

H. LAURENT

## **Théorie élémentaire des fonctions elliptiques**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 17  
(1878), p. 119-129

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1878\\_2\\_17\\_\\_119\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__119_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (\*).]

—

RELATIONS DIFFÉRENTIELLES ENTRE LES FONCTIONS  
AUXILIAIRES.

Posons

$$y = \frac{H(x)}{\Theta(x)};$$

on aura

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{H'(x)\Theta(x) - \Theta'(x)H(x)}{\Theta^2(x)}.$$

Or, en différentiant les formules (5), on a

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} H'(x + 2K'\sqrt{-1}) &= -H'(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})} \\ &\quad + H(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})}\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}, \\ \Theta'(x + 2K'\sqrt{-1}) &= -\Theta'(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})} \\ &\quad + \Theta(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})}\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}. \end{aligned} \right.$$

Or les deux fonctions  $H(x)$  et  $\Theta(x)$  possèdent la période  $4K$ ; il en est donc de même de  $H'(x)\Theta(x) - \Theta'(x)H(x)$ , et, quand on y change  $x$  en  $x + 2K'\sqrt{-1}$ , en vertu de (2), cette fonction devient

$$[\Theta(x)H'(x) - H(x)\Theta'(x)]e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})};$$

---

(\*) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XVI, p. 78, 211, 361, 385, 433, 481.

en d'autres termes, elle s'est trouvée multipliée par

$$e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})} = e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}2(x+K'\sqrt{-1})}.$$

Or les fonctions  $\Theta(x)H(x)$  et  $\Theta_1(x)H_1(x)$  sont dans ce cas; on doit donc poser

$$(3) \quad H'(x)\Theta(x) - H(x)\Theta'(x) = A\Theta(x)H(x) + B\Theta_1(x)H_1(x),$$

ou, en divisant par  $\Theta^2$  et en tenant compte de (1),

$$\frac{dy}{dx} = A \frac{H(x)}{\Theta(x)} + B \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)} \frac{H_1(x)}{\Theta(x)}.$$

Mais, si, dans (3), on change  $x$  en  $-x$ , on a

$$H'(x)\Theta(x) - H(x)\Theta'(x) = -A\Theta(x)H(x) + B\Theta_1(x)H_1(x),$$

et, en comparant cette formule avec (3), on a

$$A = 0;$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = B \frac{\Theta_1}{\Theta} \frac{H_1}{\Theta}.$$

Si, dans (3), on fait  $x = 0$ , on a

$$H'(0)\Theta(0) = B\Theta_1(0)H_1(0).$$

Tirant B de là, la formule précédente donne

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{H'(0)\Theta(0)}{\Theta_1(0)H_1(0)} \frac{\Theta_1(x)H_1(x)}{\Theta^2(x)}.$$

Entre cette formule et les formules (1) et (2) du paragraphe précédent, éliminons  $\Theta_1(x)$  et  $H_1(x)$ ; nous aurons

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{H'^2(0)}{\Theta^2(0)} \left[1 - \frac{\Theta_1^2(0)}{H_1^2(0)} y^2\right] \left[1 - \frac{H_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)} y^2\right].$$

Cette équation serait identique à celle qui nous a servi primitivement à définir le sinus de l'amplitude de  $x$ , si

l'on supposait

$$(5) \quad \begin{cases} \operatorname{sn} x = \frac{\Theta_1(0)}{H_1(0)} \gamma = \frac{\Theta_1(0)}{H_1(0)} \frac{H(x)}{\Theta(x)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\Theta(x)}, \\ \frac{\Theta_1(0)}{H_1(0)} \frac{H'(0)}{\Theta'(0)} = 1, \\ \frac{H_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)} = k, \end{cases}$$

et l'on aurait

$$\left( \frac{d \operatorname{sn} x}{dx} \right)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 x) (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x).$$

On a donc bien

$$\operatorname{sn} x = \frac{H(x)}{\Theta(x)} \frac{\Theta_1(0)}{H_1(0)},$$

et il est nettement établi que la fonction  $\operatorname{sn} x$  est monodrome, puisqu'on peut la former de toutes pièces en la considérant comme le quotient de deux fonctions monodromes.

