

GAMBEY

**Solution de la question de mathématiques
spéciales proposée au concours
d'agrégation en 1875**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 77-83

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__77_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1875;

PAR M. GAMBEY,

A un ellipsoïde donné on circonscrit une série de surfaces du deuxième ordre Σ , la courbe de contact

étant l'intersection de l'ellipsoïde par un plan fixe P. On circonscrit ensuite à chaque surface Σ un cône ayant pour sommet un point donné A :

1° Trouver le lieu des courbes de contact des cônes et des surfaces Σ ;

2° Classer les surfaces qui forment le lieu quand on suppose le plan P fixe et le point A mobile dans l'espace.

On déterminera, pour chacune des variétés du lieu, les surfaces qui limitent les régions de l'espace où se trouve alors le point A.

L'équation d'un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués de longueurs a , b , c , choisis de manière que le plan des xy soit parallèle au plan P, étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

si l'on déplace parallèlement à lui-même le plan des xy , de manière qu'il coïncide avec le plan P, cette équation deviendra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z+h)^2}{c^2} - 1 = 0,$$

h étant la distance de la nouvelle origine à l'ancienne.

L'équation générale des surfaces Σ sera alors

$$1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z+h)^2}{c^2} - 1 - \lambda z^2 = 0,$$

et celle du plan polaire du point A (α , β , γ) par rapport à ces surfaces

$$2) \quad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{h + \gamma - \lambda c^2 \gamma}{c^2} z + \frac{h^2 - c^2 + h\gamma}{c^2} = 0.$$

Les coordonnées d'un point quelconque de la courbe de contact dont on cherche le lieu satisfaisant aux équations

tions (1) et (2), on obtiendra ce lieu en éliminant λ entre ces deux équations, ce qui donne

$$(S) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) - \frac{hz^2}{c^2} - \frac{\beta \gamma z}{b^2} - \frac{\alpha xz}{a^2} \\ + \frac{h\gamma + K^2}{c^2} z - \frac{K^2 \gamma}{c^2} = 0, \end{aligned} \right.$$

en posant $c^2 - h^2 = K^2$.

On peut encore écrire ainsi cette équation

$$(S') \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z+h)^2}{c^2} - 1 \right] \\ - z \left[\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta \gamma}{b^2} + \frac{(\gamma+h)(z+h)}{c^2} - 1 \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Discussion. — On constate facilement, en supposant $K^2 > 0$:

1° Que toutes les surfaces (S) passent par le point A et par le pôle du plan P, point qui a pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{K^2}{h};$$

2° Qu'elles ont en commun l'ellipse

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{K^2}{c^2} = 0,$$

et, par suite, ne peuvent être des *paraboloïdes hyperboliques* ni des *cylindres paraboliques*;

3° Que, pour $\gamma > 0$, elles représentent des *hyperboloïdes*, et pour $\gamma = 0$ deux plans dont l'un est le plan P et l'autre le plan polaire du point A par rapport à l'ellipsoïde;

4° Enfin qu'elles sont *bitangentes* à l'ellipsoïde, comme le montre la forme (S'), et qu'elles le coupent suivant le plan P et le plan polaire du point A.

Gardant les hypothèses $\gamma \geq 0$ et $K^2 > 0$, nous classe-

rons les surfaces (S) en employant la décomposition en carrés.

Multipliant par 4γ , deux carrés se forment immédiatement, et l'on obtient

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{2\gamma r - \alpha z}{a} \right)^2 + \left(\frac{2\gamma r - \beta z}{b} \right)^2 - Pz^2 \\ & + \frac{4\gamma(h\gamma + K^2)z}{c^2} - \frac{4K^2\gamma^2}{c^2} = 0, \end{aligned} \right.$$

après avoir posé

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{4h\gamma}{c^2} = P.$$

Distinguons maintenant deux cas :

I. $P \geq 0$. Multiplions par P l'équation (3) et formons le carré par rapport à z ; il vient

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & P \left(\frac{2\gamma r - \alpha z}{a} \right)^2 + P \left(\frac{2\gamma r - \beta z}{b} \right)^2 - \left[Pz - \frac{2\gamma(h\gamma + K^2)}{c^2} \right]^2 \\ & = \frac{4\gamma^2}{c^2} \left[K^2 \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} \right) - \frac{h\gamma - K^2}{c^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

