

H. LAURENT

Théorie élémentaire des fonctions elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 481-495

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__481_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (*).]

CONSIDÉRATIONS NOUVELLES SUR LES FONCTIONS
AUXILIAIRES DE JACOBI.

Nous voilà conduits à étudier les fonctions auxiliaires évidemment plus simples que les fonctions doublement périodiques qu'elles engendrent; mais, sous forme de produit, elles paraissent peu maniables, et nous allons essayer de les développer en série.

En définitive, il est à peu près établi que $\operatorname{sn} x$ (et l'on verrait de même que $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$) peut être considéré comme quotient de deux fonctions admettant l'une ses zéros, l'autre ses infinis. Ces fonctions n'ont qu'une période, mais elles se reproduisent, à un facteur commun près, quand on augmente leur variable d'une quantité convenablement choisie et qui sera une seconde période de leur quotient.

Désignons alors par $\theta(x)$ une fonction possédant la période ω , et développable par la formule de Fourier suivant les puissances de $e^{\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{-1}}$, partageons le plan en parallélogrammes de côtés ω et ϖ , et proposons-nous de faire en sorte que dans chaque parallélogramme la fonction θ possède μ zéros.

Le nombre μ de ces zéros devra être égal à l'intégrale de $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{\theta'(x)}{\theta(x)}$, prise le long du périmètre d'un

(*) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XVI, p. 78, 211, 361, 385, 433.

Ann de Mathémat., 2^e série, t. XVI. (Novembre 1877.)

parallélogramme, et cela quel que soit le point que l'on prendra pour sommet, si l'on veut que les zéros soient régulièrement distribués dans le plan. Or la valeur que prend notre intégrale le long des côtés parallèles à ϖ est nulle, puisque la fonction, admettant la période ω , prend des valeurs égales sur ces côtés, tandis que dx y prend des valeurs égales et de signes contraires. On devra donc avoir, en intégrant seulement le long des deux autres côtés,

$$(1) \quad \mu = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_a^{a+\omega} \left[\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \frac{\theta'(x+\varpi)}{\theta(x+\varpi)} \right] dx,$$

et cela quel que soit x ; cette équation détermine θ . On peut poser

$$(2) \quad \frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \frac{\theta'(x+\varpi)}{\theta(x+\varpi)} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots,$$

et déterminer les coefficients indéterminés $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ par l'équation (1); cette équation n'en détermine qu'un seul, et nous supposons alors, pour simplifier, $\beta = 0, \gamma = 0, \dots$. La formule (1) donne alors

$$\mu = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_a^{a+\omega} \alpha dx = \frac{\alpha}{2\pi\sqrt{-1}},$$

d'où

$$\alpha = \frac{2\pi\mu\sqrt{-1}}{\omega},$$

et, en remplaçant $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ par leurs valeurs dans l'équation (2), on a

$$\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \frac{\theta'(x+\varpi)}{\theta(x+\varpi)} = \frac{2\pi\mu\sqrt{-1}}{\omega},$$

ou, en intégrant,

$$\log \frac{\theta(x)}{\theta(x+\varpi)} = \frac{2\pi\mu\sqrt{-1}}{\omega} (x+c),$$

c désignant une constante. On en déduit

$$\theta(x + \omega) = \theta(x) e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega} [\mu(x + c)]}.$$

Ainsi il suffira d'assujettir la fonction $\theta(x)$ aux conditions

$$(3) \quad \begin{cases} \theta(x + \omega) = \theta(x), \\ \theta(x + \varpi) = \theta(x) e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega} [\mu(x + c)]}, \end{cases}$$

pour obtenir une fonction telle que nous la désirons. La première formule est satisfaite en posant

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega} n x}$$

ou

$$(4) \quad \theta(x) = \sum e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega} [n x - c n]}.$$

Nous allons déterminer $\varphi(n)$ de manière à satisfaire à la seconde condition (3); on a

$$\begin{aligned} \theta(x + \varpi) &= \sum e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega} [n x + n \varpi + \varphi(n)]} \\ &= \sum e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega} [(n + \mu) x + \varphi(n + \mu) + \varphi(n) - \varphi(n + \mu) - \mu x + n \varpi]}. \end{aligned}$$