Maintenant reprenons les formules (1) et (2) du paragraphe précédent; on peut les écrire, en divisant par  $\Theta^2(x)$ ,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)} \frac{\Theta_1(0)}{H_1^2(0)} + \frac{H_1^2(x)}{\Theta^2(x)} \frac{\Theta^2(0)}{H_1^2(0)}, \\ 1 &= \frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)} \frac{F_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)} + \frac{\Theta_1^2(x)}{\Theta^2(x)} \frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)}. \end{aligned}$$

La première, en vertu de (5), sera satisfaite en posant

$$\frac{H_1(x)}{\Theta(x)} \frac{\Theta(0)}{H_1(0)} = \cos \operatorname{am} x = \operatorname{cn} x,$$

et la dernière donnera

$$1 = k^2 \operatorname{sn}^2 x + \frac{\Theta_1^2(x)}{\Theta^2(x)} \frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)},$$

ou bien

$$\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)} \frac{\Theta(o)}{\Theta_1(o)} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x} = \operatorname{dn}^2 x.$$

Elle donnera aussi, pour  $x = K$ ,

$$1 = \frac{H^2(K)}{\Theta^2(K)} \frac{H_1^2(o)}{\Theta_1^2(o)} + \frac{\Theta^2(K)}{\Theta^2(K)} \frac{\Theta^2(o)}{\Theta_1^2(o)},$$

ou bien

$$1 = \frac{H_1^4(o)}{\Theta_1^4(o)} + \frac{\Theta^4(o)}{\Theta_1^4(o)}.$$

Le premier terme du second membre est  $k^2$ , le second est donc la quantité désignée plus haut par  $k'^2$ ;  $k'$  est ce que nous avons appelé le *module complémentaire*. On a donc le tableau suivant :

TABLEAU N° 4.

$$[10] \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\Theta(x)}, \\ \operatorname{cn} x = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(x)}{\Theta(x)}, \\ \operatorname{dn} x = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}, \\ \lambda = \frac{H_1^2(o)}{\Theta_1^2(o)} = \frac{\Theta^2(o)}{H^2(o)}, \quad k' = \frac{\Theta^2(o)}{\Theta_1^2(o)}, \quad \frac{k}{k'} = \frac{H_1^2(o)}{\Theta^2(o)} \\ \lambda^2 + k'^2 = 1, \end{array} \right.$$

$$[11] \left\{ \begin{array}{l} K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ K' = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}, \end{array} \right.$$