On peut encore, par une transformation facile, écrire ainsi le second membre :

$$\frac{4\gamma^2}{c^2} [c^2 K^2 P - (h\gamma - K^2)^2].$$

Posant

$$\frac{2\gamma r - \alpha z}{a} = A, \quad \frac{2\gamma r - \beta z}{b} = B, \quad Pz - \frac{2\gamma(h\gamma + K^2)}{c^2} = C,$$

$$\frac{4\gamma^2}{c^2} \left[K^2 \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} \right) - \frac{h\gamma - K^2}{c^2} \right] = Q,$$

l'équation (4) prendra la forme caractéristique

$$(I) \quad PA^2 + PB^2 - C^2 = Q.$$

II. $P = 0$. Si P est nul, on ne peut plus multiplier

par P; mais, en annulant cette quantité (3), on obtient la forme ci-dessous

$$(II) \quad A^2 + B^2 + D = 0,$$

après avoir posé

$$4\gamma \left(\frac{h\gamma + K^2}{c^2} \right) z - \frac{4K^2\gamma^2}{c^2} = D.$$

On voit que, P étant négatif, on aura des *ellipsoïdes réels*, parce que Q est alors nécessairement négatif, sauf pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{K^2}{h}$, auquel cas les surfaces (S) se réduisent à un point, le point A, pôle du plan P. Tandis que, pour $P > 0$, on'aura des *hyperboloïdes à une nappe*, si Q est positif, des *cônes réels* pour $Q = 0$, et des *hyperboloïdes à deux nappes*, si Q est négatif.

Si $P = 0$, on aura des *paraboloides elliptiques*, à moins que D ne se réduise à une constante, ce qui arrivera, si l'on a aussi $Q = 0$. En effet, la seconde forme de Q montre que, si l'on a simultanément $P = 0$, $Q = 0$, on a nécessairement $h\gamma + K^2 = 0$, et, par suite, D se réduit à $-\frac{4K^2\gamma^2}{c^2}$. Dans ce cas l'équation (II) sera celle d'un *cylindre elliptique* dont l'axe est défini par les équations $A = 0$, $B = 0$.

Avant de poursuivre cette discussion, étudions la nature et la position des surfaces représentées par les équations $P = 0$, $Q = 0$, où nous regarderons α, β, γ comme les coordonnées courantes d'un point.

La première représente un *paraboloïde elliptique*, tangent à l'origine au plan P et situé tout entier du côté des z négatifs; ses diamètres sont parallèles à l'axe des z .

La deuxième représente un *cône*, ainsi que le montre la première forme de Q, abstraction faite du facteur

$\frac{4\gamma^2}{c^2}$, qui n'est pas nul. La seconde forme de Q montre que ce cône est circonscrit au parabolôide $P = 0$, la courbe de contact étant l'intersection du plan $h\gamma + K^2 = 0$ avec le parabolôide. Il en résulte que le plan P est à égale distance du centre de cette courbe et du sommet du cône $Q = 0$. Du reste, le sommet de ce cône est le pôle du plan P ; d'où il suit qu'il est aussi circonscrit à l'ellipsoïde.

Nous pouvons maintenant délimiter nettement les diverses régions occupées par le point A quand l'équation (S) représente telle ou telle surface. Ces régions sont au nombre de *trois* :

1° Celle qui occupe l'intérieur du parabolôide $P = 0$, et pour tous les points de laquelle on a $P < 0$. Elle correspond aux ellipsoïdes de l'équation (S); car, à cause de la position du cône $Q = 0$, on a nécessairement pour les points de cette région $Q < 0$.

2° Celle qui est située à l'intérieur du cône, mais à l'extérieur du parabolôide, et pour tous les points de laquelle on a $P > 0$ et $Q < 0$. Elle correspond aux hyperboloïdes à deux nappes de l'équation (S).

3° Enfin celle qui est tout entière à l'extérieur du cône $Q = 0$ et pour laquelle on a nécessairement $P > 0$ et $Q > 0$. Elle correspond aux hyperboloïdes à une nappe de l'équation (S).

Comme transition, si le point A est sur le parabolôide $P = 0$, l'équation (S) représente un parabolôide elliptique. S'il est sur le cône $Q = 0$, la même équation représente aussi un cône. Enfin, si le point A est sur la courbe de contact de $P = 0$ et de $Q = 0$, la surface (S) représente un cylindre elliptique. Si l'on avait $K^2 < 0$, c'est-à-dire $h > c$, le plan P ne couperait plus réellement l'ellipsoïde. On aurait toujours $Q < 0$, sauf pour $\sigma = 0$,

$\beta = 0$ et $\gamma = \frac{K^2}{h}$. Il n'y aurait donc plus d'ellipsoïdes imaginaires, ni de cônes imaginaires, à moins que l'on n'eût $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{K^2}{h}$, auquel cas les cônes se réduiraient à un point, le point A, intérieur à l'ellipsoïde et pôle du plan P. Il n'y aurait plus également de cônes réels proprement dits, ni d'hyperboloïdes à une nappe.

Nota. — La même question a été résolue par MM. E. Humbert, élève du lycée de Besançon; Duranton, chargé de cours au lycée du Puy; V. Hioux, professeur au lycée de Rennes; A. Tourrettes, censeur au lycée d'Albi; Escary, professeur au lycée de Châteauroux; Lévy, professeur au lycée de Rennes.