Si l'on pose alors

$$(5) \quad \varphi(n) = \varphi(n + \mu) + n \varpi = -c \mu,$$

on aura

$$\theta(x + \varpi) = \sum e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega} [(n + \mu) x + \varphi(n + \mu)]} e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega} [\mu x + c]},$$

ou

$$\theta(x + \varpi) = \theta(x) e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega} [\mu(x + c)]},$$

et les formules (3) auront lieu. L'équation aux différences (5) ne détermine pas complètement $\varphi(x)$: elle

laisse arbitraires $\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(\mu)$. En appelant $\varphi(m)$ une de ces quantités, on a

$$\begin{aligned}\varphi(m + \mu) &= \varphi(m) + c\mu + m\varpi, \\ \varphi(m + 2\mu) &= \varphi(m + \mu) + c\mu + (m + \mu)\varpi, \\ &\dots\dots\dots, \\ \varphi(m + i\mu) &= \varphi(m + \overline{i-1}\mu) + c\mu + (m + \overline{i-1}\mu)\varpi,\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\varphi(m + i\mu) = \varphi(m) + i\mu c + \varpi \frac{i}{2} (2m - i\mu - \mu),$$

et $\theta(x)$ prend la forme suivante, en remplaçant $\varphi(n)$ dans (4) par sa valeur

$$\theta(x) = e^{\varphi(0)}\theta_0(x) + e^{\varphi(1)}\theta_1(x) + \dots + e^{\varphi(\mu-1)}\theta_{\mu-1}(x),$$

où l'on a posé

$$(6) \quad \theta_m(x) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}} \left[(m + i\mu)x + \mu ic + \frac{i}{2} \varpi (2m + i\mu - \mu) \right].$$

Donc :

1° Les fonctions monodromes et monogènes satisfaisant aux formules

$$(3) \quad \begin{cases} \theta(x + \omega) = \theta(x), \\ \theta(x + \varpi) = \theta(x) e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega} \mu(x+c)} \end{cases}$$

sont fonctions linéaires et homogènes de μ d'entre elles;

2° Ces fonctions existent réellement, car la série (6) est convergente si la partie imaginaire de $\frac{\varpi}{\omega}$ est positive, ce que l'on peut toujours supposer. En effet, alors la racine $i^{\text{ième}}$ du $i^{\text{ième}}$ terme de la série (6) tend vers zéro;

3° Ces fonctions ont μ zéros dans le parallélogramme des périodes ω , ϖ .

Enfin le quotient de deux quelconques de ces fonctions a évidemment les périodes ω et ϖ , ce qui prouve, *a fortiori*, l'existence des fonctions à deux périodes arbitraires et à μ zéros ou du $\mu^{\text{ième}}$ ordre.

DES FONCTIONS DU PREMIER ORDRE.

Nous dirons qu'une fonction elliptique auxiliaire est d'ordre μ quand elle aura μ zéros dans son parallélogramme des périodes. Les fonctions du premier ordre satisfont aux équations

$$\begin{aligned}\theta(x + \omega) &= \theta(x), \\ \theta(x + \varpi) &= \theta(x) e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}(x+c)},\end{aligned}$$

et, θ désignant l'une d'elles, les autres seront égales à θ , à un facteur constant près. On pourra alors poser

$$\theta = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\left(mx + mc + \frac{m^2}{2}\varpi\right)}.$$

Nous retrouverons cette fonction plus loin. Observons toutefois qu'elle n'engendrera pas de fonctions aux périodes simultanées ω et ϖ ; mais il faut remarquer que, si la fonction en question est du premier ordre par rapport aux périodes ω et ϖ , elle sera du second ordre si l'on prend pour périodes ω et 2ϖ ou 2ω et ϖ : c'est pour cela que, devant la rencontrer de nouveau dans tous les ordres, nous ne nous en occuperons pas ici.

