

FAURE

Théorie des indices

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 193-211

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__193_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THEORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,

Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

102. Éliminons maintenant les expressions $|\varepsilon, \gamma|$, (ε', γ') , en nous servant des relations (d, 87); soient E, F deux plans menés par la droite ε ; E', F' deux plans menés par la droite ε' ,

$$(\varepsilon, \gamma) = \frac{\begin{vmatrix} (a, E) & (a, F) \\ (b, E) & (b, F) \end{vmatrix}}{ab \sin EF},$$

$$|\varepsilon', \gamma'| = \frac{\begin{vmatrix} (a', E') & (a', F') \\ (b', E') & (b', F') \end{vmatrix}}{a'b' \sin E'F'}.$$

Nos deux expressions deviennent, en observant que

$$(a, A)(b, B) = ab \sin AB |\gamma, \nu|,$$

$$(a', A')(b', B') = a'b' \sin A'B' |\gamma', \nu'|,$$

$$\sin EF \sin E'F' \cos \varepsilon \varepsilon'$$

$$= \sum \frac{\begin{vmatrix} (a, E) & (a, F) \\ (b, E) & (b, F) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a', E') & (a', F') \\ (b', E') & (b', F') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a, A) & (b, B) \\ (a', A') & (b', B') \end{vmatrix}} \frac{\sin AB \sin A'B' \cos \nu \nu'}{\sin \varepsilon \sin \varepsilon'}.$$

$$o, \varepsilon, o, \varepsilon') \sin EF \sin E'F' \cos PP'$$

$$= \sum \frac{\begin{vmatrix} (a, E) & (a, F) \\ (b, E) & (b, F) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a', E') & (a', F') \\ (b', E') & (b', F') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a, A) & (b, B) \\ (a', A') & (b', B') \end{vmatrix}} \frac{(o, \nu)(o, \nu') \sin AB \sin A'B' \cos \nu \nu'}{\sin \varepsilon \sin \varepsilon'}.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529, et t. XVI, p. 5, 160.

Lorsque ε' coïncide avec ε , les plans E' , F' avec E , F ,

$$\frac{1}{\sin^2 EF}$$

$$= \sum \left| \frac{(a, E)(a, F)}{(b, E)(b, F)} \right| \left| \frac{(a', E)(a', F)}{(b', E)(b', F)} \right| \frac{\sin AB \sin A'B' \cos \nu \nu'}{(a, A)(b, B)(a', A')(b', B')},$$

$$(\varepsilon, \varepsilon')^2 \sin^2 EF = \sum \left| \frac{(a, E)(a, F)}{(b, E)(b, F)} \right| \left| \frac{(a', E)(a', F)}{(b', E)(b', F)} \right| \left| \frac{(o, \nu)(o, \nu') \sin AB \sin A'B' \cos NN'}{(a, A)(b, B)(a', A')(b', B')} \right|.$$

La première de ces relations donne *le carré du sinus de l'angle de deux plans déterminés par leurs coordonnées*.

Si du point o on abaisse des perpendiculaires sur les plans E et F , la seconde relation donne *le carré de la distance des pieds de ces perpendiculaires*.

$$\text{Corollaires de la relation } I_{EE'} = \sum \frac{(a, E)}{(a, A)} I_{AE'}.$$

103. Lorsque la surface S est une sphère de rayon R ,

$$\begin{aligned} (o, E) (o, E') &= R^2 \cos EE' \\ &= \sum \left(\frac{a, E}{a, A} \right) [(o, A) (o, E') - R^2 \cos AE']; \end{aligned}$$

$$\text{mais } (o, E) = \sum \left(\frac{a, E}{a, A} \right) (o, A); \text{ par conséquent,}$$

$$\cos EE' = \sum \left(\frac{a, E}{a, A} \right) \cos AE' \quad (4 \text{ termes}).$$

Cette relation donne *le cosinus de l'angle de deux plans dont l'un est déterminé par ses coordonnées, tandis que l'autre n'est déterminé qu'en direction*.

Un second tétraèdre $a'b'c'd'$ donnerait

$$\cos EE' = \sum \frac{(a', E')}{(a', A')} \cos A'E;$$

(195)

portant dans la première expression de $\cos EE'$ les valeurs de $\cos AE'$, $\cos BE'$, . . . , déduites de la seconde, on a, pour le *cosinus de l'angle de deux plans déterminés par leurs coordonnées*,

$$\cos EE' = \sum \frac{(a, E)(a', E')}{(a, A)(a', A')} \cos AA' \quad (16 \text{ termes}).$$

Si les plans coïncident,

$$1 = \sum \frac{(a, E)(a', E')}{(a, A)(a', A')} \cos AA'.$$

Si, en même temps, les tétraèdres se confondent,

$$1 = \sum \frac{(a, E)^2}{(a, A)^2} + 2 \sum \frac{(a, E)(b, E)}{(a, A)(b, B)} \cos AB.$$

Si les plans EE' sont à l'infini, la relation générale donne

$$0 = \sum \frac{\cos AA'}{(a, A)(a', A')}.$$

104. Prenons dans le plan E trois points arbitraires e, f, g ; dans le plan E' trois points également arbitraires e', f', g' et remplaçons dans l'expression de $\cos EE'$ les coordonnées des plans E et E' par les valeurs (88).

