

FAURE

Théorie des indices

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 5-18

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__5_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,

Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

82. D'après la relation (c) du n° 65, les points d , d' étant les sommets des deux trièdres correspondants ABC , $A'B'C'$,

$$\frac{I_{AA'}}{\sin \lambda A \sin \lambda' A'} = - \frac{I_{dd'}}{\pi^2 I_{\lambda\lambda'}},$$

de sorte que la relation à trois termes du n° 56 devient

$$I_{EE'} = - \frac{I_{dd'}}{\pi^2} \sum \frac{\sin \lambda E \cdot \sin \lambda' E'}{I_{\lambda\lambda'}}.$$

Menons par le point d trois plans rectangulaires E , F , G , et par le point d' trois plans E' , F' , G' parallèles aux premiers. Si l'on applique aux trois systèmes EE' , FF' , GG' la relation précédente, et si l'on observe que, par le théorème précédent,

$$I_{EE'} + I_{FF'} + I_{GG'} = \frac{P_0 - S_1^2}{\pi^2},$$

on a celui-ci :

Étant donnés deux trièdres correspondants $\lambda\mu\nu$,

(*) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529.

$\lambda'\mu'\nu'$ par rapport à la surface S et ayant pour sommets les points d, d' , on a la relation

$$\frac{\cos \lambda \lambda'}{I_{\lambda \lambda'}} + \frac{\cos \mu \mu'}{I_{\mu \mu'}} + \frac{\cos \nu \nu'}{I_{\nu \nu'}} = \frac{S_1^2 - P_o}{I_{dd'}},$$

dans laquelle S_1^2 indique la somme des carrés des demi-axes de la surface, P_o la puissance de son centre par rapport à la sphère qui a pour diamètre dd' .

83. On donne une surface du second degré S et deux points d et d' ; par le point d on mène trois axes rectangulaires λ, μ, ν , et par le point d' trois axes λ', μ', ν' parallèles au premier, la somme

$$I_{\lambda \lambda'} + I_{\mu \mu'} + I_{\nu \nu'}$$

est constante quelle que soit la direction des axes. La constante a pour valeur

$$\frac{I_{dd'}}{S^2} - \frac{1}{P},$$

P désignant la puissance du centre de la surface par rapport à la sphère adjointe au système des plans polaires des points d et d' relative à ce centre, $\frac{1}{S^2}$ la somme des carrés des valeurs inverses des demi-axes de la surface S .

Imaginons la sphère S' de rayon r qui a pour centre le point d ; les trièdres $\lambda\mu\nu, \lambda'\mu'\nu'$ sont correspondants par rapport à cette sphère. On a donc, d'après (69), $\frac{1}{S^2}$ étant la somme des valeurs inverses des carrés des demi-axes de S ,

$$\frac{I_{\lambda \lambda'}}{I'_{\lambda \lambda'}} + \frac{I_{\mu \mu'}}{I'_{\mu \mu'}} + \frac{I_{\nu \nu'}}{I'_{\nu \nu'}} = \frac{I_{dd'}}{I'_{dd'}} \left(\frac{r^2}{S^2} - I_d - \frac{r^6}{\pi^2} \frac{I'_{FF'}}{I_{FF'}} \right),$$

(7)

en désignant par F et F' les plans polaires des points d' et d par rapport à la surface S . Or

$$I'_{\lambda\lambda'} = I'_{\mu\mu'} = I'_{\omega\omega'} = -\frac{1}{r^2}, \quad I'_{dd'} = -1;$$

il en résulte

$$\sum I_{\lambda\lambda'} = I_{dd'} \left(\frac{1}{S^2} - \frac{I_d}{r^2} - \frac{r^4}{\pi^2} \frac{I'_{FF'}}{I_{FF'}} \right);$$

mais, f étant le pôle du plan F' par rapport à la sphère, et o le centre de S ,

$$r^6 I'_{FF'} = (d, F') (f, F), \quad \pi^2 I_{FF'} = (o, F) (d', F'),$$

$$I_{dd'} = -\frac{(d', F')}{(o, F')},$$

d'où

$$\frac{r^6 I'_{FF'} I_{dd'}}{\pi^2 I_{FF'}} = -\frac{(d, F') (f, F)}{(o, F) (o, F')}.$$