DES FONCTIONS DU SECOND ORDRE

Les fonctions du second ordre satisfont aux équations

$$1) \quad \begin{cases} \theta(x + \omega) = \theta(x), \\ \theta(x + \varpi) = \theta(x) e^{-\frac{2-\sqrt{-1}}{\omega} 2x + c} \end{cases}$$

Elles sont au nombre de deux distinctes θ_0 et θ_1 , la solution la plus générale étant $A_0 \theta_0 + A_1 \theta_1$, A_0 et A_1 désignant deux constantes arbitraires. On a d'ailleurs

$$2) \quad \theta_0(x) = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} e^{\frac{2-\sqrt{-1}}{\omega} [2lx + 2u + l\varpi - l\varpi]},$$

$$3) \quad \theta_1(x) = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} e^{\frac{2-\sqrt{-1}}{\omega} [2(l+1)x + 2\gamma + l\varpi + \gamma\varpi]}.$$

Les fonctions qui servent de numérateur et de dénominateur à $\operatorname{sn} x$ sont du second ordre par rapport aux périodes $2K'\sqrt{-1}$ et $4K$. En effet, ces fonctions satisfont aux relations

$$4) \quad \begin{cases} \varphi(x + 4K) = \varphi(x), \\ \varphi(x + 2K'\sqrt{-1}) = -\varphi(x) e^{-\frac{\sqrt{-1}}{K}(x + K\sqrt{-1})} \end{cases}$$

Or la seconde de ces relations peut s'écrire

$$\varphi(x + 2K'\sqrt{-1}) = \varphi(x) e^{-\frac{2-\sqrt{-1}}{4K} 2(x + K + K'\sqrt{-1})}.$$

Ces formules coïncideront donc avec (1), en posant

$$\omega = 4K, \quad \varpi = 2K'\sqrt{-1}, \quad c = K + K'\sqrt{-1},$$

le numérateur et le dénominateur de $\operatorname{sn} x$ seront donc

de la forme $A_0 \theta_0(x) + A_1 \theta_1(x)$, et l'on aura

$$(5) \quad \begin{cases} \theta_0(x) = \sum e^{\frac{-\sqrt{-1}}{2K} [2ix + 2, K + 2i^2 K' \sqrt{-1}]} , \\ \theta_1(x) = \sum e^{\frac{\pi \sqrt{-1}}{2K} [(2i+1)x + 2iK + 2iK' \sqrt{-1}(i+1)]} . \end{cases}$$

Groupons les termes correspondant à des valeurs de i égales et de signes contraires, et posons toujours

$q = e^{-\tau \frac{K'}{K}}$, nous aurons

$$\begin{aligned} \theta_0(x) &= 1 - 2q^{i^2} \cos \frac{\pi x}{K} + 2q^{2^2} \cos \frac{2\pi x}{K} + \dots \\ &\quad + (-1)^i 2q^{i^2} \cos \frac{i\pi x}{K} + \dots , \\ \theta_1(x) &= \sqrt{-1} \left(2q^0 \sin \frac{\pi x}{2K} - 2q^{i(i+1)} \sin \frac{3\pi x}{2K} + \dots \right. \\ &\quad \left. \pm 2q^{i(i+1)} \sin \frac{(2i+1)\pi x}{2K} + \dots \right) . \end{aligned}$$

Jacobi désigne la fonction θ_0 par $\Theta(x)$; quant à la fonction θ_1 , nous la remplacerons par $\frac{q^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{-1}} \theta_1$, ce qui lui donne plus de symétrie, et nous la représenterons encore, avec Jacobi, par $H(x)$; nous aurons alors

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= 1 - 2q \cos \frac{\pi x}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi x}{4} + \dots + (-1)^i 2q^{i^2} \cos \frac{i\pi x}{K} \dots , \\ H(x) &= q^{\frac{1}{4}} \sin \frac{\pi x}{2K} - q^{\frac{9}{4}} \sin \frac{3\pi x}{2K} + \dots \pm q^{\frac{(2i+1)^2}{4}} \sin \frac{(2i+1)\pi x}{2K} \mp \dots . \end{aligned}$$

Du reste, les fonctions les plus générales satisfaisant aux formules (4) sont de la forme $A\Theta(x) + BH(x)$.