Nous trouvons d'abord

$$\begin{aligned} 4efg \cdot e'f'g' \cos EE' \\ = \sum \left| \begin{array}{l} (e, C)(f, C)(g, C) \\ (e, B)(f, B)(g, B) \\ (e, D)(f, D)(g, D) \end{array} \right| \\ \times \left| \begin{array}{l} (e', C')(f', C')(g', C') \\ (e', B')(f', B')(g', B') \\ (e', D')(f', D')(g', D') \end{array} \right| \frac{\cos AA'}{(a, A)(a', A') \sin BCD \sin B'C'D'}. \end{aligned}$$

Mais

$$2(a, A) \sin BCD = \frac{(3V)^3}{ABCD}, \quad 2(a', A') \sin B'C'D' = \frac{(3V')^3}{A'B'C'D'};$$

par suite,

$$\frac{(3V)^3}{ABCD} \frac{(3V')^3}{A'B'C'D'} e'g' \cdot e'f'g' \cos EE'$$

$$= \sum \left| \begin{array}{ccc} (e, C)(f, C)(g, C) \\ (e, B)(f, B)(g, B) \\ (e, D)(f, D)(g, D) \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} (e', C')(f', C')(g', C') \\ (e', B')(f', B')(g', B') \\ (e', D')(f', D')(g', D') \end{array} \right| \cos AA'.$$

Lorsque les points e', f', g' coïncident avec les points e, f, g , on a une expression du carré de l'aire d'un triangle déterminé par les coordonnées de ses sommets.

On ne devra pas oublier que, dans toutes les formules où figurent des angles formés par des plans, il faudra toujours prendre l'angle formé par des normales extérieures à ces plans, pour l'angle de ces plans eux-mêmes.

103. Par un point p menons trois plans rectangulaires E, F, G et par un point p' trois plans parallèles aux premiers. Appliquons aux trois systèmes de plans EE', FF', GG' la relation (19)

$$I_{LL} = \sum \frac{(a, E)(a', E')}{(a, A)(a', A')} I_{AA};$$

ajoutons les résultats, et rappelons-nous (81) que

$$I_{EE'} + I_{FF'} + I_{GG'} = \frac{op \cdot op' \cos pop' - S_1^2}{\pi},$$

nous aurons ce théorème :

Étant donnés deux tétraèdres $a^b c^d$, $a'b'c'd'$, deux points p, p' et une surface S , si l'on désigne par x, x' les droites $pa, p'a'$, par S_1^2 la somme des carrés des demi axes de la surface, par π^2 leur produit :

$$\sum \frac{pa \cdot p'a' \cos xx'}{(a, A)(a', A')} I_{AA'} = \frac{op \cdot op' \cos pop' - S_1^2}{\pi^2}.$$

Nous pouvons remplacer les numérateurs par les expressions équivalentes (31, 4°)

$$pa.p'a' \cos \alpha\alpha' = \frac{1}{2} (\overline{pa'^2} + \overline{ap'^2} - \overline{pp'^2} - \overline{aa'^2}),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} & \sum \frac{\overline{pa'^2}}{(a', A')} \sum \frac{I_{AA'}}{(a, A)} + \sum \frac{\overline{ap'^2}}{(a, A)} \sum \frac{I_{AA'}}{(a', A')} \\ & - \overline{pp'^2} \sum \frac{I_{AA'}}{(a, A)(a', A')} - \sum \frac{\overline{aa'^2}}{(a, A)(a', A')} I_{AA'} \\ & = \frac{\overline{op^2} + \overline{op'^2} - \overline{pp'^2} - 2S_1^2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Où (92), o étant le centre de la surface S ,

$$\frac{(o, A')}{\pi^2} = \sum \frac{I_{AA'}}{(a, A)}, \quad \frac{(o, A)}{\pi^2} = \sum \frac{I_{AA'}}{(a', A')},$$

et

$$\sum \frac{I_{AA'}}{(a, A)(a', A')} = \frac{1}{\pi^2},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} & \sum \frac{\overline{pa'^2}(o, A')}{(a', A')} + \sum \frac{\overline{ap'^2}(o, A)}{(a, A)} \\ & - \pi^2 \sum \frac{\overline{aa'^2} I_{AA'}}{(a, A)(a', A')} = \overline{po^2} + \overline{p'o^2} - 2S_1^2 \end{aligned}$$