|      |                                                          |                                                                                |                                                                              |
|------|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| [12] | $\text{sn } 0 = 0,$                                      | $\text{cn } 0 = 1,$                                                            | $\text{dn } 0 = 1,$                                                          |
|      | $\text{sn } K = 1,$                                      | $\text{cn } K = 0,$                                                            | $\text{dn } K = k',$                                                         |
|      | $\text{sn } 2K = 0,$                                     | $\text{cn } 2K = 1,$                                                           | $\text{dn } 2K = 1,$                                                         |
|      | $\text{sn } K'\sqrt{-1} = \infty,$                       | $\text{cn } K'\sqrt{-1} = \infty,$                                             | $\text{dn } K'\sqrt{-1} = \infty,$                                           |
|      | $\text{sn}(2K + K'\sqrt{-1}) = \infty,$                  | $\text{cn}(2K + K'\sqrt{-1}) = \infty,$                                        | $\text{dn}(2K + K'\sqrt{-1}) = \infty,$                                      |
|      | $\text{sn}(K + K'\sqrt{-1}) = \frac{1}{k},$              | $\text{cn}(K + K'\sqrt{-1}) = -\frac{k'\sqrt{-1}}{k},$                         | $\text{dn}(K + K'\sqrt{-1}) = 0,$                                            |
| [13] | $\text{sn}(-x) = -\text{sn } x,$                         | $\text{cn}(-x) = \text{cn } x,$                                                | $\text{dn}(-x) = \text{dn } x,$                                              |
|      | $\text{sn}(2K - x) = \text{sn } x,$                      | $\text{cn}(2K - x) = \text{cn } x,$                                            | $\text{dn}(2K - x) = \text{dn } x,$                                          |
|      | $\text{sn}(2K + x) = -\text{sn } x,$                     | $\text{cn}(2K + x) = \text{cn } x,$                                            | $\text{dn}(2K + x) = \text{dn } x,$                                          |
|      | $\text{sn}(K - x) = \frac{\text{cn } x}{\text{dn } x},$  | $\text{cn}(K - x) = k' \frac{\text{sn } x}{\text{dn } x},$                     | $\text{dn}(K - x) = \frac{k'}{\text{dn } x},$                                |
|      | $\text{sn}(K + x) = \frac{\text{cn } x}{\text{dn } x},$  | $\text{cn}(K + x) = -k' \frac{\text{sn } x}{\text{dn } x},$                    | $\text{dn}(K + x) = \frac{k'}{\text{dn } x},$                                |
|      | $\text{sn}(K'\sqrt{-1} + x) = \frac{1}{k \text{sn } x},$ | $\text{cn}(K'\sqrt{-1} + x) = -\sqrt{-1} \frac{\text{dn } x}{k \text{sn } x},$ | $\text{dn}(K'\sqrt{-1} + x) = -\sqrt{-1} \frac{\text{cn } x}{\text{sn } x},$ |
|      | $\text{sn}(2K'\sqrt{-1} + x) = \text{sn } x,$            | $\text{cn}(2K'\sqrt{-1} + x) = -\text{cn } x,$                                 | $\text{dn}(2K'\sqrt{-1} + x) = -\text{dn } x.$                               |
|      | Fonctions.                                               | Periodes.                                                                      | Zeros.                                                                       |
| [14] | $\text{sn } x \dots\dots\dots$                           | $4K, 2K'\sqrt{-1},$                                                            | $0, 2K,$                                                                     |
|      | $\text{cn } x \dots\dots\dots$                           | $2K, 2K + 2K'\sqrt{-1},$                                                       | $K'\sqrt{-1}, 2K + K'\sqrt{-1},$                                             |
|      | $\text{dn } x \dots\dots\dots$                           | $2K, 2K'\sqrt{-1},$                                                            | $\pm K + K'\sqrt{-1}, K'\sqrt{-1}, 2K + K'\sqrt{-1}.$                        |

RELATIONS ENTRE  $\operatorname{sn} x$ ,  $\operatorname{cn} x$  ET  $\operatorname{dn} x$ .

A la fonction  $\operatorname{sn} x$ , définie par l'équation

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

nous avons adjoint les fonctions

$$(2) \quad \begin{cases} \operatorname{cn} x = v = \sqrt{1-u^2}, \\ \operatorname{dn} x = w = \sqrt{1-k^2u^2}. \end{cases}$$

La formule (1) pourra alors s'écrire

$$\frac{du}{dx} = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x = vw.$$

Des formules (2) on déduira

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= - \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} = -uv, \\ \frac{dw}{dx} &= - \frac{k^2u}{\sqrt{1-k^2u^2}} \frac{du}{dx} = -k^2vu. \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d \operatorname{sn} x}{dx} = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x, \\ \frac{d \operatorname{cn} x}{dx} = - \operatorname{dn} x \operatorname{sn} x, \\ \frac{d \operatorname{dn} x}{dx} = - k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x. \end{cases}$$

Maintenant, si l'on observe que

$$u = \sqrt{1-v^2} = \frac{1}{k} \sqrt{1-w^2}, \quad v = \frac{\sqrt{1-w^2}}{k}, \quad w = \sqrt{k'^2 + k^2v^2},$$

les formules (3) pourront s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}, \\ \frac{dv}{dx} &= -\sqrt{(1-v^2)(k'^2+k^2v^2)}, \\ \frac{d\omega}{dx} &= -k\sqrt{(\omega^2-k'^2)(1-\omega^2)}.\end{aligned}$$

Rien n'est plus simple, en partant des formules (3), que de former les équations auxquelles satisferaient  $\text{tang am } x$ ,  $\text{cot am } x$ , .... On formera ainsi le tableau suivant :

TABLEAU N° 5.