Aux fonctions Θ et H on adjoint aujourd'hui les fonctions $\Theta(x+K)$, que l'on désigne par $\Theta_1(x)$, et $H(x+K)$, que l'on désigne par $H_1(x)$. Si, dans les formules (5), on remplace x par $x+K$, on trouve

alors

$$\Theta_1(x) = 1 + 2q \cos \frac{\pi x}{K} + 2q^4 \cos \frac{\pi x}{K} + \dots,$$

$$H_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos \frac{\pi x}{2K} + 2q^{\frac{9}{4}} \cos \frac{3\pi x}{2K} + \dots$$

Il existe entre les fonctions H et Θ une relation remarquable : quand on change x en $x + K'\sqrt{-1}$, Θ devient égal à $\sqrt{-1} H(x) e^{-\frac{\tau\sqrt{-1}}{2K}(2x+K'\sqrt{-1})}$, ce que l'on vérifie sans peine en remplaçant x par $x + K'\sqrt{-1}$ dans $\Theta(x)$ ou, ce qui revient au même, dans son égal $\theta_0(x)$ exprimé par la formule (5).

Voici le détail du calcul :

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= \sum e^{\frac{\tau\sqrt{-1}}{2K}(2ix+2iK+2i^3K'\sqrt{-1})}, \\ \Theta(x + K'\sqrt{-1}) &= \sum e^{\frac{\tau\sqrt{-1}}{2K}[2ix+2iK+(2i^3+2i)K'\sqrt{-1}]} \\ &= e^{-\frac{\tau\sqrt{-1}}{4K}(2x+K'\sqrt{-1})} e^{-\frac{\pi K'}{4K}} \\ &\quad \times \sum e^{\frac{\tau\sqrt{-1}}{2K}[(2i+1)x+2iK+2i(1+1)K'\sqrt{-1}]} \\ &= \sqrt{-1} e^{-\frac{\tau\sqrt{-1}}{4K}(2x+K'\sqrt{-1})} H(x). \end{aligned}$$

On vérifiera facilement, d'une manière analogue, les formules non démontrées, que nous résumons dans le tableau suivant :

TABLEAU N° 1.

$$[1] \left\{ \begin{aligned} \Theta(x) &= 1 - 2q \cos \frac{\pi x}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi x}{K} - 2q^9 \cos \frac{3\pi x}{K} + \dots, \\ \Theta_1(x) &= 1 + 2q \cos \frac{\pi x}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi x}{K} + 2q^9 \cos \frac{3\pi x}{K} + \dots, \\ H(x) &= 2q^{\frac{1}{4}} \sin \frac{\pi x}{2K} - 2q^{\frac{9}{4}} \sin \frac{3\pi x}{2K} + 2q^{\frac{25}{4}} \sin \frac{5\pi x}{2K} - \dots, \\ H_1(x) &= 2q^{\frac{1}{4}} \cos \frac{\pi x}{2K} + 2q^{\frac{9}{4}} \cos \frac{3\pi x}{2K} + 2q^{\frac{25}{4}} \cos \frac{5\pi x}{2K} + \dots, \end{aligned} \right.$$

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

$$\begin{aligned}
[2] \quad & \begin{cases} \Theta(x+K) = \Theta_1(x), & H(x+K) = H_1(x), \\ \Theta_1(x+K) = \Theta(x); & H_1(x+K) = -H(x). \end{cases} \\
[3] \quad & \begin{cases} \Theta(x+2K) = \Theta(x), & H(x+2K) = -H(x), \\ \Theta_1(x+2K) = \Theta_1(x); & H_1(x+2K) = -H_1(x), \end{cases} \\
[4] \quad & 4K \text{ est une période de } \Theta, \Theta_1, H, H_1. \\
[5] \quad & \begin{cases} \Theta(x+2K'\sqrt{-1}) = -\Theta(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})}, \\ \Theta_1(x+2K'\sqrt{-1}) = \Theta_1(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})}, \\ H(x+2K'\sqrt{-1}) = -H(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})}, \\ H_1(x+2K'\sqrt{-1}) = H_1(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})}. \end{cases} \\
[6] \quad & \begin{cases} \Theta(x+K'\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}H(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}(2x+K'\sqrt{-1})}, \\ \Theta_1(x+K'\sqrt{-1}) = H_1(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}(2x+K'\sqrt{-1})}, \\ H(x+K'\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\Theta(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}(2x+K'\sqrt{-1})}, \\ H_1(x+K'\sqrt{-1}) = \Theta_1(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}(2x+K'\sqrt{-1})}. \end{cases} \\
[7] \quad & \begin{cases} \Theta(-x) = \Theta(x), & H(-x) = -H(x), \\ \Theta_1(-x) = \Theta_1(x), & H_1(-x) = H(x). \end{cases}
\end{aligned}$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS $\Theta, \Theta_1, H, H_1 = 0$.