Circonscrivons des sphères aux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ et désignons par P_o , P'_o les puissances du centre o de S par rapport à ces sphères, nous avons (96)

$$\sum \frac{(o, A')}{(a', A')} \overline{pa'^2} = \overline{po^2} - P'_o, \quad \sum \frac{(o, A)}{(a, A)} \overline{p'a^2} = \overline{p'o^2} - P_o;$$

d'où ce théorème : *On donne une surface S et deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$; si l'on désigne par P_o , P'_o les*

puissances du centre o de S par rapport aux sphères circonscrites aux tétraèdres, l'expression

$$P_o + P'_o + \pi^2 \sum \frac{\overline{aa'}^2}{(a, A)(a', A')} I_{AA'}$$

représente le double de la somme des carrés des demi-axes de la surface S .

Lorsque les deux tétraèdres coïncident, on a

$$P_o + \pi^2 \sum \frac{\overline{ab}^2}{(a, A)(b, B)} I_{AB} = S_i^2;$$

le signe somme contient six termes. Si la surface S est conjuguée au tétraèdre $abcd$, les indices I_{AB} sont nuls et

$$P_o = S_i^2;$$

nous retrouvons par une autre voie un théorème déjà démontré.

Lieu du centre des surfaces inscrites aux six plans A , B , C , D , E , F dont la somme des carrés des axes est donnée.

106. La surface S touchant les quatre faces du tétraèdre de référence, les distances du centre o à ces faces sont données par les relations (92)

$$\begin{aligned} \frac{(o, A)}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{AA}}{(a, A)}, & \frac{(o, B)}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{BB}}{(a, A)}, \\ \frac{(o, C)}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{CA}}{(a, A)}, & \frac{(o, D)}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{DA}}{(a, A)}, \end{aligned}$$

dans lesquelles on fera

$$I_A = I_B = I_C = I_D = 0.$$

Les plans E et F touchant la surface S , on a

$$0 = \sum \frac{(a, E)(b, E)}{(a, A)(b, B)} I_{AB}, \quad 0 = \sum \frac{(a, F)(b, F)}{(a, A)(b, B)} I_{AB},$$

De plus

$$\frac{1}{\pi^2} (S_1^2 - P_0) = \sum \frac{\overline{ab}^2}{(a, A)(b, B)} I_{AB}.$$

Si l'on élimine les indices entre ces sept équations, on trouve, après avoir chassé les dénominateurs,

$$\begin{array}{c} S_1^2 - P_0 \\ (a, A) \\ (a, B) \\ (a, C) \\ (a, D) \\ 0 \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c} \overline{ab}^2 \\ (a, A) \\ (b, B) \\ 0 \\ 0 \\ (a, E)(b, E) \\ (a, F)(b, F) \end{array} \begin{array}{c} \overline{ac}^2 \\ (a, A) \\ 0 \\ (c, C) \\ 0 \\ (a, E)(c, E) \\ (a, F)(c, F) \end{array} \begin{array}{c} \overline{ad}^2 \\ (a, A) \\ 0 \\ 0 \\ (d, D) \\ (a, E)(d, E) \\ (a, F)(d, F) \end{array} \begin{array}{c} \overline{bc}^2 \\ 0 \\ (b, B) \\ (c, C) \\ 0 \\ (b, E)(c, E) \\ (b, F)(c, F) \end{array} \begin{array}{c} \overline{bd}^2 \\ 0 \\ (b, B) \\ 0 \\ (d, D) \\ (b, E)(d, E) \\ (b, F)(d, F) \end{array} \begin{array}{c} \overline{cd}^2 \\ 0 \\ 0 \\ (c, C) \\ (d, D) \\ (c, E)(d, E) \\ (c, F)(d, F) \end{array}$$

De cette équation résulte

$$S_1^2 = P_0 + Q;$$

Q étant une fonction du premier degré des coordonnées du centre, le lieu est donc une sphère.

L'équation $P_0 + Q = 0$ représentant une sphère, nous voyons de plus que, quand une surface touche six plans, la somme des carrés des demi-axes de cette surface est égale à la puissance de son centre par rapport à une certaine sphère déterminée. Dès lors il est bien facile de caractériser cette sphère; car, si le point d désigne l'intersection ABC , et g l'intersection DEF , la droite dg est une des surfaces inscrites aux six plans, son centre o est le milieu de dg , et la somme des carrés de ses demi-axes est $\frac{dg^2}{4}$. La sphère cherchée divise donc harmoniquement le segment dg ; par conséquent, elle coupe orthogonalement la sphère qui a pour diamètre dg , ainsi que toutes celles que l'on peut décrire sur les dix diagonales de l'hexaèdre $ABCDEF$ comme diamètres. Ce beau théorème est dû à M. Paul Serret; le suivant appartient au même géomètre.