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                             |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| [15] | $\left\{ \begin{aligned} \frac{d \operatorname{sn} x}{dx} &= \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x, \\ \frac{d \operatorname{cn} x}{dx} &= -\operatorname{dn} x \operatorname{sn} x, \\ \frac{d \operatorname{dn} x}{dx} &= -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x. \end{aligned} \right.$ |                                                                             |
| [16] | Fonctions.                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Leur équation différentielle.                                               |
|      | $u = \operatorname{sn} x$ ,                                                                                                                                                                                                                                                                        | $\frac{du}{dx} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$                                 |
|      | $u = \operatorname{cn} x$ ,                                                                                                                                                                                                                                                                        | $\frac{du}{dx} = -k' \sqrt{(1-u^2) \left(1 + \frac{k^2}{k'^2} u^2\right)},$ |
|      | $u = \operatorname{dn} x$ ,                                                                                                                                                                                                                                                                        | $\frac{du}{dx} = -\sqrt{(1-u^2)(u^2-k'^2)},$                                |
|      | $u = \operatorname{tang am } x$ ,                                                                                                                                                                                                                                                                  | $\frac{du}{dx} = \sqrt{(1+u^2)(1+k'^2u^2)},$                                |
|      | $u = \operatorname{cot am } x$ ,                                                                                                                                                                                                                                                                   | $\frac{du}{dx} = -\sqrt{(1+u^2)(k'^2+u^2)},$                                |
|      | $u = \operatorname{séc am } x$ ,                                                                                                                                                                                                                                                                   | $\frac{du}{dx} = -k' \sqrt{(u^2-1) \left(u^2 - \frac{k^2}{k'^2}\right)},$   |
|      | $u = \operatorname{coséc am } x$ ,                                                                                                                                                                                                                                                                 | $\frac{du}{dx} = \sqrt{(u^2-1)(u^2-k^2)},$                                  |
|      | $u = \frac{1}{\operatorname{dn} x}$ ,                                                                                                                                                                                                                                                              | $\frac{du}{dx} = \sqrt{(u^2-1)(1-k'^2u^2)}.$                                |



Ce dernier tableau est utile pour la réduction de l'intégrale

$$\int \frac{du}{\sqrt{(u^2 + m)(u^2 + n)}}$$

aux fonctions elliptiques.

#### FORMULES D'ADDITION.

Considérons maintenant le produit

$$H(x + a) H(x - a) = \theta(x);$$

on a (tableau n° 1)

$$\begin{aligned} \theta(x + 2K) &= \theta(x), \\ \theta(x + 2K'\sqrt{-1}) &= \theta(x) e^{-2\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x + K'\sqrt{-1})}. \end{aligned}$$

Les fonctions  $H^2$  et  $\Theta^2$  satisfont à la même équation; donc

$$H(x + a) H(x - a) = AH^2(x) + B\Theta^2(x).$$

Pour déterminer A et B, on fera  $x = 0$ ; on aura alors

$$-H^2(a) = B\Theta^2(0).$$

On fera ensuite  $x = K'\sqrt{-1}$ ; on aura alors

$$H(K'\sqrt{-1} + a) H(K'\sqrt{-1} - a) = AH^2(K'\sqrt{-1})$$

ou

$$- \Theta(a) \Theta(-a) = -A\Theta^2(0).$$

On a donc

$$B = -\frac{H^2(a)}{\Theta^2(0)}, \quad A = \frac{\Theta^2(a)}{\Theta^2(0)},$$

et, par suite,

$$H(x + a) H(x - a) = \frac{\Theta^2(a) H^2(x) - H^2(a) \Theta^2(x)}{\Theta^2(0)}.$$

On obtient de la même façon une foule d'autres formules, que nous résumons dans le tableau ci-après.

TABLEAU N° 6.

