

JULES FRESON

**Concours d'admission à l'École
centrale (année 1876). 1^{re} session.
Géométrie analytique**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 180-182

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__180_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE
(ANNÉE 1876).

1^{re} SESSION. — GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

(voir 2^e série, t. XV, p. 420),

PAR M. JULES FRESON,
Élève à l'École des Mines, à Liège.

On donne deux points O , A , et l'on considère toutes les paraboles qui ont le point O pour sommet et qui passent au point A . A chacune de ces paraboles, on mène la tangente et la normale au sommet O , et la normale et la tangente au point A . On demande :

1° Le lieu du point de concours des tangentes au sommet O et au point A ;

2° Le lieu du point de concours de la normale au sommet O et de la tangente en A ;

3° Le lieu du point de concours de la tangente au sommet O et de la normale en A ;

4° Le lieu du point de concours des normales au sommet O et au point A .

1° Soit M le point de concours des tangentes en O

et A à l'une des paraboles considérées. On sait que la parallèle menée par M à l'axe de la parabole passe au milieu C de la corde des contacts OA (*). Donc le lieu du point M est la circonférence décrite sur OC comme diamètre.

2° Si N représente le point de concours d'une normale en O et d'une tangente en A, la perpendiculaire élevée à ON en N rencontre AO prolongée en un point B, tel que $OB = OA$, car la projection de OA sur l'axe de la parabole est égale à ON. Donc le lieu du point N est la circonférence symétrique par rapport au point O de celle qui a OA pour diamètre.

3° et 4°. Si l'on prend OA pour axe des x , et pour axe des y la perpendiculaire élevée au point O à la droite OA, les coordonnées α, β du point de concours M, des tangentes en A et O satisferont à l'équation

$$(1) \quad \alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{2} d\alpha = 0, \quad \text{où } d = OA.$$

Les équations des tangentes aux points O et A sont

$$(2) \quad y = \frac{\beta}{\alpha} x,$$

et

$$(3) \quad y = \frac{\beta}{\alpha - d} (x - d).$$

Les normales aux mêmes points sont représentées par les équations

$$(4) \quad y = -\frac{\alpha}{\beta} x,$$

et

$$(5) \quad y = \frac{d - \alpha}{\beta} (x - d).$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Combinant successivement les équations (2), (5) et (4), (5) avec la relation (1), on trouve

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x-d}{2d-x}},$$

et

$$y = \pm x \sqrt{\frac{d-x}{x - \frac{1}{2}d}}.$$

On voit que les deux lieux proposés, 3° et 4°, ont un sommet commun en A, un même axe de symétrie OA, et respectivement pour asymptotes les droites représentées par les équations $x = 2d$, $x = \frac{1}{2}d$ (*).

Note. — Solutions entièrement analytiques de MM. Moret-Blanc; Gambey; Brocard; Choquet, maître auxiliaire au lycée de Lille; Agabriel, maître répétiteur au lycée de Châteauroux; Georges Lambiotte, élève à l'École des Mines, à Liège; Talon, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Moulins.

(*) La définition géométrique de ces lieux conduit à un moyen très-simple de les construire par points; car soient D et F les points auxquels une droite quelconque issue du sommet O rencontre la circonférence décrite sur OA comme diamètre, et la tangente en A à cette circonférence; pour obtenir un point, P, du premier des deux lieux géométriques proposés (3° et 4°), il suffira de prendre sur le prolongement de OF la distance $FP = FD$.

On aura un point P' du second lieu en prenant le milieu du segment DF. En effet, le triangle rectangle OAF donne

$$AD^2 = \frac{OD}{2} \cdot 2DF = MD \times DP:$$

donc l'angle MAP est droit; il s'ensuit que P est le point de concours de la tangente OM au sommet O de la parabole et de la normale AP en A.

On démontrera de même qu'en prenant OM pour normale au sommet O, la normale en A est AP'.

Il est facile d'en conclure, sans aucun calcul, que le lieu du point P est la *podaïre* de O, par rapport à une parabole fixe, ayant pour sommet A et pour foyer B;

Et que le lieu du point P' est la *podaïre* du même point O, par rapport à la parabole dont A est le sommet et C le foyer. (G.)