107. Le lieu du centre des surfaces du second ordre conjuguées à six couples de plans AA' , BB' , CC' , DD' , EE' , FF' , et dont la somme des carrés des demi-axes est constante, est également une sphère dont nous pouvons donner l'équation.

Prenons pour tétraèdres de référence $ABCD$ et $A'B'C'D'$. Nous avons pour première équation

$$\frac{1}{\pi^4} (2S_1^2 - P_0 - P'_0) = \sum \frac{\overline{aa'}^2}{(a, A)(a', A')} I_{AA'};$$

le signe somme contient seulement douze termes, puisque, par hypothèse, $I_{AA'} = I_{BB} = I_{CC} = I_{DD} = 0$.

Pour éliminer les douze indices $I_{AB}, I_{AC}, I_{AD}, \dots$, nous avons d'abord les huit équations

$$\begin{aligned} \frac{(o, A')}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{AA'}}{(a, A)}, & \frac{(o, B')}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{AB'}}{(a, A)}, \\ \frac{(o, C')}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{AC'}}{(a, A)}, & \frac{(o, D')}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{AD'}}{(a, A)}, \\ \frac{(o, A)}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{AA'}}{(a', A')}, & \frac{(o, B)}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{BA'}}{(a', A')}, \\ \frac{(o, C)}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{CA'}}{(a', A')}, & \frac{(o, D)}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{DA'}}{(a', A')}. \end{aligned}$$

Puis, pour exprimer que les plans E, E', F, F' sont conjugués à la surface S, on a les quatre équations

$$\begin{aligned} 0 &= \sum \frac{(a, E)}{(a, A)} \frac{(a', E')}{(a', A')} I_{AA'}, & 0 &= \sum \frac{(a, E')}{(a, A)} \frac{(a', E)}{(a', A')} I_{AA'}, \\ 0 &= \sum \frac{(a, F)}{(a, A)} \frac{(a', F')}{(a', A')} I_{AA'}, & 0 &= \sum \frac{(a, F')}{(a, A)} \frac{(a', F)}{(a', A')} I_{AA'}. \end{aligned}$$

Entre les treize équations écrites, on peut éliminer les douze indices, et du déterminant que l'on obtient résulte la relation

$$2S_1^2 = P_0 + P'_0 + Q,$$

Q étant une fonction du premier degré des coordonnées du centre; par conséquent, la somme des carrés des demi-axes d'une surface conjuguée aux plans donnés est égale à la puissance de son centre par rapport à une sphère déterminée.

Équations par droites et par plans du cercle imaginaire situé à l'infini.

108. Si par le centre d'une sphère on mène deux diamètres rectangulaires, ces diamètres coupent le plan situé à l'infini en deux points qui sont conjugués par

rapport au cercle imaginaire situé dans ce plan, cercle par lequel passent toutes les sphères de l'espace. Si de même on mène deux plans diamétraux perpendiculaires, ils couperont le plan situé à l'infini, suivant deux droites conjuguées à ce cercle imaginaire. Or, puisque le centre de la sphère considérée est un point arbitraire, nous voyons que si, dans le plan situé à l'infini, on prend deux points conjugués au cercle imaginaire, deux droites quelconques menées par ces points sont toujours rectangulaires; et, si l'on prend dans ce même plan deux droites conjuguées au cercle imaginaire, deux plans quelconques menés par ces droites seront rectangulaires. Si les points conjugués coïncident, auquel cas ils se trouvent réunis en un point du cercle imaginaire, nous voyons que si, par un point de ce cercle, on mène une droite, elle est perpendiculaire à elle-même, et si les droites conjuguées viennent se confondre avec une tangente au cercle imaginaire, tout plan mené par cette tangente est perpendiculaire à lui-même.

Il suit de là, en ayant égard aux valeurs trouvées pour le cosinus de l'angle de deux droites et de deux plans, que

$$0 = \sum \frac{|\varepsilon, \gamma|}{|\gamma, \nu|} \frac{|\varepsilon, \gamma'|}{|\gamma', \nu'|} \cos \nu \nu'$$

est l'équation par droites du cercle imaginaire situé à l'infini, et que

$$0 = \sum \frac{(a, E)(a', E)}{(a, A)(a', A')} \cos AA'$$

est l'équation par plans de ce même cercle.