On a évidemment

$$H(x) = 0,$$

et, en vertu des formules [3] du tableau n° 1, comme

$$H(x+2K) = -H(x),$$

on a aussi

$$H(2K) = 0.$$

$H(x)$ n'ayant que deux zéros dans le parallélogramme

des périodes $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$, les zéros seront de la forme suivante :

$$4jK + 2j'K'\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad (4j + 2)K + 2j'K'\sqrt{-1},$$

ou, si l'on veut,

$$(H) \quad 2jK + 2j'K'\sqrt{-1},$$

j et j' désignant deux entiers. Mais, d'après [2], $H(x)$ est égal à $H_1(x + K)$; donc $H_1(x + K)$ est nul quand x est de la forme précédente; donc enfin les zéros de H_1 sont de la forme

$$(H_1) \quad (2j + 1)K + 2j'K'\sqrt{-1};$$

enfin, en vertu de [6], les zéros de Θ sont ceux de H augmentés de $K'\sqrt{-1}$; ils sont compris dans la formule

$$(\Theta) \quad 2jK + (2j' + 1)K'\sqrt{-1};$$

ceux de Θ_1 sont compris, en vertu des mêmes formules [6], dans celle-ci :

$$(\Theta_1) \quad (2j + 1)K + (2j' + 1)K'\sqrt{-1}.$$

TABLEAU N° 2.

$$[S] \left\{ \begin{array}{ll} \text{Zéros de } \Theta(x) \dots & 2jK + (2j' + 1)K'\sqrt{-1}, \\ \text{de } H(x) \dots & 2jK + 2j'K'\sqrt{-1}, \\ \text{de } \Theta_1(x) \dots & (2j + 1)K + (2j' + 1)K'\sqrt{-1}, \\ \text{de } H_1(x) \dots & (2j + 1)K + 2j'K'\sqrt{-1}. \end{array} \right.$$

NOUVELLES DÉFINITIONS DES FONCTIONS Θ , H , Θ_1 , H_1 .

Les fonctions Θ_1 , H_1 , Θ , H satisfont aux formules

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_1(x + 2K) = \Theta_1(x), \\ \Theta_1(x + 2K'\sqrt{-1}) = \Theta_1(x) e^{\frac{-\sqrt{-1}}{h}(x + K'\sqrt{-1})}. \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \begin{cases} \Theta(x + 2K) = \Theta(x), \\ \Theta(x + 2K'\sqrt{-1}) = -\Theta(x) e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x + K'\sqrt{-1})}. \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} H_1(x + 2K) = -H_1(x), \\ H_1(x + 2K'\sqrt{-1}) = H_1(x) e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x + K'\sqrt{-1})}. \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} H(x + 2K) = -H(x), \\ H(x + 2K'\sqrt{-1}) = -H(x) e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x + K'\sqrt{-1})}. \end{cases}$$

Si l'on ajoute que ces quatre fonctions sont synectiques et, par suite, développables en séries d'exponentielles, elles seront déterminées à un facteur constant près par ces quatre formules. Ce fait est déjà établi à l'égard de la fonction Θ_1 ; nous allons le prouver pour les autres fonctions.

Lorsque l'on a

$$(5) \quad \begin{cases} \theta(x + \omega) = \theta(x), \\ \theta(x + \varpi) = \theta(x) e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\mu(x+c)}, \end{cases}$$

et que la fonction $\theta(x)$ est synectique, ces équations imposent à la fonction θ la forme

$$A_0\theta_0(x) + A_1\theta_1(x) + \dots + A_{\mu-1}\theta_{\mu-1}(x),$$

où $A_0, A_1, \dots, A_{\mu-1}$ sont des constantes et où $\theta_0, \theta_1, \dots$ désignent des solutions de (5). Si donc on fait $\mu = 2$, $\omega = 4K$, $\varpi = 2K'\sqrt{-1}$, $c = K'\sqrt{-1}$, on aura

$$(6) \quad \begin{cases} \theta(x + 4K) = \theta(x), \\ \theta(x + 2K'\sqrt{-1}) = \theta(x) e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x + K'\sqrt{-1})}, \end{cases}$$

et $\theta(x)$ sera de la forme $A_0\theta_0 + A_1\theta_1$. Or les deux fonctions $\Theta_1(x)$ et $H_1(x)$ satisfont à ces deux équations; leur solution générale sera donc

$$A_0\Theta_1(x) + A_1H_1(x).$$

Si l'on ajoute que $\theta(x)$ s'annule pour une valeur donnée $K + K'\sqrt{-1}$, il faudra que $A_1 = 0$, et la fonction θ sera définie à un facteur près.

