

Démonstrations directes de quelques propriétés connues relatives à la courbe enveloppe d'un segment de droite de longueur constante qui se meut dans un angle

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17 (1878), p. 321-323

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__321_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**DÉMONSTRATIONS DIRECTES DE QUELQUES PROPRIÉTÉS CON-
NUES RELATIVES A LA COURBE ENVELOPPE D'UN SEGMENT
DE DROITE DE LONGUEUR CONSTANTE QUI SE MEUT DANS
UN ANGLE ;**

PAR M. A. M.

Soient xoy l'angle donné et ab le segment mobile(*). Ce segment se déplace de façon que a reste sur ox , et b sur oy . Pour un déplacement infiniment petit de ab , on obtient le centre instantané de rotation c en élevant respectivement à ox et oy les perpendiculaires ac , bc .

Les quatre points o, a, c, b sont sur une circonférence dont oc est un diamètre. Comme ce diamètre est égal à $\frac{ab}{\sin xoy}$, sa longueur est constante, quelle que soit la position de ab ; par suite, *pendant le déplacement continu de ab , les points tels que c sont une circonférence de centre o .*

La perpendiculaire ce à ab rencontre cette droite au point e , où celle-ci touche son enveloppe. Abaissons aussi la perpendiculaire of sur ab : *les points e et f sont à égales distances du milieu de ab .*

Du centre i de la circonférence $oacb$ menons le diamètre perpendiculaire à ab , et appelons g et h les extrémités de ce diamètre. *Les droites og, oh , perpendiculaires l'une à l'autre, sont les bissectrices des angles formés par ox et oy ; elles sont alors fixes pendant le déplacement de ab .*

Appelons p et q les points de rencontre de og et oh

(*) Le lecteur est prie de faire la figure.

avec la normale ce . Le segment pq est double du diamètre gh , il est donc de grandeur constante; par suite, pendant le déplacement de ab , les normales telles que ce enveloppent une courbe qu'on peut obtenir en déplaçant le segment pq dans l'angle droit goh .

Menons le diamètre mn parallèlement à ab , la distance entre ces droites reste la même pendant le déplacement de ab . L'enveloppe de mn est alors une courbe parallèle à la courbe enveloppe de ab . Ces deux enveloppes ont même développée qui est l'enveloppe de pq . Le segment mn de grandeur constante se déplace dans l'angle droit fixe mon . Ainsi l'enveloppe de mn a pour développée une courbe qui lui est semblable; le rapport de similitude est de 1 à 2.

Abaissons sur pq la perpendiculaire or et prenons le point λ symétrique de r par rapport au point c , milieu de pq . Le segment pq touche son enveloppe au point λ ; ce point est alors le centre de courbure de la courbe enveloppe de mn . Appelons l le point où pq rencontre mn et j le point où of rencontre cette même droite. Il résulte de la construction qui donne λ que le rayon de courbure $l\lambda$ est égal à 3 fois oj . Désignons par t le point où la droite $o\lambda$ coupe mn . D'après ce que nous venons de dire, le segment ot est le quart de $o\lambda$. Le lieu (t) des points, tels que t , est alors une courbe semblable à la courbe (λ) , lieu des points λ . La tangente à (t) en t est alors perpendiculaire à mn , c'est-à-dire que (t) rencontre à angle droit les droites, telles que mn ; donc (t) est la développante de l'enveloppe de mn .

Les côtés de l'angle droit poq interceptent un segment de grandeur constante sur la parallèle à pq menée du point t . Ce segment, égal à la moitié de mn , en se déplaçant dans l'angle poq , a pour enveloppe la développante (t) de la courbe enveloppe de mn . La déve-

loppante (t) est alors semblable à la courbe enveloppe de mn.

Lorsque le segment mn est en $m'n'$ également inclinée sur om et sur on , le point t' , tel que t , est le milieu de $m'n'$; il est aussi le point où $m'n'$ touche la courbe enveloppe (mn) . Appelons μ et ν les points où cette enveloppe touche om et on . La développante (t) part de t' et coupe $o\mu$ au point μ' , tel que $o\mu' = \frac{o\mu}{4}$. Par suite l'arc $\mu t'$ de l'enveloppe (mn) a pour longueur $\frac{3}{4} mn$, et la longueur totale de cette courbe est $6.mn$.