nous venons de l'expliquer, sont confondus sous le nom de *quantités ou nombres absolus*, quand on les oppose aux quantités fictives dont nous parlerons dans le paragraphe suivant, de quan-

tités ou nombres *commensurables*, par opposition à celles qui seront étudiées dans le prochain Chapitre.

A la théorie sommaire que nous venons d'en présenter nous ajouterons seulement les observations générales qui suivent :

I. *Pour qu'un produit de pareilles quantités soit nul, il est nécessaire et suffisant que l'un au moins des facteurs le soit lui-même.*

Il faut effectivement et il suffit que l'entier servant de numérateur au produit soit nul et, par suite, que quelques-uns des numérateurs des facteurs dont il est le produit (9) le soit lui-même.

II. *Quand le diviseur est nul, mais non le dividende, la division est impossible. Quand ils s'évanouissent tous deux, le quotient est absolument indéterminé.*

III. *Une quantité non nulle quelconque étant donnée, on peut toujours en assigner d'autres qui lui soient inférieures.* Pour en obtenir de telles, il suffit effectivement d'augmenter arbitrairement le dénominateur de la proposée ou bien de diminuer son numérateur quand il est  $> 1$ .

IV. *Entre deux quantités inégales on peut en insérer d'autres dont deux consécutives quelconques aient une différence inférieure à telle quantité qu'il aura plu de choisir.* Plus brièvement : *le passage de l'une à l'autre peut s'effectuer par des variations successives aussi faibles qu'on le veut.*

.....

(A). Notre conception des fractions abstraites n'a d'ailleurs rien de gênant dans la théorie générale des mesures des grandeurs concrètes.

Pour que des grandeurs d'une même espèce donnée (ou longueurs, ou aires, ou volumes, ou temps, etc.) soient suscepti-

bles d'être comparées numériquement, il faut que, pour elles, on ait pu définir :

L'égalité de deux d'entre elles (possibilité de leur coïncidence);

La somme de plusieurs (résultat de leur juxtaposition extérieure);

L'inégalité de l'une à l'autre;

L'excès d'une quelconque sur une plus petite (reste d'une ablation), tous ces mots étant ainsi pris dans un sens essentiellement physique et non arithmétique).

Il faut en outre être autorisé à affirmer :

*Que toute relation d'égalité ou d'inégalité existant entre une première et une seconde d'une part, entre celle-ci et une troisième d'autre part, subsiste entre la première et la troisième;*

*Qu'en en combinant plusieurs par voie d'additions et soustractions consécutives, le résultat est indépendant tant de l'ordre suivi, que des groupements qu'on a pu opérer préalablement entre elles en exécutant partiellement ces additions et soustractions;*

*Qu'une quelconque est sécable en tout nombre  $n$  de parties égales entre elles, c'est-à-dire qu'on peut, au moins théoriquement, en construire la  $n^{\text{ème}}$  partie;*

*Que le résultat de toute combinaison de plusieurs par les procédés ci-dessus mentionnés reste égal à ce qu'il était auparavant, quand on remplace ces grandeurs par d'autres qui leur sont respectivement égales, par exemple que les  $n^{\text{èmes}}$  parties de deux grandeurs égales le sont aussi l'une à l'autre; etc.*

Les théorèmes fondamentaux qui suivent sont des conséquences immédiates de ces définitions et axiomes :

(B). *Quand deux grandeurs sont sécables respectivement en  $m$ ,  $n$  fragments tous égaux entre eux, elles le sont aussi en  $k\mu$ ,  $k\nu$ , si l'on a représenté par  $\mu$ ,  $\nu$  les quotients des entiers  $m$ ,  $n$  divisés par leur plus grand commun diviseur et par  $k$  un entier tout à fait arbitraire. Inversement, si elles le sont en  $M$ ,  $N$ , on aura nécessairement*

$$M = k\mu, \quad N = k\nu,$$

*$k$  désignant maintenant quelque entier assignable.*

Quand deux grandeurs similaires sont *commensurables*, c'est-à-dire susceptibles de quelque pareil mode de section simultanée, on peut donc effectuer cette section d'une infinité d'autres manières. *Mais les fractions abstraites qui, dans chaque mode, ont pour numérateur et pour dénominateur les nombres de fragments de la première grandeur et de la seconde respectivement, sont toutes égales entre elles (6); de plus, les termes d'une fraction quelconque égale à celles-ci fournissent les nombres caractéristiques d'un mode de section simultanée semblable qui est essentiellement réalisable.*

La valeur commune de toutes ces fractions est par définition le *rapport* de la première grandeur à la seconde; pour la *forme* du rapport, on prendra de préférence celle qui est irréductible (6).