Ainsi les fonctions Θ_1, H_1, Θ, H sont définies par leurs zéros et par les formules telles que (6), que l'on peut déduire de (1), (2), (3), (4); mais elles ne sont définies qu'à un facteur constant près (on reconnaît dans H et Θ les valeurs qui figuraient en numérateur et en dénominateur dans $\operatorname{sn} x$).

SUR UNE FORMULE DE CAUCHY. — NOUVELLES EXPRESSIONS
DE Θ, H, Θ_1, H_1 EN PRODUITS.

Posons

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} F(z) = & (1 + qz)(1 + qz^{-1})(1 + q^3z)(1 + q^3z^{-1}) \dots \\ & \times (1 + q^{2n+1}z)(1 + q^{2n+1}z^{-1}). \end{aligned} \right.$$

Nous aurons évidemment

$$F(q^2z) = F(z) \frac{1 + q^{2n+3}z}{1 + qz} \frac{1 + q^{-1}z^{-1}}{1 + q^{2n-1}z^{-1}},$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad F(q^2z)(qz + q^{2n+1}) = F(z)(1 + q^{2n+3}z).$$

Cette équation constitue une propriété de la fonction $F(z)$ qui va nous servir à la développer. $F(z)$ est de la forme

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} F(z) = & A_0 + A_1(z + z^{-1}) \\ & + A_2(z^2 + z^{-2}) + \dots + A_n(z^n + z^{-n}). \end{aligned} \right.$$

Remplaçons dans (2) $F(z)$ par cette valeur, nous aurons

$$\begin{aligned} & [A_0 + A_1(q^2z + q^{-2}z^{-1}) + \dots + A_n(q^{2n}z^n + q^{-2n}z^{-n})](qz + q^{2n+1}) \\ & = [A_0 + A_1(z + z^{-1}) + \dots + A_n(z^n + z^{-n})](1 + q^{2n+3}z), \end{aligned}$$

et, en égalant de part et d'autre les coefficients des

mêmes puissances de z ,

$$\begin{aligned} A_0 q + A_1 q^{2n+4} &= A_0 q^{2n+3} + A_1, \\ A_1 q^3 + A_2 q^{2n+6} &= A_1 q^{2n+3} + A_2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} A_0 (q - q^{2n+3}) &= A_1 (1 - q^{2n+4}), \\ A_1 (q^3 - q^{2n+3}) &= A_2 (1 - q^{2n+6}), \\ &\dots\dots\dots \\ A_{n-1} (q^{2n-3} - q^{2n+3}) &= A_n (1 - q^{4n+2}). \end{aligned}$$

Or on connaît A_n ; il est égal à $q q^3 q^5 \dots q^{2n+1} = q^{n(n+1)}$, et l'on tire des formules précédentes

$$A_0 = q^{n(n+1)} \frac{(1 - q^{2n+4})(1 - q^{2n+6}) \dots (1 - q^{4n+2})}{(q - q^{2n+3})(q^3 - q^{2n+3}) \dots (q^{2n-1} - q^{2n+3})}.$$

Supposons $q < 1$, alors pour $n = \infty$ on aura

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^8) \dots}, \\ A_1 &= q A_0, \quad A_2 = q^3 A_1, \quad \dots, \end{aligned}$$

et, par suite, en égalant les valeurs (1) et (3) de $F(z)$,

$$\begin{aligned} (1 + qz)(1 + qz^{-1})(1 + q^3 z)(1 + q^3 z^{-1}) \dots \\ = \frac{1 + q(z + z^{-1}) + q^4(z^2 + z^{-2}) + q^9(z^3 + z^{-3}) + \dots}{(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^8) \dots}. \end{aligned}$$