Quant à l'équation par points de ce cercle, elle ne saurait exister, mais il est facile d'écrire l'équation du cône qui a pour sommet un point quelconque o , et pour base le cercle imaginaire; car, l'équation générale

$I_e + 1 = 0$ du cône asymptote de la surface S donnant (23) $p_e = 0$ dans le cas de la sphère, nous avons (97) pour l'équation de ce cône

$$0 = \sum \frac{(e, A)(e, A')}{(a, A)(a', A')} p_{aa'}.$$

109. Nos formules conduisent facilement à ces résultats.

D'après les relations établies aux n^{os} 11, 12, 13, nous avons les suivantes :

$$I_{ee'} = -1 + oe \cdot oe' I_{ee'};$$

$\varepsilon, \varepsilon'$ sont les diamètres oe, oe' ;

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = I_{\varepsilon_0\varepsilon'_0} - (o, \varepsilon)(o, \varepsilon') I_{PP'};$$

P et P' sont les plans diamétraux menés par les droites ε et ε' ,

$$I_{EE'} = I_{E_0E'_0} + \frac{(o, E)(o, E')}{\pi^2}.$$

Si les points e, e' sont situés sur deux diamètres conjugués de la surface S , $I_{ee'} = 0$.

Si, dans la seconde, les droites $\varepsilon, \varepsilon'$ sont parallèles à deux diamètres conjugués de S , $I_{\varepsilon_0\varepsilon'_0} = 0$.

Si, dans la troisième, les plans E, E' sont parallèles à deux plans diamétraux conjugués de S , $I_{E_0E'_0} = 0$, et nos trois relations donnent

$$I_{ee'} + 1 = 0, \quad I_{\varepsilon\varepsilon'} = - (o, \varepsilon)(o, \varepsilon') I_{PP'}, \quad I_{EE'} = \frac{(o, E)(o, E')}{\pi^2}.$$

Appliquées à la sphère, elles deviennent, en ayant égard aux relations 23, 24 et 25,

$$p_{ee'} = 0, \quad \cos \varepsilon \varepsilon' = 0, \quad \cos EE' = 0.$$

On sait que $p_{ee'} = oe \cdot oe' \cos \varepsilon \varepsilon'$. Remarquons que,

dans ces égalités, les points e, e' sont situés sur deux diamètres conjugués de la sphère, les droites $\varepsilon, \varepsilon'$ vont rencontrer le plan de l'infini en deux points conjugués au cercle imaginaire situés dans ce plan, et les plans E, E' vont couper ce même plan suivant deux droites également conjuguées au cercle imaginaire de l'infini. Ces trois relations nous conduiront donc aussi aux trois équations écrites plus haut.

110. Indiquant par I et I' les indices pris par rapport aux surfaces S et S' , posons

$$y_r = \begin{vmatrix} I_{aa'} & I_{ab'} & I_{ac'} & I_{ad'} & I'_{ae'} & I'_{af'} & \dots & I'_{am'} \\ I_{ba'} & I_{bb'} & I_{bc'} & I_{bd'} & I'_{be'} & I'_{bf'} & \dots & I'_{bm'} \\ I_{ca'} & I_{cb'} & I_{cc'} & I_{cd'} & I'_{ce'} & I'_{cf'} & \dots & I'_{cm'} \\ I_{da'} & I_{db'} & I_{dc'} & I_{dd'} & I'_{de'} & I'_{df'} & \dots & I'_{dm'} \\ I'_{ea'} & I'_{eb'} & I'_{ec'} & I'_{ed'} & o & o & o & o \\ I'_{fa'} & I'_{fb'} & I'_{fc'} & I'_{fd'} & o & o & o & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I'_{ma'} & I'_{mb'} & I'_{mc'} & I'_{md'} & o & o & o & o \end{vmatrix},$$

la lettre r désignant le nombre des points $e, f, \dots, m; e', f', \dots, m'$. Soient $E', F', \dots, M'$; $E, F, \dots, M$ les plans polaires de ces deux groupes de points par rapport à la surface S' ; si π' est le produit des demi-axes de cette surface, o' son centre,

$$I'_{ae'} = -\frac{(a, E)}{(o', E)}, \quad I'_{af'} = -\frac{(a, F)}{(o', F)}, \quad I'_{md'} = -\frac{(d', M')}{(o', M')}.$$

Substituant ces valeurs dans y_r , on trouve

$$(o', E)(o', F) \dots (o', M)(o', E')(o', F') \dots (o', M') y_r = r_r,$$

x_r étant le déterminant du n° 22. Mais, à cause des re-

lations

$$I'_{ee'} = - \frac{\pi'^2 I'_{eE'}}{(o', E)(o', E')}, \quad I'_{ef'} = - \frac{\pi'^2 I'_{fE'}}{(o', F)(o', E')}, \dots,$$

on voit que

$$\begin{aligned} & (o', E)(o', F) \dots (o', M)(o', E')(o', F') \dots (o', M') \\ &= \frac{\begin{vmatrix} E & F & \dots & M \\ E' & F' & \dots & M' \\ e & f & \dots & m \\ e' & f' & \dots & m' \end{vmatrix}'}{\begin{vmatrix} e & f & \dots & m \\ e' & f' & \dots & m' \end{vmatrix}'} (-\pi^2)^r. \end{aligned}$$