Nous avons aussi

$$I_{dd'} = -\frac{(d, F)}{(o, F)}, \quad I_d = -\frac{(d, F')}{(o, F')},$$

d'où

$$I_{dd'} I_d = \frac{(d, F) (d, F')}{(o, F) (o, F')},$$

et par conséquent

$$\sum I_{\lambda\lambda'} = \frac{I_{dd'}}{S^2} - \frac{(d, F')}{r^2} \left[\frac{(d, F) - (f, F)}{(o, F) (o, F')} \right].$$

Or

$$df (d, F') = r^2, \quad (d, F) - (f, F) = df \cos(F, F');$$

donc

$$\sum I_{\lambda\lambda'} = \frac{I_{dd'}}{S^2} - \frac{\cos(F, F')}{(o, F) (o, F')}.$$

Si l'on construit la sphère adjointe aux plans F , F' relative au centre o de la surface S , la puissance du point o

par rapport à cette sphère a pour valeur $\frac{(o, F)(o, F')}{\cos(F, F')}$; le théorème est donc démontré.

Lorsque les points d et d' coïncident, on voit que la somme des indices de trois axes rectangulaires passant par un point fixe d est égale à la somme des carrés des inverses des demi-axes de la surface S , multipliée par l'indice du point d et diminuée de l'inverse du carré de la distance du centre de S au plan polaire du point d ,

$$I_\lambda + I_\mu + I_\nu = \frac{I_d}{S^2} - \frac{1}{(o, F)^2}.$$

84. D'après la relation (b) du n° 65, on a

$$\frac{I_{aa'}}{(a, \alpha)(a', \alpha')} = \frac{I_{DD'}}{I_{\alpha\alpha'}},$$

D et D' désignant les plans des deux triangles correspondants abc , $a'b'c'$, α et α' les côtés opposés aux sommets a et a' . A l'aide de cette relation, celle à trois termes du n° 55 nous donne

$$I_{\alpha\alpha'} = I_{DD'} \left[\frac{(e, \alpha)(e', \alpha')}{I_{\alpha\alpha'}} + \frac{(e, \beta)(e', \beta')}{I_{\beta\beta'}} + \frac{(e, \gamma)(e', \gamma')}{I_{\gamma\gamma'}} \right].$$

Supposons les plans D , D' parallèles. Traçons dans le premier deux droites ε , φ perpendiculaires entre elles, et dans le second deux droites ε' , φ' parallèles aux premières. Si l'on prend le point e à l'infini sur ε , le point e' à l'infini sur ε' , et que ε_0 soit le demi-diamètre de S parallèle à ε , la relation précédente donne

$$\frac{1}{\varepsilon_0^2} = I_{DD'} \sum \frac{\cos \varphi \alpha \cos \varphi \alpha'}{I_{\alpha\alpha'}},$$

et, si φ_0 est le demi-diamètre de S parallèle à φ , on a de

même

$$\frac{1}{\varphi_1^2} = I_{DD'} \sum \frac{\cos \varepsilon \alpha \cos \varepsilon \alpha'}{I_{\alpha \alpha'}}.$$

L'addition de ces deux égalités donne ce théorème :

Si dans deux plans parallèles D, D' on prend deux triangles correspondants $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ par rapport à la surface S, la somme

$$\frac{\cos \alpha \alpha'}{I_{\alpha \alpha'}} + \frac{\cos \beta \beta'}{I_{\beta \beta'}} + \frac{\cos \gamma \gamma'}{I_{\gamma \gamma'}}$$

est égale à la somme des carrés des inverses des demi-axes de la section diamétrale parallèle aux plans D, D' divisée par l'indice du système de ces plans.

Propriétés des systèmes de points, droites et plans conjugués à une surface du second ordre.

85. Deux points sont conjugués lorsque le plan polaire de l'un passe par l'autre. Deux droites sont conjuguées lorsque la polaire de l'une rencontre l'autre. Deux plans sont conjugués lorsque le pôle de l'un est situé dans l'autre. Un point et une droite sont conjugués lorsque le plan polaire du point contient la droite. Une droite et un plan sont conjugués lorsque le pôle du plan est sur la droite.

Lorsque deux systèmes correspondants coïncident, ils forment un système conjugué.