Telle est la formule de Cauchy; quand on y fait

$z = e^{\frac{\pi x \sqrt{-1}}{K}}$, et quand on observe qu'alors

$$\begin{aligned} (1 + q^{2n+1} z)(1 + q^{2n+1} z^{-1}) &= 1 + 2q^{2n+1} \cos \frac{\pi x}{K} + q^{4n+2}, \\ z^k + z^{-k} &= 2 \cos \frac{\pi u x}{K}, \end{aligned}$$

elle donne

$$\begin{aligned} (1 + 2q \cos \frac{\pi x}{K} + q^2)(1 + 2q^3 \cos \frac{\pi x}{K} + q^6) \dots \\ = \frac{1 + 2q \cos \frac{\pi x}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi x}{K} + \dots}{(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6) \dots}. \end{aligned}$$

Si donc on désigne par c le produit

$$(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6) \dots$$

on aura

$$\Theta_1(x) = c(1 + 2q \cos \frac{\pi x}{K} + q^2)(1 + 2q^3 \cos \frac{\pi x}{K} + q^6) \dots$$

En changeant dans cette formule x en $x + K$, en $x + K'\sqrt{-1}$ et en $x + K + K'\sqrt{-1}$, on forme le tableau suivant :

TABLEAU N° 3.

$$c = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6) \dots$$

$$[9] \left\{ \begin{array}{l} \Theta_1(x) = c \left(1 + 2q \cos \frac{\pi x}{K} + q^2 \right) \left(1 + 2q^3 \cos \frac{\pi x}{K} + q^6 \right) \dots, \\ \Theta(x) = c \left(1 - 2q \cos \frac{\pi x}{K} + q^2 \right) \left(1 - 2q^3 \cos \frac{\pi x}{K} + q^6 \right) \dots; \\ H_1(x) = c 2q^{\frac{1}{4}} \cos \frac{\pi x}{2K} \left(1 + 2q^2 \cos \frac{\pi x}{K} + q^4 \right) \\ \quad \times \left(1 + 2q^4 \cos \frac{\pi x}{K} + q^8 \right) \dots, \\ H(x) = c 2q^{\frac{1}{4}} \sin \frac{\pi x}{2K} \left(1 - 2q^2 \cos \frac{\pi x}{K} + q^4 \right) \\ \quad \times \left(1 - 2q^4 \cos \frac{\pi x}{K} + q^8 \right) \dots \end{array} \right.$$

RELATIONS ALGÈBRIQUES ENTRE Θ , H , Θ_1 , H_1 .

Considérons les fonctions Θ^2 , H^2 , Θ_1^2 , H_1^2 ; elles satisfont toutes les quatre aux relations

$$\theta(x + 2K) = \theta(x),$$

$$\theta(x + 2K'\sqrt{-1}) = \theta(x) e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K} 2(x + K'\sqrt{-1})};$$

donc deux des quatre fonctions en question sont des

fonctions linéaires et homogènes des deux autres. Posons alors

$$\Theta^2(x) = A H^2(x) + A_1 H_1^2(x);$$

on en conclura, pour $x = 0$ et $x = K$,

$$\Theta^2(0) = A_1 H_1^2(0), \quad \Theta^2(K) = A H^2(K).$$

D'ailleurs

$$H_1^2(0) = H^2(K);$$

on en déduit A et A_1 , et la formule précédente donne

$$\Theta^2(x) = H^2(x) \frac{\Theta^2(K)}{H^2(K)} + H_1^2(x) \frac{\Theta^2(0)}{H_1^2(0)},$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$(1) \quad \Theta^2(x) = H^2(x) \frac{\Theta_1^2(0)}{H_1^2(0)} + H_1^2(x) \frac{\Theta^2(0)}{H^2(0)}.$$

On trouve de même

$$\Theta^2(x) = H^2(x) \frac{\Theta(K + K' \sqrt{-1})}{H(K + K' \sqrt{-1})} + \Theta_1^2(x) \frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)};$$

mais (formules [6])

$$\frac{\Theta(K + K' \sqrt{-1})}{H(K + K' \sqrt{-1})} = \frac{H(K)}{\Theta(K)} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)};$$

donc

$$(2) \quad \Theta^2(x) = H^2(x) \frac{H_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)} + \Theta_1^2(x) \frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)}.$$

(A suivre.)