NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. REALIS

Particularités relatives à l'équation du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17 (1878), p. 178-181

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__178_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PARTICULARITÉS
RELATIVES A L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. S. REALIS.

Étant donnée l'équation à coefficients entiers

$$x^3 + Px + Q = 0,$$

on en désigne les trois racines par a, b, c, et l'on fait, pour abréger,

$$P^2 - 4Qx = \varphi(x).$$

Cela posé, la considération de la fonction $\varphi(x)$ conduit aux propositions suivantes, faciles à démontrer :

1° Si a est racine entière de l'équation proposée, la quantité $\varphi(a)$ est égale à un carré : le produit $\varphi(b)\,\varphi(c)$ est le carré d'un nombre appartenant à la forme $5u^2 - v^2$ et à la forme équivalente $u^2 - 5v^2$.

2° Si les trois racines de l'équation sont entières, la quantité $\varphi(a)$, où a désigne l'une quelconque d'entre elles, est le carré d'un nombre compris dans les deux formes indiquées. En ce cas, si les racines b, c sont de même parité, le produit $\varphi(b)\varphi(c)$ est le carré d'un nombre appartenant en outre à l'une des formes $u^2 - 16v^2$, $16u^2 - v^2$.

3° La racine a étant entière, et b, c étant exprimées

par des nombres complexes entiers (*), $\varphi(a)$ est le carré d'un nombre de la forme $5u^2+v^2$: le produit $\varphi(b)\varphi(c)$ est le carré d'un nombre appartenant en même temps aux formes $5u^2+v^2$, $5u^2-v^2$, u^2-5v^2, u^2+16v^2.

4° Quelle que soit la nature des trois racines a, b, c, si les coefficients P, Q sont entiers, le produit $\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)$ se réduit à un carré.

Si, de plus, la quantité $-(4P^3+27Q^2)$ est égale à un carré, le même produit est le carré d'un nombre renfermé dans les deux formes équivalentes $5u^2-v^2$, u^2-5v^2.

Si c'est la quantité $4P^3+27Q^2$ qui est égale à un carré, le produit considéré est le carré d'un nombre de la forme $5u^2+v^2$.

Remarque. — Les formules qui établissent les résultats indiqués trouvent une application utile dans certaines questions d'Analyse indéterminée. On en déduit, par exemple, l'identité

$$(5\alpha^2-\beta^2)^2+[5\alpha^2-(2\alpha-\beta)^2]^2 + [5\alpha^2-(2\alpha+\beta)^2]^2=3(3\alpha^2+\beta^2)^2,$$

qui fournit une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=3z^2,$$

au moyen de valeurs de z_1, z_2, z_3 contenues dans la forme $5u^2-v^2$, et de valeurs de z contenues dans la forme $3u^2+v^2$.

L'identité analogue

$$[3(\alpha+\beta)^2-(3\alpha+\beta)^2]^2 + [3(2\alpha)^2-(3\alpha-\beta)^2]^2+[3(\alpha-\beta)^2-2(\beta)^2]^2=6(3\alpha^2+\beta^2)^2$$

(*) *Voir*, pour les racines complexes des equations, le tome III de la 1re série, pp. 41, 145 et 325.

ne se déduit pas directement des formules mentionnées, mais on y arrive par des considérations semblables à celles qui amènent les propositions énoncées plus haut. Elle fournit, comme on voit, une infinité de solutions entières de l'équation

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 6z^2,$$

au moyen de valeurs de z renfermées dans la forme $3u^2 + v^2$, et de valeurs de z_1, z_2, z_3 renfermées dans l'une ou l'autre des formes $3u^2 - v^2$, $u^2 - 3v^2$.

Au point de vue de la théorie des nombres, les identités précédentes constituent des théorèmes remarquables touchant la décomposition de $3z^2$ et de $6z^2$ en trois carrés, lorsque z est un nombre de la forme indiquée.

La considération de fonctions autres que $\varphi(x)$, composées de même avec les racines de l'équation du troisième degré, amène des résultats plus généraux. Nous nous bornerons à énoncer la proposition suivante :

Le nombre z étant de la forme $3u^2 + v^2$, *et le coefficient k étant une somme de trois carrés entiers, le produit* kz^2 *est la somme de trois carrés compris dans une même forme*

$$(Au^2 + Buv + Cv^2)^2,$$

où les coefficients A, B, C *sont des entiers ne dépendant que de k, et les entiers variables u, v peuvent être positifs ou négatifs.*

Une conséquence immédiate de l'identité qui justifie et complète cette proposition consiste en ce que *la somme de trois carrés entiers peut être transformée, d'une infinité de manières et au moyen de formules directes, en une somme de trois carrés rationnels.*

Il est à propos de rappeler ici, d'après Fermat et Euler, que la forme quadratique $3u^2 + v^2$ peut représenter tous les nombres premiers compris dans la forme linéaire $6n + 1$: qu'elle peut représenter, par conséquent, tous les nombres dont les facteurs premiers appartiennent à cette forme linéaire (*voir*, au t. VIII des *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, le Mémoire d'Euler : *Supplementum quorumdam theorematum arithmeticorum*, etc. ; *voir* aussi, au t. III des *OEuvres de Lagrange*, le Mémoire intitulé : *Recherches d'Arithmétique*).