Les théorèmes que nous allons énoncer se déduisent immédiatement de ceux qui ont été démontrés précédemment : nous nous bornerons pour chacun d'eux à rappeler le numéro d'où ils sont extraits.

1° *Le produit des indices de deux points conjugués est égal à l'indice de la droite qu'ils déterminent, mul-*

multiplié par le carré de leur distance

$$I_a I_b = \overline{ab}^2 I_\gamma. \quad (59, 3^\circ)$$

2° Le produit des indices d'un point et d'une droite conjugués est égal à l'indice du plan déterminé par le point et la droite, multiplié par le carré de la distance du point à la droite

$$I_c I_\gamma = (c, \gamma)^2 I_D. \quad (65, b)$$

3° Le produit des indices d'un plan et de son pôle est égal et de signe contraire au carré de la distance du pôle au plan, divisé par π^2 ,

$$I_d I_D = - \frac{(d, D)^2}{\pi^2}. \quad (65, a)$$

4° Le produit des indices de deux droites conjuguées (qui se coupent) est égal à l'indice du plan qu'elles déterminent, multiplié par l'indice de leur point d'intersection et par le carré du sinus de leur angle

$$I_\beta I_\gamma = I_a I_D \sin^2 \beta \gamma. \quad (63, 2^\circ)$$

5° Le produit des indices d'une droite et d'un plan conjugués, pris en signe contraire, est égal à l'indice de leur point d'intersection, multiplié par le carré du sinus de leur angle et divisé par π^2 ,

$$I_\nu I_C = - \frac{I_d \sin^2 (\nu, C)}{\pi^2}. \quad (65, c)$$

6° Le produit des indices de deux droites polaires réciproques par rapport à la surface S est égal et de signe contraire au carré de leur plus courte distance, multiplié par le carré du sinus de leur angle et divisé par π^2 ,

$$I_\gamma I_\nu = - \frac{|\gamma \cdot \nu|^2}{\pi^2}. \quad (65, d)$$

7° Le produit des indices de deux plans conjugués, pris en signe contraire, est égal à l'indice de leur droite d'intersection multiplié par le carré du sinus de l'angle de ces plans et divisé par π^2 ,

$$I_A I_B = - \frac{\sin^2 ABI}{\pi^2}. \quad (61, 3^\circ)$$

8° Le produit des indices des sommets d'un triangle conjugué est égal à l'indice du plan du triangle, multiplié par le carré du double de sa surface

$$I_a I_b I_c = 4 \overline{abc}^2 I_D. \quad (59, 2^\circ)$$

9° Le produit des indices des faces d'un trièdre conjugué est égal à l'indice de son sommet, multiplié par le carré du sinus de l'angle solide formé par des normales à ces trois faces et divisé par π^4 ,

$$I_A I_B I_C = \frac{I_d \sin^2 ABC}{\pi^4}. \quad (61, 2^\circ)$$

10° Le produit des indices des côtés d'un triangle conjugué est égal au carré de l'indice du plan du triangle, multiplié par le carré de sa surface et divisé par le carré du rayon du cercle qui lui est circonscrit,

$$I_\alpha I_\beta I_\gamma = \frac{D^2}{R^2} I_D^2. \quad (64, 1^\circ)$$

11° Le produit des indices des arêtes d'un trièdre conjugué est égal au carré de l'indice de son sommet, pris en signe contraire, multiplié par le carré du sinus de l'angle solide déterminé par ces arêtes et divisé par π^2 ,

$$I_\lambda I_\mu I_\nu = - \frac{I_d^2 \sin^2 \lambda \mu \nu}{\pi^2}. \quad (63, 1^\circ)$$

12° Le produit, pris en signe contraire, des indices

des sommets d'un tétraèdre conjugué est égal au carré du sextuple de son volume, divisé par π^2 ,

$$I_a I_b I_c I_d = - \frac{(6V)^2}{\pi^2}. \quad (59, 1^0)$$

13° Le produit, pris en signe contraire, des indices des arêtes d'un tétraèdre conjugué est égal à la sixième puissance du sextuple de son volume, divisé par le carré du produit des arêtes et par π^6 ,

$$I_a I_b I_c I_d I_e I_f = - \frac{(6V)^6}{\pi^6 P^2}. \quad (65, e)$$

14° Le produit, pris en signe contraire, des indices des faces d'un tétraèdre conjugué est égal à la sixième puissance du triple de son volume divisé par quatre fois le produit des carrés des aires des faces et par π^6 ,

$$I_A I_B I_C I_D = - \frac{(3V)^6}{4\pi^6 A^2 B^2 C^2 D^2}. \quad (61, 1^0)$$

15° La somme des inverses des indices de deux points conjugués est égale à l'inverse de l'indice du point milieu de la corde déterminée, dans la surface, par la droite qui joint les deux points (60, 3°).