(C). Si

$$(6) \quad \frac{m'}{n'}, \quad \frac{m''}{n''}, \quad \frac{m'''}{n'''} \dots$$

*sont les rapports de plusieurs grandeurs à une même autre, la fraction abstraite, résultat des additions et soustractions arithmétiques*

$$\frac{m'}{n'} \pm \frac{m''}{n''} \pm \frac{m'''}{n'''} \pm \dots$$

*est précisément le rapport à la dernière grandeur, du résultat des opérations physiques de mêmes noms, exécutées parallèlement sur les premières.*

Supposons d'abord égaux entre eux tous les dénominateurs  $n'$ ,  $n''$ ,  $n'''$ , ... et soit  $n$  leur valeur commune. Les première, deuxième, troisième, ... grandeurs sont des sommes physiques de  $n^{\text{ièmes}}$  parties de la dernière, prises en nombres égaux à  $m'$ ,  $m''$ ,  $m'''$ , ... respectivement. Le résultat des additions et soustractions physiques à exécuter sur les premières grandeurs considérées est donc égal à une somme de  $n^{\text{ièmes}}$  parties de la dernière prises en nombre égal à  $m' \pm m'' \pm m''' \pm \dots$ , puisque, pour l'exécution de pareilles opérations, on admet l'indifférence tant de l'ordre de succession des grandeurs que des groupements partiels qu'on peut en faire préalablement (A). En

d'autres termes, la fraction abstraite

$$\frac{m' \pm m'' \pm m''' \pm \dots}{n}$$

est bien le rapport à la dernière grandeur, du résultat des opérations physiques exécutées sur les premières.

Le cas où les dénominateurs sont inégaux se ramène immédiatement à celui-ci par la substitution aux formes données des rapports (6), de celles où ils offrent même dénominateur (7), (B), (8).

(D). *Si les rapports de deux grandeurs à une même troisième sont*

$$\frac{m'}{n'}, \quad \frac{m''}{n''}$$

*respectivement, celui de la première à la seconde est le quotient obtenu en divisant la première de ces fractions abstraites par la seconde.*

A ces deux rapports on peut (B) donner aussi les formes

$$\frac{m' n''}{n' n''}, \quad \frac{m'' n'}{n' n''}.$$

Ainsi donc la section physique de la première grandeur en  $m' n''$  parties égales, de la seconde en  $m'' n'$  (et aussi de la troisième en  $n' n''$ ) donnera des fragments tous égaux les uns aux autres. Le rapport de la première à la seconde est donc

$$\frac{m' n''}{n' m''},$$

c'est-à-dire précisément le quotient dont il s'agit (10).

A cause de cela, le même mot *rappor*t est appliqué aussi, en Arithmétique pure, à la désignation du quotient de la division de deux fractions abstraites.

(E). Cette individualité constante des rapports de plusieurs grandeurs similaires à une même autre commensurable avec elles toutes, ce parallélisme parfait entre l'addition, la soustraction arithmétiques de ces rapports et les opérations homo-

nymes exécutées physiquement sur les grandeurs correspondantes, conduisent à adopter un même étalon et à spécifier mathématiquement toutes les grandeurs commensurables avec lui, par les fractions arithmétiques constituant leurs divers rapports à l'étalon choisi.

Comme toute grandeur égale à l'étalon a avec lui le rapport  $\frac{1}{1}$ , il sera spécifié lui-même par cette fraction, ou bien par l'entier 1 en vertu de l'identification conventionnelle de la fraction  $\frac{n}{1}$  avec l'entier  $n$  (13). D'où le nom d'*unité* (concrète) donné à l'étalon, celui de *mesure* d'une grandeur, à son rapport avec l'étalon.

(F). *Si à l'étalon primitivement choisi on en substitue un autre ayant  $\mu$  pour mesure (relativement à lui), les grandeurs qui étaient mesurées par les fractions  $\mu'$ ,  $\mu''$ ,  $\mu'''$ , ... le seront par les quotients*

$$\mu' : \mu, \quad \mu'' : \mu, \quad \mu''' : \mu, \quad \dots, \quad (D).$$

L'extension de la notion de rapport, à deux grandeurs qui *théoriquement* ne sont pas commensurables, par suite la généralisation complète de celle de mesure, exigerait sur les *nombre abstraits commensurables* quelques développements qui sortiraient du cadre naturel de cette Note. *Pratiquement* d'ailleurs, deux grandeurs similaires sont toujours commensurables; car, pour nos sens, toute grandeur est une somme de quelques autres égales entre elles, pourvu que la petitesse de celles-ci rende imperceptible toute grandeur moindre.