Nous ajoutons l'accent prime dans ces deux symboles pour indiquer que les indices doivent être pris par rapport à la surface S' . Nous avons donc, en remplaçant x_r par sa valeur,

$$(A) \quad \gamma_r = (-1)^r \frac{\pi^r}{\pi^{2r}} \frac{\begin{vmatrix} e & f & \dots & m \\ e' & f' & \dots & m' \\ E & F & \dots & M \\ E' & F' & \dots & M' \end{vmatrix}'}{\begin{vmatrix} E & F & \dots & M \\ E' & F' & \dots & M' \end{vmatrix}'} \Delta_1 \nabla_r.$$

Pour développer le déterminant γ_r , on aura égard aux relations du n° 14,

$$I'_{ee'} = \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} I'_{ae'}, \quad I'_{ef'} = \sum \frac{(e', A')}{(a', A')} I'_{ae'}.$$

En remplaçant dans la première le point e' par a', b', c', d' , on obtiendra les valeurs de $I'_{ea'}, I'_{eb'}, I'_{ec'}, I'_{ed'}$; en remplaçant dans la seconde le point e par a, b, c, d , on obtiendra les valeurs de $I'_{ae'}, I'_{be'}, I'_{ce'}, I'_{de'}$. De même pour les autres termes. On se rappellera que $I'_{ee'} = 0$ est l'équation du plan polaire du point e' par rapport à S' , le point e étant un point variable.

Pour $r = 1, 2, 3$, on a, en développant les valeurs

de γ_r par rapport aux éléments relatifs à la surface S' ,

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= - \sum \begin{vmatrix} I_{bb'} & I_{bc'} & I_{bd'} \\ I_{cb'} & I_{cc'} & I_{cd'} \\ I_{db'} & I_{dc'} & I_{dd'} \end{vmatrix} I'_{ae'} I'_{ea'} \\
 &= - 4 \sum bcd . b' c' d' I_{AA'} I'_{ae'} I'_{ea'}, \\
 \gamma_2 &= - \sum \begin{vmatrix} I_{ce'} & I_{cd'} \\ I_{de'} & I_{dd'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I'_{ae'} & I'_{ef'} \\ I'_{be'} & I'_{bf'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I'_{ea'} & I'_{eb'} \\ I'_{fa'} & I'_{fb'} \end{vmatrix} \\
 &= \sum ab . cd . a' b' . c' d' . ef . e' f' I_{\nu\nu'} I'_{\nu'e'} I'_{e'\nu'}, \\
 \gamma_3 &= - \sum I_{dd'} \begin{vmatrix} I'_{ae'} & I'_{af'} & I'_{ag'} \\ I'_{be'} & I'_{bf'} & I'_{bg'} \\ I'_{ce'} & I'_{cf'} & I'_{cg'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I'_{ea'} & I'_{eb'} & I'_{ec'} \\ I'_{fa'} & I'_{fb'} & I'_{fc'} \\ I'_{ga'} & I'_{gb'} & I'_{gc'} \end{vmatrix} \\
 &= - 16 \sum abc . a' b' c' . efg . e' f' g' I_{dd'} I'_{DH'} I'_{H'D'}.
 \end{aligned}$$

Dans ces relations, ε et ε' sont les droites ef , $e'f'$; H et H' sont les plans efg et $e'f'g'$.

Remplaçant γ_r par ces valeurs dans la relation (A), et substituant aux divers déterminants leurs valeurs, on trouvera, toutes réductions faites,

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{I_{EE'} I'_{\nu\nu'}}{I_{EE'}} = - \pi'^2 \sum \frac{I_{AA'}}{(\alpha, A) (\alpha', A')} I'_{ae'} I'_{ea'}, \\ \frac{I_{\varphi\varphi'} I'_{\varepsilon\varepsilon'}}{I'_{\varphi\varphi'}} = - \pi'^2 \sum \frac{I_{\nu\nu'}}{|\gamma, \nu| |\gamma', \nu'|} I'_{\nu'e'} I'_{e'\nu'}, \\ \frac{I_{HH'} I'_{HH'}}{I_{HH'}} = - \pi'^2 \sum \frac{I_{dd'}}{(\alpha, D) (\alpha', D')} I'_{DH'} I'_{H'D'}. \end{cases}$$

Dans ces expressions, E' et E sont les plans polaires des points e , e' ; les droites φ' et φ sont les polaires des droites ε , ε' ; H' et H sont les plans polaires des points h et h' . Les polaires sont prises par rapport à la surface S' .