16° La somme des inverses des indices des sommets d'un triangle conjugué est égal à l'inverse de l'indice du centre de la section déterminée, dans la surface, par le plan du triangle (60, 2°).

17° La somme des inverses des indices des sommets d'un tétraèdre conjugué est égale à -1 (60, 1°).

18° La somme des inverses des indices des côtés d'un triangle conjugué est égale à la somme des carrés des inverses des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan du triangle, divisé par l'indice de ce plan (84).

19° *La somme des inverses des indices des arêtes d'un trièdre conjugué est égale au carré de la distance du centre de la surface au sommet du trièdre diminué de la somme des carrés des demi-axes de la surface et divisé par l'indice du sommet du trièdre, pris en signe contraire (82).*

20° *La somme des inverses des indices des arêtes d'un tétraèdre conjugué est égale à la somme des carrés des demi-axes de la surface prise en signe contraire (71).*

21° *Un tétraèdre étant conjugué à la surface S, la somme des rapports que l'on obtient en divisant le carré de la distance d'un point o' à chaque sommet du tétraèdre, par l'indice de ce sommet, est égale à la somme des carrés des demi-axes de la surface diminuée du carré de la distance du centre de la surface à ce point o' (72).*

22° *Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface S, si l'on circonscrit au tétraèdre une seconde surface S', l'indice du centre de S par rapport à S' est égal à la somme des carrés des rapports que l'on obtient en divisant trois diamètres conjugués de S par les diamètres de S' respectivement parallèles (74).*

Si S' est une sphère, on a ce théorème :

23° *Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface S, la somme des carrés des demi-axes de cette surface est égale à la puissance de son centre par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre (73).*

Si S est une sphère, on a celui-ci :

24° *Un tétraèdre étant conjugué à une sphère, si l'on circonscrit à ce tétraèdre une surface S' du second degré, la somme des carrés des inverses des demi-axes de S' est égale à l'indice du centre de la sphère par rapport à S' divisé par le carré du rayon de la sphère (75).*

25° Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface S , la somme des inverses des indices de ses faces, prise en signe contraire, est égale à la somme des carrés des rectangles construits sur les demi-axes de la surface (77).

26° Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface S , la somme des inverses des indices de ses faces, prise en signe contraire, est égale à l'indice du centre d'une sphère inscrite au tétraèdre divisé par le carré du rayon de cette sphère et multiplié par π^2 (55).

La comparaison de ces deux théorèmes donne le suivant :

27° Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface S , la somme des carrés des inverses des demi-axes de cette surface est égale à l'indice du centre d'une sphère inscrite au tétraèdre divisé par le carré du rayon de cette sphère (80).

28° Un tétraèdre est conjugué à la surface S ; d'un point quelconque f , on abaisse des perpendiculaires sur ses faces, et l'on fait passer une sphère par les pieds de ces perpendiculaires. Si l'on désigne par g la projection du point f sur le plan polaire de ce point f pris par rapport à la surface S , la somme des carrés des inverses des demi-axes de la surface est donnée par l'expression

$$\frac{I_f}{fg} \left(1 - \frac{P_f}{P_g} \right),$$

P_f et P_g étant les puissances des points f et g par rapport à la sphère (78).

29° Un tétraèdre est conjugué à la surface S ; du centre de cette surface on abaisse des perpendiculaires sur les faces du tétraèdre, et l'on fait passer une sphère

par les pieds des perpendiculaires. La somme des carrés des inverses des demi-axes de la surface est égale à l'inverse de la puissance de son centre par rapport à la sphère (79).