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \text{H}(x-a) \text{H}(x+a) = \frac{\Theta^2(a) \text{H}^2(x) - \text{H}^2(a) \Theta^2(x)}{\Theta^2(0)}, \\
& \text{H}(x-a) \Theta(x+a) \\
& \quad = \frac{\text{H}_1(a) \Theta_1(a)}{\text{H}_1(0) \Theta_1(0)} \text{H}(x) \Theta(x) - \frac{\text{H}(a) \Theta(a)}{\text{H}_1(0) \Theta_1(0)} \text{H}_1(x) \Theta_1(x), \\
& \text{H}(x-a) \text{H}_1(x+a) \\
& \quad = \frac{\Theta_1(a) \Theta(a)}{\Theta(0) \Theta_1(0)} \text{H}(x) \text{H}_1(x) - \frac{\text{H}(a) \Theta(a)}{\Theta(0) \Theta_1(0)} \Theta(x) \Theta_1(x), \\
& \text{H}(x-a) \Theta_1(x+a) \\
& \quad = \frac{\text{H}_1(a) \Theta(a)}{\text{H}_1(0) \Theta(0)} \text{H}(x) \Theta_1(x) - \frac{\text{H}(a) \Theta_1(a)}{\text{H}_1(0) \Theta(0)} \Theta(x) \text{H}_1(x);
\end{aligned} \right\} [17]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \Theta(x-a) \Theta(x+a) = \frac{\Theta^2(a) \Theta^2(x) - \text{H}^2(a) \text{H}^2(x)}{\Theta^2(0)}, \\
& \Theta(x-a) \text{H}(x+a) \\
& \quad = \frac{\text{H}_1(a) \Theta_1(a) \text{H}(x) \Theta(x) + \text{H}(a) \Theta(a) \text{H}_1(x) \Theta_1(x)}{\Theta_1(0) \text{H}_1(0)}, \\
& \Theta(x-a) \text{H}_1(x+a) \\
& \quad = \frac{\Theta(a) \Theta_1(a) \text{H}(x) \text{H}_1(x) - \text{H}(a) \Theta(a) \Theta(x) \Theta_1(x)}{\Theta(0) \Theta_1(0)}, \\
& \Theta(x-a) \Theta_1(x+a) \\
& \quad = \frac{\text{H}_1(a) \Theta(a) \text{H}(x) \Theta_1(x) - \text{H}(a) \Theta_1(a) \Theta(x) \text{H}_1(x)}{\Theta(0) \text{H}_1(0)}.
\end{aligned} \right\} [18]
\end{aligned}$$

En combinant ces formules par voie de division, et en ayant égard aux formules du tableau n° 4, on trouve, par exemple, en divisant la première [17] par la seconde [17],

$$\text{sn}(x+a) = \frac{\text{sn}^2 x - \text{sn}^2 a}{\text{sn} x \text{cn} a \text{dn} a - \text{sn} a \text{cn} x \text{dn} x},$$

et, en multipliant haut et bas par

$$\operatorname{sn} x \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

$$\operatorname{sn}(x+a) = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x};$$

c'est par ce moyen que l'on formera le tableau suivant :

TABLEAU N° 7.

$$[19] \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sn}(a \pm b) = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b \pm \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}, \\ \operatorname{cn}(a \pm b) = \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \mp \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}, \\ \operatorname{dn}(a \pm b) = \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b \mp k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}. \end{array} \right.$$

Pour  $a = b$  :

$$[20] \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sn} 2a = \frac{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a}, \\ \operatorname{cn} 2a = \frac{\operatorname{cn}^2 a - \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a}, \\ \operatorname{dn} 2a = \frac{\operatorname{dn}^2 a - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a}. \end{array} \right.$$

$$[21] \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sn}(a+b) + \operatorname{sn}(a-b) = G \operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b, \\ \operatorname{sn}(a+b) - \operatorname{sn}(a-b) = G \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a, \\ \operatorname{cn}(a+b) + \operatorname{cn}(a-b) = G \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b, \\ \operatorname{cn}(a+b) - \operatorname{cn}(a-b) = -G \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b, \\ \operatorname{dn}(a+b) + \operatorname{dn}(a-b) = G \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b, \\ \operatorname{dn}(a+b) - \operatorname{dn}(a-b) = -G k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b. \end{array} \right.$$

On a posé

$$G = \frac{2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}.$$

Les formules d'addition [19] sont les premières que l'on ait trouvées sur les fonctions directes. Elles sont analogues aux formules fondamentales de la Trigonométrie; mais ce n'est pas comme nous venons de le montrer qu'elles ont été trouvées.

C'est en intégrant l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0,$$

que l'on est arrivé à la découverte des formules d'addition. La méthode la plus simple qui ait été donnée pour l'intégration de cette formule est due à Lagrange. D'autres méthodes, plus simples en apparence, ont l'inconvénient de s'appuyer sur des artifices qui supposent évidemment que l'on connaît d'avance l'intégrale.

( *A suivre.* )