Remarque. — Lorsque les tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ sont polaires réciproques par rapport à S , ces relations

donnent celles du n° 58, car alors

$$-\pi^2 \frac{I_{AA'}}{(a, A)(a', A')} = \frac{1}{I_{aa'}}, \quad -\pi^2 \frac{I_{\gamma\gamma'}}{|\gamma, \gamma'| |\gamma', \gamma'|} = \frac{1}{I_{\gamma\gamma'}}, \\ -\pi^2 \frac{I_{dd'}}{(d, D)(d', D')} = \frac{1}{I_{dd'}}.$$

Désignons par Y , le déterminant que l'on déduit de γ , en remplaçant les points $a, b, c, \dots, m, a', b', \dots, m'$ par les plans correspondants $A, B, \dots, M, A', B', \dots, M'$. On établira comme ci-dessus la relation

$$Y_r = (-1)^r \frac{\pi^{2r}}{\pi'^{2r}} \frac{\begin{vmatrix} E & F & \dots & M \\ E' & F' & \dots & M' \\ e & f & \dots & m \\ e' & f' & \dots & m' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F & \dots & M \\ E' & F' & \dots & M' \\ e & f & \dots & m \\ e' & f' & \dots & m' \end{vmatrix}} \gamma_r \Delta_r;$$

d'où l'on déduira, pour $r = 1, 2, 3$,

$$C_r \begin{cases} \frac{I_{ee'} I'_{EL}}{I'_{ee'}} = -\pi'^2 \sum \frac{I_{aa'}}{(a, A)(a', A')} I'_{AE'} I'_{EA'}, \\ \frac{I_{\gamma\gamma'} I'_{\gamma\gamma'}}{I'_{\gamma\gamma'}} = -\pi'^2 \sum \frac{I_{\gamma\gamma'}}{|\gamma, \gamma'| |\gamma', \gamma'|} I'_{\gamma\gamma'} I'_{\gamma\gamma'}, \\ \frac{I_{HH'} I'_{hh'}}{I'_{HH'}} = -\pi'^2 \sum \frac{I_{DD'}}{(d, D)(d', D')} I'_{dh'} I'_{hd'}. \end{cases}$$

Comme dans le déterminant γ_r les points $e', f', \dots, m'$; $e, f, \dots, m$ sont, par rapport à S' , les pôles des plans $E, F, \dots, M; E', F', \dots, M'$, ϵ' et ϵ sont les droites $e'f', ef$ polaires des droites EF ou φ , $E'F'$ ou φ' ; H' et H sont les plans $e'f'g', efg$ plans polaires des points EFG ou $h, E'F'G'$ ou h' .

Dans le développement du déterminant Y_r , on aura égard aux relations du n° 14

$$I'_{FE} = \sum \frac{(a, E)}{(a, A)} I'_{AE'}, \quad I'_{EE'} = \sum \frac{(a', E')}{(a', A')} I'_{EA'}.$$

En remplaçant dans la première le plan E' par les

plans A', B', C', D' , on obtiendra les valeurs de $I'_{EA'}$, $I'_{EB'}$, . . . : en remplaçant dans la seconde le plan E par les plans A, B, C, D , on obtiendra les valeurs de $I'_{AE'}$, $I'_{BE'}$,

Quant à la signification géométrique de ces divers indices, on se rappellera que $I'_{EE'} = 0$ est l'équation du pôle du plan E' par rapport à la surface S' , E étant un plan variable.

111. Des relations précédentes résultent plusieurs conséquences; et d'abord, puisque l'équation $I'_{ee'} = 0$, dans laquelle l'un des points est supposé fixe, représente le plan polaire de ce point par rapport à la surface S' , nous voyons que l'on peut, dans la valeur de γ_r , considérer tous les indices primes comme représentant les plans polaires par rapport à S' des sommets $abcd$, $a'b'c'd'$, des tétraèdres primitifs; ou bien encore, en vertu de la relation générale $I'_{e'e'} = -\frac{(e, E)}{(e', E)}$, nous voyons que les indices par rapport à S' sont proportionnels aux distances des points $e, f, \dots, e', f', \dots$, aux plans polaires des sommets des tétraèdres primitifs par rapport à S' , de sorte que l'équation $\gamma_r = 0$, quelle que soit d'ailleurs sa signification, se trouve rapportée non plus aux tétraèdres de référence $abcd$, $a'b'c'd'$, mais aux polaires de ces tétraèdres par rapport à S' .