30° Un tétraèdre $abcd$ ou $ABCD$ étant conjugué à la surface S , l'indice du système des points e, e' est donné par la relation

$$-\pi^2 I_{ee'} = \left. \begin{aligned} & \frac{(e, A)(e', A)}{I_A} + \frac{(e, B)(e', B)}{I_B} \\ & + \frac{(e, C)(e', C)}{I_C} + \frac{(e, D)(e', D)}{I_D} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

l'indice du système des plans E, E' est donné par la relation

$$-\pi^2 I_{EE'} = \left. \begin{aligned} & \frac{(a, E)(a, E')}{I_a} + \frac{(b, E)(b, E')}{I_b} \\ & + \frac{(c, E)(c, E')}{I_c} + \frac{(d, E)(d, E')}{I_d} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

l'indice du système des droites ϵ, ϵ' est donné par les relations

$$\begin{aligned} \pi^1 ef.c'f' I_{\epsilon\epsilon'} &= \sum \left| \begin{array}{cc} (e, A) & (f, A) \\ (e, B) & (f, B) \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} (e', A) & (f', A) \\ (e', B) & (f', B) \end{array} \right| \frac{1}{I_A I'}; \\ &= \pi^1 \sin EF \sin E' F' I_{\epsilon\epsilon'} \\ &= \sum \left| \begin{array}{cc} (a, E) & (a, F) \\ (b, E) & (b, F) \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} (a, E') & (a, F') \\ (b, E') & (b, F') \end{array} \right| \frac{1}{I_a I_b}, \end{aligned}$$

selon que les droites sont déterminées par deux points ou deux plans (57).

31° Un triangle abc ou $\alpha\beta\gamma$ étant conjugué à la surface S , si l'on prend dans le plan du triangle deux points e, e' , on a

$$I_{ee'} = \frac{(e, \alpha)(e', \alpha)}{(\alpha, \alpha)^2} I_a + \frac{(e, \beta)(e', \beta)}{(\beta, \beta)^2} I_b + \frac{(e, \gamma)(e', \gamma)}{(\gamma, \gamma)^2} I_c, \quad (58)$$

ou bien, D étant le plan du triangle,

$$I_{ee'} = I_D \left[\frac{(e, \alpha)(e', \alpha)}{I_\alpha} + \frac{(e, \beta)(e', \beta)}{I_\beta} + \frac{(e, \gamma)(e', \gamma)}{I_\gamma} \right].$$

32° Un trièdre ABC ou $\lambda\mu\nu$ étant conjugué à la surface S, si l'on mène par son sommet deux plans E, E', on a

$$I_{EE'} = \left. \begin{aligned} & \frac{\sin \lambda E \sin \lambda E'}{\sin^2 \lambda A} I_A + \frac{\sin \mu E \sin \mu E'}{\sin^2 \mu B} I_B \\ & + \frac{\sin \nu E \sin \nu E'}{\sin^2 \nu C} I_C, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

ou bien, d étant le sommet du trièdre,

$$-\pi^2 I_{EE'} = I_d \left(\frac{\sin \lambda E \sin \lambda E'}{I_\lambda} + \frac{\sin \mu E \sin \mu E'}{I_\mu} + \frac{\sin \nu E \sin \nu E'}{I_\nu} \right).$$

33° Un triangle abc ou $\alpha\beta\gamma$ étant conjugué à la surface S, si l'on trace dans son plan deux droites $\varepsilon, \varepsilon'$, on a

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \frac{(a, \varepsilon)(a, \varepsilon')}{(a, \alpha)^2} I_\alpha + \frac{(b, \varepsilon)(b, \varepsilon')}{(b, \beta)^2} I_\beta + \frac{(c, \varepsilon)(c, \varepsilon')}{(c, \gamma)^2} I_\gamma, \quad (57)$$

ou bien, D désignant le plan du triangle abc,

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = I_D \left[\frac{(a, \varepsilon)(a, \varepsilon')}{I_a} + \frac{(b, \varepsilon)(b, \varepsilon')}{I_b} + \frac{(c, \varepsilon)(c, \varepsilon')}{I_c} \right].$$

34° Un trièdre ABC ou $\lambda\mu\nu$ étant conjugué à la surface S, si, par son sommet, on mène deux droites $\varepsilon, \varepsilon'$, on a