Dans le cas particulier où la surface S' coïncide avec S , les relations (B) se réduisent à

$$\begin{aligned} I_{ee'} &= -\pi^2 \sum \frac{I_{\lambda\lambda'}}{(a, A)(a', A')} I_{ae'} I_{e'e'}, \\ I_{\gamma\gamma'} &= -\pi^2 \sum \frac{I_{\gamma\gamma'}}{[\gamma, \gamma'] [\gamma', \gamma']} I_{\gamma e'} I_{e' \gamma'}, \\ I_{dd'} &= -\pi^2 \sum \frac{I_{dd'}}{(d, D)(d', D')} I_{dH} I_{d'H'}, \end{aligned}$$

et les tétraèdres de référence sont les polaires des tétraèdres primitifs par rapport à S . Si, par exemple, la surface S est conjuguée aux quatre couples aa' , bb' , cc' , dd' , auquel cas $I_{aa'} = I_{bb'} = I_{cc'} = I_{dd'} = 0$, les équations écrites ci-dessus, ou bien les déterminants

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0,$$

donnent, lorsque les points e' , f' , g' coïncident avec les points e , f , g l'équation générale par points, par droites et par plans des surfaces conjuguées à quatre couples de plans; et lorsque le tétraèdre $a'b'c'd'$ coïncidera avec $abcd$, on obtiendra dans ces trois cas respectivement l'équation par points, par droites et par plans des surfaces inscrites au système de quatre plans.

Le déterminant Y_r et les relations (C) donnent lieu à des remarques analogues; les indices affectés de l'accent représentent alors les pôles des faces des tétraèdres primitifs $abcd$, $a'b'c'd'$.

Équations par points, par droites, par plans de la polaire réciproque de la surface S par rapport à S' .

112. Dans le déterminant γ_r faisons coïncider les points e' , f' , $\dots$, m' avec les points e , f , $\dots$, m , et continuons d'appeler γ_r le déterminant ainsi modifié; en remplaçant γ_r par sa valeur (8) on a, pour $r = 1, 2, 3$,

$$\gamma_1 = - \frac{\pi^2}{\pi'^2} \frac{\Delta_1 I'_e}{I_E} I_E, \quad -$$

$$\gamma_2 = - \frac{\pi^2}{\pi'^4} \frac{\begin{vmatrix} e & f' \\ e & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ E & F \end{vmatrix}} \Delta_4 \sin^2 E F I_7,$$

$$\gamma_3 = - \frac{\pi^2}{\pi'^6} \begin{vmatrix} e & f & g \\ e' & f' & g' \\ E & F & G \\ E' & F' & G \end{vmatrix}' \Delta_1 \sin \overline{EFGI_h}.$$

Si le plan E touche la surface S , $I_E = 0$, et le point e , pôle du plan E par rapport à S' , appartient à la polaire réciproque de S par rapport à S' ; donc l'équation $\gamma_1 = 0$ est l'équation par points de cette polaire réciproque. Si la droite φ touche S , $I_\varphi = 0$; par conséquent $\gamma_2 = 0$ est l'équation par droites de la polaire réciproque de S par rapport à S' . Enfin, si le point h est sur la surface S , $I_h = 0$, et $\gamma_3 = 0$ est une équation par plans de la polaire réciproque de S par rapport à S' .

Si, dans le déterminant Y_r , on fait coïncider les plans $E', F', \dots, M'$ avec les plans $E, F, \dots, M$, on verra, comme plus haut, que les équations

$$Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0,$$

ainsi modifiées, représentent respectivement l'équation par plans, l'équation par droites et l'équation par points de la polaire réciproque de la surface S par rapport à S' .

Les relations (B) et (C) conduisent également à diverses formes de l'équation de cette polaire.

113. Dans le cas où les surfaces S et S' sont rapportées à leur tétraèdre autopolaire $abcd$, ces relations peuvent s'écrire comme il suit :

$$\frac{(e, E)^2 I_E}{I_E'^2} = \sum \frac{(e, A)^2 I_A}{I_A'^2} \quad (4 \text{ termes}),$$

$$\frac{|\varepsilon, \varphi|^2 I_\varepsilon}{I_\varepsilon'} = \sum \frac{|\nu, \varphi|^2 I_\nu}{I_\nu'^2} \quad (6 \text{ termes}),$$

$$\frac{(e, E)^2 I_e}{I_e'^2} = \sum \frac{(a, E)^2 I_a}{I_a'^2} \quad (4 \text{ termes}).$$

Dans la première, si le plan E touche S, son pôle e par rapport à S' décrira la polaire réciproque

$$\sum \frac{(e, A)^2 I_A}{I'_A{}^2} = 0$$

de S par rapport à S'. Dans la seconde, si la droite ε touche S, la polaire φ par rapport à S' roulera sur la polaire réciproque $\sum \frac{(\varepsilon, \varphi)^2 I_v}{I'_v{}^2} = 0$. Dans la troisième, si le point e est sur la surface S, son plan polaire E par rapport à S' touchera la polaire réciproque $\sum \frac{(e, E)^2 I_a}{I'_a{}^2} = 0$.

(A suivre.)