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \left. \begin{aligned} & \frac{\sin(\varepsilon, A) \sin(\varepsilon', A)}{\sin^2(\lambda, A)} I_\lambda + \frac{\sin(\varepsilon, B) \sin(\varepsilon', B)}{\sin^2(\mu, B)} I_\mu \\ & + \frac{\sin(\varepsilon, C) \sin(\varepsilon', C)}{\sin^2(\nu, C)} I_\nu, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

ou bien, d étant le sommet du trièdre,

$$- \pi I_{d'} = I_d \left[\frac{\sin(\varepsilon, A) \sin(\varepsilon', A)}{I_A} + \frac{\sin(\varepsilon, B) \sin(\varepsilon', B)}{I_B} + \frac{\sin(\varepsilon, C) \sin(\varepsilon', C)}{I_C} \right].$$

35° Un segment ab étant conjugué à la surface S , si l'on prend sur ce segment deux points e, e' ,

$$\overline{ab}^2 I_{ee'} = eb \cdot e'b I_a + ea \cdot e'a I_b. \quad (55)$$

36° Un dièdre AB étant conjugué à la surface S , si par son arête on mène deux plans E, E' , on a

$$\sin^2 AB I_{EE'} = \sin EB \sin E' B I_A + \sin EA \sin E' A I_B. \quad (56)$$

37° Un angle $\lambda\mu$ étant conjugué à la surface S , si l'on mène par son sommet et dans son plan les droites $\varepsilon, \varepsilon'$, on a

$$\sin^2 \lambda\mu I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sin(\varepsilon, \mu) \sin(\varepsilon', \mu) I_\lambda + \sin(\varepsilon, \lambda) \sin(\varepsilon', \lambda) I_\mu. \quad (57)$$

38° Si l'on suppose que le sommet d du tétraèdre $abcd$ conjugué à la surface S coïncide avec le centre o de la surface, les points a, b, c seront à l'infini et oa, ob, oc seront les directions de trois diamètres conjugués de la surface. Nous désignerons par λ, μ, ν les longueurs des demi-diamètres ainsi déterminés. Le plan D sera à l'infini, et les plans A, B, C passent respectivement par les diamètres $\mu\nu, \nu\lambda, \lambda\mu$.

Les relations exprimées dans les théorèmes précédents (30°) deviennent les suivantes :

Indice du système des deux points e, e' :

$$I_{ee'} = \frac{(e, A)(e', A)}{\lambda^2 \sin^2(\lambda, A)} + \frac{(e, B)(e', B)}{\mu^2 \sin^2(\mu, B)} + \frac{(e, C)(e', C)}{\nu^2 \sin^2(\nu, C)} - 1.$$

Indice du système des deux plans E, E' :

$$\begin{aligned} \pi^2 I_{EE'} &= (o, E)(o, E') - \lambda^2 \sin \lambda E \sin \lambda E' \\ &\quad - \mu^2 \sin \mu E \sin \mu E' - \nu^2 \sin \nu E \sin \nu E'. \end{aligned}$$

Indice du système de deux droites déterminées par deux de leurs points :

$ef, e'f' I_{\varepsilon, \varepsilon'}$

$$= \sum \left| \begin{array}{cc} (e, A) & (f, A) \\ (e, B) & (f, B) \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} (e', A) & (f', A) \\ (e', B) & (f', B) \end{array} \right| \frac{1}{\lambda^2 \mu^2 \sin^2(\lambda, A) \sin^2(\mu, B)} \\ - \sum \left| \begin{array}{cc} (e, C) & (f, C) \\ \text{I} & \text{I} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} (e', C) & (f', C) \\ \text{I} & \text{I} \end{array} \right| \frac{1}{\nu^2 \sin^2(\nu, C)}.$$

Indice du système de deux droites déterminées par deux plans :

$\pi^2 \sin EF \sin E' F' I_{\varepsilon, \varepsilon'}$

$$= - \sum \left| \begin{array}{cc} \sin \lambda E & \sin \lambda F \\ \sin \mu E & \sin \mu F \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \sin \lambda E' & \sin \lambda F' \\ \sin \mu E' & \sin \mu F' \end{array} \right| \lambda^2 \mu^2 \\ + \sum \left| \begin{array}{cc} \sin \nu E & \sin \nu F \\ (o, E) & (o, F) \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \sin \nu E' & \sin \nu F' \\ (o, E') & (o, F') \end{array} \right| \nu^2.$$